1. 두 수 48과 2사이에 10개의 수 a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}을 넣어 12개의 수 48, a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}, 2가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은?

① 200　② 250　③ 300　④ 350　⑤ 400

해설

첫째항이 48이고 제 12항이 2인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은 $\frac{12(48+2)}{2}=300$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=300-(48+2)=300-50=250$

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5 ② 8 ③ 11 ④ 13 ⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

3. 조화수열 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\cdots$ 의 일반항은?

① $2n-1$　② $2n+1$　③ $\frac{3}{n}$
④ $\frac{6}{n}$　⑤ $\frac{1}{2n+1}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$이라고 하면,
$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.
$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = 3,\ 5,\ 7,\ 9, \cdots$
등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $2n+1$
따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $\frac{1}{2n+1}$

4. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $n \geq 3$일 때, $S_n = 94$를 만족하는 d의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$S_n = 94$에서 $\dfrac{n\{2+(n-1)d\}}{2} = 94$

$n\{2+(n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$

그런데 $n \geq 3$이므로 n의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188 이다.

$n = 4$일때, $2+(4-1)d = 47$ $\quad \therefore\ d = 15$

$n = 47$일때, $2+(47-1)d = 4$ $\quad \therefore\ d = \dfrac{2}{23}$

$n = 94$일때, $2+(94-1)d = 2$ $\quad \therefore\ d = 0$

$n = 188$일때, $2+(188-1)d = 1$ $\quad \therefore\ d = -\dfrac{1}{187}$

이 중에서 d가 자연수가 되는 것은 $n = 4$이므로 $d = 15$

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 72$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{24}$의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 432

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 4a + 46d = 72$

$2a + 23d = 36$

$$\therefore\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{24} = \frac{24(2a+23d)}{2} = 12 \times 36 = 432$$

6. 제 3항이 -12이고 제 6항이 -96인 등비수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$ ② $(-3) \cdot 2^{n-1}$ ③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$ ⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = -12$

$a_6 = ar^5 = -96$

$r^3 = 8$

$\therefore r = 2$

$ar^2 = 4a = -12 \quad \therefore a = -3$

$\therefore a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$

7. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$

$= \sum_{k=1}^{10} a_k + 2\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$

$= 3 + 2 \times 5 - 10 = 3$

8. $\sum_{l=1}^{10} \left\{ \sum_{k=1}^{5} (k+l) \right\}$ 의 값은?

① 400　　② 425　　③ 450　　④ 475　　⑤ 500

해설

$\sum_{l=1}^{5}(k+l) = \sum_{k=1}^{5} k + \sum_{k=1}^{5} l = \sum_{k=1}^{5} k + 5l$

$\therefore$ (준 식) $= \sum_{l=1}^{10}(5l+15) = 5\sum_{l=1}^{10} l + 150$

$= 5 \times 55 + 150 = 425$

9. $\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = a\sqrt{2}+b$일 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$= -\left\{(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\right\}$

$+\left\{(\sqrt{49}-\sqrt{50})\right\}$

$= -(1-\sqrt{50}) = 5\sqrt{2}-1$

따라서, $a=5,\ b=-1$에서 $a+b=4$

10. 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

> (i)$P(\boxed{(가)})$이 참이다.
> (ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{(가)})$도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k ② 0, $k+1$ ③ 0, $k-1$

④ 1, k ⑤ 1, $k+1$

해설

명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{1})$이 참이다.

(ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{k+1})$도 참이다.

11. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt[3]{-0.027} = -3$

② $\sqrt{\sqrt[3]{81}} = 3$

③ $(\sqrt[6]{9})^3 = 3$

④ $\sqrt[5]{9} \times \sqrt[5]{81} = 3$

⑤ $\sqrt[4]{81} \div \sqrt[4]{27} = 3$

해설

① 0.3

② $3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$

③ $\left\{(3^2)^{\frac{1}{6}}\right\}^3 = 3^{2\times\frac{1}{6}\times3} = 3$

④ $3^{\frac{2}{5}+\frac{4}{5}} = 3^{\frac{6}{5}}$

⑤ $3^1 \div 3^{\frac{3}{4}} = 3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

12. $a > 0$일 때, $\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3}$을 간단히 하면?

① 2 ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt[4]{a^3}$ ④ $\sqrt[4]{a^3}$ ⑤ $\sqrt[4]{4a^3}$

해설

$$\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3} = \left(2^4 a^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \div a^{\frac{3}{8}} = 2a^{\frac{3}{8}-\frac{3}{8}} = 2a^0 = 2$$

13. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{3}} \div a^{\frac{3}{2}}$ 을 간단히 하면?

① $a\sqrt[3]{a}$　② $a\sqrt{a}$　③ $\frac{1}{a\sqrt[3]{a^2}}$

④ $\frac{1}{a\sqrt{a}}$　⑤ $\frac{1}{a\sqrt[3]{a}}$

해설

$a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}} = a^{\frac{3-2-9}{6}}$

$= a^{\frac{-8}{6}} = a^{\frac{-4}{3}} = \frac{1}{a\sqrt[3]{a}}$

14. $\log_2(\log_8 x) = -1$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{2}$

해설

$\log_2(\log_8 x) = -1$ 에서

$\log_8 x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$\therefore x = 8^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

15. $\log_3 10$ 의 소수부분을 α 라 할 때, 3^α 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{100}{9}$ ⑤ $\frac{100}{3}$

해설

$\log_3 10 = 2 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$ 이므로 $\alpha = \log_3 10 - 2 = \log_3 \frac{10}{9}$ 이 된다.

따라서 $3^\alpha = 3^{\log_3 \frac{10}{9}} = \frac{10}{9}$ 이다.

16. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_2 = 11,\ a_3 + a_4 + a_5 = 54$가 성립할 때, a_{10}의 값은?

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

해설

공차를 d라 하면 $a_1 + a_2 = 11$에서 $a_1 + \{a_1 + (2-1)d\} = 11$

$\therefore\ 2a_1 + d = 11 \cdots$ ㉠

$a_3 + a_4 + a_5 = 54$에서 $(a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 54$

$\therefore\ a_1 + 3d = 18 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1 = 3,\ d = 5$

$\therefore\ a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9 \times 5 = 48$

17. 첫째항이 100이고, 공차가 −3인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34번째 항

해설

$a_n = 100 + (n-1)\cdot(-3)$

$= -3n + 103 > 0$

$n < 34.333\cdots$

$\therefore n = 34$일 때 최대

18. 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_3 = \frac{5}{6}$, $a_2 a_3 a_4 = \frac{1}{8}$일 때, 첫째항의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1 + a_3 = \frac{5}{6}$에서, $a_1 + a_1 r^2 = \frac{5}{6}$

$a_2 a_3 a_4 = \frac{1}{8}$에서 $(a_1 r^2)^3 = \frac{1}{8}$

즉, $a_3 = a_1 r^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore\ a_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

19. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^1$
(10년후 원리합계)
$= 1000$만$\times 1.04^{10}$
$= 1000$만 $\times 1.48$
$= 1480$만 (원)

20. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$
$= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\}$
$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
$n = 1$ 일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$
따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이므로
$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$
$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$
$= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$
$= 440 - 30 - 15 = 395$

21. $a_{n+1} - a_n = 2(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\dfrac{2^{a_2} + 2^{a_4}}{2^{a_1} + 2^{a_3}}$ 의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$

즉, $a_2 = a_1 + 2,\ a_3 = a_1 + 4,\ a_4 = a_1 + 6$

$\therefore \dfrac{2^{a_2} + 2^{a_4}}{2^{a_1} + 2^{a_3}} = \dfrac{2^{a_1+2} + 2^{a_1+6}}{2^{a_1} + 2^{a_1+4}}$

$= \dfrac{2^{a_1+2}(1+2^4)}{2^{a_1}(1+2^4)} = \dfrac{2^2 \cdot 2^{a_1}(1+2^4)}{2^{a_1}(1+2^4)} = 2^2 = 4$

22. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족한다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = n^2 a_n \cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}\ (n \geq 2) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} a_n\ (n \geq 1)$

$\therefore a_n = a_1 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{3}{5} \times \cdots \times \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-1}{n+1}$ $\therefore\ a_{10} = 110 \times$

$= 110 \times \dfrac{2}{n(n+1)}$

$\dfrac{2}{110} = 2$

23. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은?

① $\dfrac{1}{n}$ ② $\dfrac{1}{n+1}$ ③ $\dfrac{1}{n+2}$ ④ $\dfrac{2}{n}$ ⑤ $\dfrac{2}{n+1}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ 의 양변을 역수로 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 1$, 즉 $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 1$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1} = 1$ 이고, 공차가 1 인 등차 수열이므로

$\dfrac{1}{a_n} = 1 + (n-1)\cdot 1 = n \quad \therefore a_n = \dfrac{1}{n}$

24. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{(k-2)^2}(kx^2+kx+1)$이 의미를 갖기 위한 정수 k의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\log_a b$에서 $a > 0,\ a \neq 1, b > 0$
(i) $(k-2)^2 > 0 \rightarrow k \neq 2$
(ii) $(k-2)^2 \neq 1 \rightarrow k \neq 3,\ 1$
(ii) $kx^2 + kx + 1 > 0$
$\rightarrow k = 0$ 또는 $k > 0$일때, $k^2 - 4k < 0$
$\therefore\ 0 < k < 4$
따라서 (i), (ii), (iii)를 만족하는 정수 k는 0

25. $\log_2 3 = a,\ \log_3 7 = b$ 일 때, $\log_{36} 42$를 $a,\ b$로 나타내면?

① $\dfrac{1+a+ab}{1+a}$ ② $\dfrac{1+a+2ab}{1+a}$ ③ $\dfrac{1+2a+ab}{2+a}$

④ $\dfrac{1+a+ab}{2(1+a)}$ ⑤ $\dfrac{2+a+2ab}{2(1+a)}$

해설

로그의 밑을 3으로 통일시키면

$$\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{a},\ \ \log_3 7 = b$$

$$\log_{36} 42 = \frac{\log_3 42}{\log_3 36} = \frac{\log_3(2\times 3\times 7)}{\log_3(2^2\times 3^2)}$$

$$= \frac{\log_3 2 + 1 + \log_3 7}{2\log_3 2 + 2}$$

$$\frac{\frac{1}{a}+1+b}{2\cdot\frac{1}{a}+2} = \frac{1+a+ab}{2(1+a)}$$