

1. 다음 ()안에 알맞은 것은?

1-2i, 2-4i, 3-8i, 4-16i, (),...

- ① 5-18i

② 5-20i

③ 5-24i

④ 5-32i

⑤ 5-64i

해설

주어진 복소수의 배열을 $a_1 + b_1i, a_2 + b_2i, a_3 + b_3i, a_4 + b_4i, \dots$ 와 같이 생각한다면 (단, a_k, b_k 는 실수)
수열 $\{a_n\}$ 의 배열은 1, 2, 3, 4, (), ... 이고
수열 $\{b_n\}$ 의 배열은 -2, -4, -8, -16, (), ... 이다.
따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5 - 32i$ 이다.

2. 첫째항이 7, 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 -20은 몇째 항인가?

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \times (-3) \\ &= 7 + (n-1) \times (-3) \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = -3n + 10$$

$$-3n + 10 = -20$$

$$-3n = -30$$

$$n = 10$$

3. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$

4. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 \cdot a_3 \cdot a_8 = 64$ 일 때, a_4 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

$$a_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$a_1 \cdot a_3 \cdot a_8$$

$$= a \times ar^2 \times ar^7 = a^3 r^9$$

$$a^3 r^9 = (ar^3)^3 = 64 = 4^3$$

$$\therefore ar^3 = 4$$

$$\therefore a_4 = 4$$

5. 두 수 1과 64사이에 다섯 개의 수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 를 넣어서 만든 수열이 등비수열을 이룰 때, a_3 의 값은?(단, $a_3 > 0$)

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

주어진 수열이 등비수열을 이루므로

1, a_3 , 64도 등비수열을 이룬다.

$$(a_3)^2 = 1 \cdot 64 \quad \therefore a_3 = 8$$

6. 양수 a, b 에 대하여 세 수 $\log 2, \log a, \log 8$ 이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $a, b, 16$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$2\log a = \log 2 + \log 8$$

$$a^2 = 16, \quad \therefore a = 4$$

$$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore b = 8$$

$$a + b = 4 + 8 = 12$$

7. $4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2989

해설

$$\begin{aligned} 4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 10^3 &= \sum_{k=1}^{10} k^3 - \sum_{k=1}^3 k^3 \\ &= \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 - \left(\frac{3 \cdot 4}{2} \right)^2 \\ &= 3025 - 36 = 2989 \end{aligned}$$

8. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1}$

- ① $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

② $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$

③ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k$

⑤ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k+1}$

해설

제 k 항은 $3 \cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n 이므로
 $3 + 6 + 9 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

9. $\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$ 의 값은?

- ① $\log 45$ ② $\log 50$ ③ $\log 55$ ④ $\log 60$ ⑤ $\log 66$

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k} \\ &= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \cdots + \log \frac{11}{9} + \log \frac{12}{10} \\ &= \log \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{11}{9} \cdot \frac{12}{10} \right) \\ &= \log \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66 \end{aligned}$$

10. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k 의 값을 구하여라. (단, $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5$ 이므로
 $k = 5$

11. $4^{x-1} = a$ 일 때, $\left(\frac{1}{32}\right)^{1-x}$ 을 a 에 대한 식으로 나타낸 것은?

- ① $\sqrt{a}$ ② $a\sqrt[5]{a}$ ③ $\sqrt[5]{a}$ ④ $\sqrt[5]{a^2}$ ⑤ $a^2\sqrt{a}$

해설

$$4^{x-1} = 2^{2(x-1)} = a \text{ 이므로}$$

$$2^{x-1} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{32}\right)^{1-x} &= (2^{-5})^{1-x} = 2^{5(x-1)} \\ &= (2^{x-1})^5 = (a^{\frac{1}{2}})^5 = a^{\frac{5}{2}} = a^2\sqrt{a}\end{aligned}$$

12. $A = \frac{\log_2(\log_2 3)}{\log_2 3}$ 일 때, 3^A 의 값은?

① 1

② 2

③ $\log_3 2$

④ $\log_2 3$

⑤ $3^{\log_2 3}$

해설

$$A = \frac{\log_2(\log_2 3)}{\log_2 3} = \log_3(\log_2 3)$$

$$3^A = 3^{\log_3(\log_2 3)} = \log_2 3$$

$$\therefore 3^A = \log_2 3$$

13. $\log_3 2 = a$ 일 때, $\log_{\sqrt{12}} 9$ 를 a 로 나타내면?

① $\frac{2}{2a+1}$

② $\frac{4}{2a+1}$

③ $\frac{2}{a+1}$

④ $\frac{2}{a+2}$

⑤ $\frac{4}{a+2}$

해설

$$\begin{aligned} & \log_{\sqrt{12}} 9 \\ &= \frac{\log_3 9}{\log_3 \sqrt{12}} = \frac{2}{\frac{1}{2} \log_3 (2^2 \cdot 3)} \\ &= \frac{4}{2(\log_3 2 + 1)} = \frac{4}{2(a+1)} = \frac{2}{a+1} \end{aligned}$$

14. 1이 아닌 양수 p 와 세 양수 x, y, z 에 대하여 $\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z = -3$ 가 성립할 때, xyz 의 값은?

- ㉠ $\frac{1}{p^3}$ ㉡ $\frac{1}{2p}$ ㉢ $\frac{1}{2}$ ㉣ $2p$ ㉤ p^2

해설

$$\begin{aligned} & \log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z \\ &= \log_p x + \frac{2}{2}\log_p y + \frac{3}{3}\log_p z \\ &= \log_p xyz = -3 \\ \therefore xyz &= p^{-3} = \frac{1}{p^3} \end{aligned}$$

15. $\log 4.02 = 0.6042$ 일 때, $\log 4020^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36, 0.042

해설

$$\begin{aligned}\log 4020^{10} &= 10 \log 4020 \\ &= 10 \log (4.02 \times 1000) \\ &= 10(\log 4.02 + \log 1000) \\ &= 10(0.6042 + 3) \\ &= 10 \times 3.6042 = 36.042\end{aligned}$$

16. 등차수열을 이루는 세 수의 합은 12이고 세 수의 합은 12이고 제곱의 합은 66일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d, a, a+d$ 라 하면

$$(a-d) + a + (a+d) = 12 \cdots \textcircled{1}$$

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 66 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립해서 풀면 $a = 4, d = \pm 3$

따라서 주어진 조건을 만족하는 세 수는 1, 4, 7이고 이 중 가장 큰 수는 7이다.

17. 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열일 때, 수열 $\{3a_{n+1} - 2a_n\}$ 은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$a_n = ar^{n-1}$ 이므로

$$\{3a_{n+1} - 2a_n\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$$

$$= (3ar - 2a)r^{n-1} = 12 \cdot 2^{n-1}$$

따라서 $r = 2$ 이고 $3ar - 2a = 12$ 이다.

$$6a - 2a = 12, 4a = 12$$

$$\therefore a = 3$$

18. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100보다 크게 되는가?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} > 100 \text{인}$$

자연수 n 의 최솟값을 구하면 된다.

$$2^n - 1 > \frac{100}{3}$$

$$2^n > \frac{103}{3} \approx 34. \times \times \times$$

$$2^5 = 32, \quad 2^6 = 64 \text{이므로}$$

$$n = 6$$

19. 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

제1행					1				
제2행				3	5	7			
제3행			9	11	13	15	17		
제4행	19	21	23	25	27	29	31		
⋮									

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.
제1군, 제2군, 제3군, ... 각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면
 $\{a_n\} : 1, 3, 9, 19, \dots$
 $\{b_n\} : 2, 6, 10, \dots$
 $\therefore b_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n-2$
 $\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k-2) = 1 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = 2n^2 - 4n + 3$
 $\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$
이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는
 $163 + (5-1) \times 2 = 171$

20. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$ 이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$ 일 때, a_{30} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 727

해설

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= b_n = 2n - 5 \\ \therefore a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 5) \\ &= 2 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} - 5(n-1) \\ &= n^2 - 6n + 7 \\ \therefore a_{30} &= 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727 \end{aligned}$$

21. $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의될 때, a_{15} 의 값은?

- ① $\frac{1}{17}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{29}$ ④ $\frac{1}{31}$ ⑤ $\frac{1}{39}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1} \text{ 에서 양변에 역수를 취하면 } \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{ 이라 두면 } b_{n+1} = b_n + 2, b_1 = 3$$

$$\text{따라서, } b_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2n + 1}$$

$$\therefore a_{15} = \frac{1}{31}$$

22. 다음은 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 $P(n)$ 으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
□ 이라 놓을 수 있다.
 $7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$
 $= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$
 $= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$
 $= 3(7m' + 4^k)$
.....

- ① $7^n - 4^n$ 은 3으로 나누어떨어진다.
② $7^n - 4^n$ 은 7으로 나누어떨어진다.
③ $7^n - 4^n$ 은 n 으로 나누어떨어진다.
④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 7로 나누어떨어진다.
⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 n 으로 나누어떨어진다.

해설

$7^{k+1} - 4^{k+1} = 3(7m' + 4^k)$
로 변형하였으므로
 $7^n - 4^n$ 은 3으로 나누어 떨어진다는
것을 $n = k + 1$ 일 때 증명한 것이다.
∴ ①

23. $x + x^{-1} = 3$ 일 때, $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$

② 3

③ 5

④ $2\sqrt{5}$

⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$$x + x^{-1} = 3 \text{ 이므로}$$

$$(x + x^{-1})^3 = 27$$

$$x^3 + x^{-3} + 3(x + x^{-1}) = 27$$

$$x^3 + x^{-3} = 27 - 3 \cdot 3 = 18$$

$$(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}})^2 = x^3 + x^{-3} + 2 = 20$$

$$\therefore x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{5} \quad (\because x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} > 0)$$

24. 두 양수 A , $\frac{1}{A}$ 의 상용로그의 소수 부분을 각각 α , β 라고 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log A$ 이 정수 부분을 n 이라고 하면 $\log A = \alpha + n$

$$\log \frac{1}{A} = \log A^{-1} = -\log A$$

$$= -(n + \alpha) = -n - \alpha$$

$$= (-n - 1) + (1 - \alpha)$$

따라서 $\log \frac{1}{A}$ 의 소수 부분은 $1 - \alpha$ 이므로 $\beta = 1 - \alpha$

$$\therefore \alpha + \beta = \alpha + (1 - \alpha) = 1$$

25. 데시벨(dB)은 소리의 세기를 표준음의 세기 10^{-12}W/m^2 와 비교해서 나타낸다. 소리의 세기 $x\text{W/m}^2$ 를 ydB로 나타내는 식은 다음과 같다.

$$y = 120 + 10 \log x$$

요란한 음악의 세기가 130dB 일 때, 이것은 표준음의 세기의 몇 배인가?

- ① 10^9 배

② 10^{10} 배

③ 10^{11} 배

④ 10^{12} 배

⑤ 10^{13} 배

해설

요란한 음악의 세기가 130dB 이므로 이 소리의 세기를 a 라 하면
 $130 = 120 + 10 \log a$
 $10 = 10 \log a$
 $1 = \log a$
 $\therefore a = 10$
따라서 표준음의 세기의 $\frac{10}{10^{-12}} = 10^{1-(-12)} = 10^{13}$ (배)