1. 다음 ( ) 안에 알맞은 것은?

$1-2i,\ 2-4i,\ 3-8i,\ 4-16i,\ (\quad),\cdots$

① $5-18i$ ② $5-20i$ ③ $5-24i$

④ $5-32i$ ⑤ $5-64i$

해설

주어진 복소수의 배열을

$a_1+b_1i,\ a_2+b_2i,\ a_3+b_3i,\ a_4+b_4i,\cdots$ 와 같이 생각한다면

(단, $a_k,\ b_k$는 실수)

수열 $\{a_n\}$의 배열은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ (\quad),\ \cdots$ 이고

수열 $\{b_n\}$의 배열은 $-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ (\quad),\ \cdots$ 이다.

따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5-32i$이다.

2. 첫째항이 7, 공차가 -3 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 -20은 몇째 항인가?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \times (-3) \\ &= 7 + (n-1) \times (-3) \end{aligned}$$

$\therefore a_n = -3n + 10$

$-3n + 10 = -20$

$-3n = -30$

$n = 10$

3. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$

4. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \cdot a_3 \cdot a_8 = 64$일 때, a_4의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$a_n = a \cdot r^{n-1}$

$a_1 \cdot a_3 \cdot a_8$

$= a \times ar^2 \times ar^7 = a^3 r^9$

$a^3 r^9 = (ar^3)^3 = 64 = 4^3$

$\therefore ar^3 = 4$

$\therefore a_4 = 4$

5. 두 수 1과 64사이에 다섯 개의 수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5를 넣어서 만든 수열이 등비수열을 이룰 때, a_3의 값은?(단, $a_3 > 0$)

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

주어진 수열이 등비수열을 이루므로
1, a_3, 64도 등비수열을 이룬다.
$(a_3)^2 = 1 \cdot 64 \quad \therefore\ a_3 = 8$

6. 양수 a, b에 대하여 세 수 $\log 2$, $\log a$, $\log 8$이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, 16이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$2\log a = \log 2 + \log 8$

$a^2 = 16, \quad \therefore \ a = 4$

$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore \ b = 8$

$a + b = 4 + 8 = 12$

7. $4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2989

해설

$4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 10^3 = \sum_{k=1}^{10} k^3 - \sum_{k=1}^{3} k^3$

$= \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 - \left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right)^2$

$= 3025 - 36 = 2989$

8. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$$3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1}$$

① $\sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 2^{k-1}$ ② $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$ ③ $\sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 2^{k}$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k}$ ⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 2^{k+1}$

해설

제 k항은 $3 \cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n이므로

$3 + 6 + 9 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 2^{k-1}$

9. $\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$ ② $\log 50$ ③ $\log 55$ ④ $\log 60$ ⑤ $\log 66$

해설

$$\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$$
$$= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \cdots + \log \frac{11}{9} + \log \frac{12}{10}$$
$$= \log \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{11}{9} \cdot \frac{12}{10} \right)$$
$$= \log \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66$$

10. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k의 값을 구하여라.(단. $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5$ 이므로
$k = 5$

11. $4^{x-1}=a$일 때, $\left(\frac{1}{32}\right)^{1-x}$을 a에 대한 식으로 나타낸 것은?

① $\sqrt{a}$ ② $a\sqrt[5]{a}$ ③ $\sqrt[5]{a}$ ④ $\sqrt[5]{a^2}$ ⑤ $a^2\sqrt{a}$

해설

$4^{x-1}=2^{2(x-1)}=a$이므로

$2^{x-1}=a^{\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{1-x}=(2^{-5})^{1-x}=2^{5(x-1)}$$
$$=(2^{x-1})^5=(a^{\frac{1}{2}})^5=a^{\frac{5}{2}}=a^2\sqrt{a}$$

12. $A = \dfrac{\log_2(\log_2 3)}{\log_2 3}$ 일 때, 3^A 의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\log_3 2$ ④ $\log_2 3$ ⑤ $3^{\log_2 3}$

해설

$$A = \frac{\log_2(\log_2 3)}{\log_2 3} = \log_3(\log_2 3)$$

$$3^A = 3^{\log_3(\log_2 3)} = \log_2 3$$

$$\therefore\ 3^A = \log_2 3$$

13. $\log_3 2 = a$일 때, $\log_{\sqrt{12}} 9$를 a로 나타내면?

① $\dfrac{2}{2a+1}$ ② $\dfrac{4}{2a+1}$ ③ $\dfrac{2}{a+1}$

④ $\dfrac{2}{a+2}$ ⑤ $\dfrac{4}{a+2}$

해설

$\log_{\sqrt{12}} 9$

$$= \frac{\log_3 9}{\log_3 \sqrt{12}} = \frac{2}{\frac{1}{2}\log_3(2^2 \cdot 3)}$$

$$= \frac{4}{2(\log_3 2 + 1)} = \frac{4}{2(a+1)} = \frac{2}{a+1}$$

14. 1이 아닌 양수 p와 세 양수 x, y, z에 대하여 $\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z = -3$가 성립할 때, xyz의 값은?

① $\dfrac{1}{p^3}$ ② $\dfrac{1}{2p}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $2p$ ⑤ p^2

해설

$\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z$

$= \log_p x + \dfrac{2}{2}\log_p y + \dfrac{3}{3}\log_p z$

$= \log_p xyz = -3$

$\therefore xyz = p^{-3} = \dfrac{1}{p^3}$

15. $\log 4.02 = 0.6042$ 일 때, $\log 4020^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36, 0.042

해설

$\log 4020^{10} = 10 \log 4020$

$= 10 \log(4.02 \times 1000)$

$= 10(\log 4.02 + \log 1000)$

$= 10(0.6042 + 3)$

$= 10 \times 3.6042 = 36.042$

16. 등차수열을 이루는 세 수의 합은 12이고 세 수의 합은 12이고 제곱의 합은 66일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하면
$(a-d)+a+(a+d)=12\cdots$㉠
$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=66\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립해서 풀면 $a=4,\ d=\pm 3$
따라서 주어진 조건을 만족하는 세 수는 1, 4, 7이고 이 중 가장 큰 수는 7이다.

17. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, 수열 $\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\}$은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_n = ar^{n-1}$이므로
$\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$
$= (3ar-2a)r^{n-1} = 12\cdot 2^{n-1}$
따라서 $r=2$이고 $3ar-2a=12$이다.
$6a-2a=12,\ 4a=12$
$\therefore\ a=3$

18. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100보다 크게 되는가?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$S_n = \dfrac{3(2^n - 1)}{2-1} > 100$ 인

자연수 n의 최솟값을 구하면 된다.

$2^n - 1 > \dfrac{100}{3}$

$2^n > \dfrac{103}{3} \fallingdotseq 34.\times\times\times$

$2^5 = 32,\ 2^6 = 64$ 이므로

$n = 6$

19. 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

제1행				1			
제2행			3	5	7		
제3행		9	11	13	15	17	
제4행	19	21	23	25	27	29	31
$\vdots$				$\vdots$			

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$\underset{\text{제1군}}{\underline{(1)}}, \underset{\text{제2군}}{\underline{(3,\ 5,\ 7)}}, \underset{\text{제3군}}{\underline{(9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17)}}, \cdots$ 각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 9,\ 19, \cdots$

$\{b_n\} : 2,\ 6,\ 10, \cdots$

$\therefore b_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$

$\therefore a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-2) = 1+4\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}-2(n-1) = 2n^2-4n+3$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$

이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는

$163 + (5-1) \times 2 = 171$

20. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$일 때, a_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 727

해설

$a_{n+1} - a_n = b_n = 2n - 5$

$\therefore a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k - 5)$

$= 2 + 2 \times \dfrac{n(n-1)}{2} - 5(n-1)$

$= n^2 - 6n + 7$

$\therefore a_{30} = 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727$

21. $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의될 때, a_{15}의 값은?

① $\frac{1}{17}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{29}$ ④ $\frac{1}{31}$ ⑤ $\frac{1}{39}$

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$ 에서 양변에 역수를 취하면 $\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$

$\frac{1}{a_n} = b_n$ 이라 두면 $b_{n+1} = b_n + 2,\ b_1 = 3$

따라서, $b_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$

$\therefore\ a_n = \frac{1}{2n+1}$

$\therefore\ a_{15} = \frac{1}{31}$

22. 다음은 자연수 n에 대한 명제 P(n)이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 P(n)으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
$\boxed{}$이라 놓을 수 있다.
$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$
$= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$
$= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$
$= 3(7m' + 4^k)$
$\cdots\cdots$

① $7^n - 4^n$은 3으로 나누어떨어진다.

② $7^n - 4^n$은 7으로 나누어떨어진다.

③ $7^n - 4^n$은 n으로 나누어떨어진다.

④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 7로 나누어떨어진다.

⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 n으로 나누어떨어진다.

해설

$7^{k+1} - 4^{k+1} = 3(7m' + 4^k)$
로 변형하였으므로
$7^n - 4^n$은 3으로 나누어 떨어진다는
것을 $n = k + 1$일 때 증명한 것이다.
$\therefore$ ①

23. $x + x^{-1} = 3$ 일 때, $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ 5 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$x + x^{-1} = 3$ 이므로

$(x + x^{-1})^3 = 27$

$x^3 + x^{-3} + 3(x + x^{-1}) = 27$

$x^3 + x^{-3} = 27 - 3 \cdot 3 = 18$

$(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}})^2 = x^3 + x^{-3} + 2 = 20$

$\therefore x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{5}$ $(\because \ x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} > 0)$

24. 두 양수 A, $\dfrac{1}{A}$의 상용로그의 소수 부분을 각각 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log A$이 정수 부분을 n이라고 하면 $\log A = \alpha + n$

$\log \dfrac{1}{A} = \log A^{-1} = -\log A$

$= -(n+\alpha) = -n-\alpha$

$= (-n-1)+(1-\alpha)$

따라서 $\log \dfrac{1}{A}$의 소수 부분은 $1-\alpha$이므로 $\beta = 1-\alpha$

$\therefore \alpha+\beta = \alpha+(1-\alpha) = 1$

25. 데시벨(dB)은 소리의 세기를 표준음의 세기 $10^{-12}\mathrm{W/m^2}$와 비교해서 나타낸다. 소리의 세기 $x\mathrm{W/m^2}$를 ydB로 나타내는 식은 다음과 같다.

$$y = 120 + 10\log x$$

요란한 음악의 세기가 130dB일 때, 이것은 표준음의 세기의 몇 배인가?

① 10^9배　② 10^{10}배　③ 10^{11}배
④ 10^{12}배　⑤ 10^{13}배

해설

요란한 음악의 세기가 130dB이므로 이 소리의 세기를 a라 하면

$130 = 120 + 10\log a$

$10 = 10\log a$

$1 = \log a$

$\therefore\ a = 10$

따라서 표준음의 세기의 $\dfrac{10}{10^{-12}} = 10^{1-(-12)} = 10^{13}$(배)