1. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $k^2x+1>2kx+k$가 성립할 때, k값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$k^2x+1>2kx+k$에서

$(k^2-2k)x>k-1$,

$k(k-2)x>k-1$

해가 모든 실수이므로

$k(k-2)=0,\ k-1<0$ 이어야 한다.

$\therefore\ k=0$

2. 이차부등식 $ax^2+4x+a<0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a<-2$ ② $a<0$ ③ $a<2$

④ $a<4$ ⑤ $a<8$

해설

$ax^2+4x+a<0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립하려면

i) $a<0$

ii) $ax^2+4x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=2^2-a^2<0$$

$a^2-4>0, (a+2)(a-2)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

i), ii)의 공통 범위를 구하면 $a<-2$

3. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $-2 < x < 1$일 때 부등식 $cx^2 - bx - a > 0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로 $a < 0$
해가 $-2 < x < 1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1) < 0$,
즉 $x^2 + x - 2 < 0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2 + ax - 2a > 0$ 이 부등식이
$ax^2 + bx + c > 0$ 과 같으므로
$b = a, c = -2a \cdots$㈎
㈎를 $cx^2 - bx - a > 0$ 에 대입하면
$-2ax^2 - ax - a > 0$, $2x^2 + x + 1 > 0 (\because -a > 0)$
이 때 방정식 $2x^2 + x + 1 = 0$ 의 판별식
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로
$2x^2 + x + 1 > 0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 의 9개이다.

4. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ ③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$ ⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2+7x-10 \geq 0$

$x^2-7x+10 \leq 0$

$(x-2)(x-5) \leq 0$

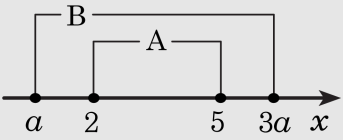
$2 \leq x \leq 5$

$x^2-4ax+3a^2 \leq 0$

$(x-a)(x-3a) \leq 0$

$a \leq x \leq 3a(\because a > 0)$

㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

5. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-1 < x+1 < x^2-3x+1 \\ x+3 > -x+2 \end{cases}$ 의 해가 $a < x < b$ 일 때, $2a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{cases} \underbrace{x^2-1 < x+1}_{\text{(가)}} \underbrace{< x^2-3x+1}_{\text{(나)}} \\ x+3 > -x+2 \cdots \text{(다)} \end{cases}$$

(가)에서 $x^2-x-2<0$, $(x-2)(x+1)<0$

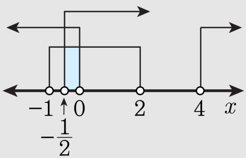
$\therefore -1<x<2$

(나)에서 $x^2-4x>0$, $x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$

(다)에서 $2x>-1$

$\therefore x>-\frac{1}{2}$



$-\frac{1}{2}<x<0$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$ 이므로 $2a+b=-1+0=-1$

6. $|x+1|<4,\ 2<y<4$일 때, $\dfrac{x}{y}$의 범위는?

① $-\dfrac{5}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{4}$ ② $-\dfrac{3}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{5}{2}$ ③ $-\dfrac{5}{4}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{4}$

④ $-\dfrac{5}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{2}$ ⑤ $-\dfrac{3}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{5}{4}$

해설

$|x+1|<4$

$\Rightarrow \quad -4<x+1<4$

$\Rightarrow \quad -5<x<3, \quad 2<y<4$

취할 수 있는 $\dfrac{x}{y}$ 의 최댓값 : $\dfrac{3}{2}$

취할 수 있는 $\dfrac{x}{y}$ 의 최솟값 : $-\dfrac{5}{2}$

$\therefore \quad -\dfrac{5}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{2}$

7. 부등식 $ax^2+(a+1)x+a>0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a>-1$ ② $a>-\frac{1}{2}$ ③ $a>-\frac{1}{3}$
④ $a>-\frac{1}{4}$ ⑤ $a>-\frac{1}{5}$

해설

$ax^2+(a+1)x+a>0$에서

i) $a=0$이면 $x>0$
$\therefore$ 실수해가 존재한다.
ii) $a>0$ 이면 $y=ax^2+(a+1)x+a$의 그래프가 아래로 볼록한 모양이므로
$ax^2+(a+1)x+a>0$을 만족시키는 x값이 반드시 존재한다.
iii) $a<0$이면 $D=(a+1)^2-4a^2>0$
$3a^2-2a-1<0$, $(3a+1)(a-1)<0$
$\therefore\ -\frac{1}{3}<a<1$, $a<0$ 이므로 $-\frac{1}{3}<a<0$

i), ii), iii) 에서 $a>-\frac{1}{3}$

8. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=2$

$f(2x-3)=0$에서 $2x-3=\alpha$, $2x-3=\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

9. $-2 \le x \le 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2-6x \ge a^2-6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \le a \le 0$ ② $-2 \le a \le 2$ ③ $0 \le a \le 4$

④ $2 \le a \le 4$ ⑤ $4 \le a \le 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고
$-2 \le x \le 2$ 에서
$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.
$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로
$-2 \le x \le 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,
$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \ge 0$
$a^2 - 6a + 8 \le 0 \quad \Rightarrow \quad (a-2)(a-4) \le 0$
$\therefore \; 2 \le a \le 4$

10. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, 방정식 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$, $x-1+x>x+1$ $\therefore\ x>2$ ······㉠

한편, 둔각삼각형이 되려면

$(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4$······㉡

㉠,㉡에서 $2<x<4$

$\therefore\ a=2,\ b=4$

따라서 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$$

11. x보다 크지 않은 최대의 정수와 x보다 작지 않은 최소의 정수의 합이 5일 때, x는?

① $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ ② $\{x|2 \leq x \leq 3\}$ ③ $\{x|2 \leq x < 3\}$

④ $\{x|2 < x \leq 3\}$ ⑤ $\{x|2 < x < 3\}$

해설

$[x]$를 x보다 크지 않는 최대의 정수,

$< x >$를 x보다 작지 않은 최대의 정수라 하자.

$x = n$ (n 은 정수) 일 때,

$[x] = n,\ < x >= n$이므로 $n + n = 5,\ n = \dfrac{5}{2}$

$\therefore$ 적당하지 않다.

$n < x < n + 1$ (n 은 정수) 일 때,

$[x] = n,\ < x >= n + 1$이므로 $n + n + 1 = 5$

$\therefore n = 2$

$\therefore 2 < x < 3$

12. 이차방정식 $x^2+2kx+k=0$의 두 근이 모두 -1과 1사이에 있기 위한 k값의 범위가 $a<k\le b$라 할 때, ab의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$D/4=k^2-k\ge 0, k(k-1)\ge 0,\ \therefore\ k\le 0,\quad k\ge 1$

$f(x)=x^2+2kx+k$라 하면

$f(-1)=1-k>0$

$\therefore\ k<1$

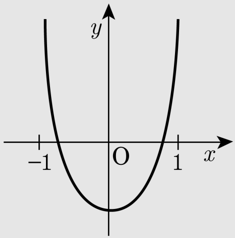
$f(1)=1+3k>0\ \therefore\ k>-\frac{1}{3}$

대칭축 $x=-k$ 이므로 $-1<-k<1$

$\therefore\ -1<k<1$

$\therefore -\frac{1}{3}<k\le 0$

$\therefore\ ab=0$



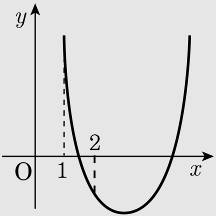
13. 이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 두 근 중 한 근만이 $x^2-3x+2=0$ 의 두근 사이에 존재할 때, 실수 k의 범위는?

① $2<k<4$ ② $1<k<6$ ③ $5<k<8$

④ $5<k<12$ ⑤ $8<k<12$

해설

$f(x)=x^2-6x+k$ 에서 그래프의 중심축이 $x=3$이므로 다음 그림과 같은 형태로 그래프가 그려질 때 주어진 조건을 만족한다.



$f(1)=k-5>0,\ k>5$

$f(2)=k-8<0,\ k<8$

$\therefore\ 5<k<8$

14. $n-\frac{1}{2} \le x < n+\frac{1}{2}$ (단, n은 정수) 인 실수 x에 대하여 $\{x\} = n$으로 나타낼 때, 방정식 $\left\{x^2 - x - \frac{1}{2}\right\} = 3x+1$의 근을 α, β라 하자. 이때, $9\alpha\beta$의 값을 구하면?

① 13 ② -13 ③ 15 ④ -15 ⑤ 17

해설

$3x+1$은 정수이므로

$$(3x+1)-\frac{1}{2} \le x^2 - x - \frac{1}{2} < (3x+1)+\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 5 \le x^2 - 4x + 4 < 6$

$\therefore\ 5 \le (x-2)^2 < 6$

이때, $3x+1$이 정수이므로 $3x$도 정수,

$3x = k$(k는 정수)라 하면 $x = \frac{k}{3}$

$$\therefore\ 5 \le \left(\frac{k-6}{3}\right)^2 < 6$$

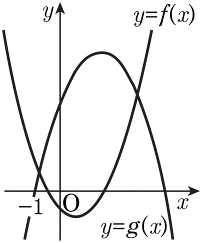
$\therefore\ 45 \le (k-6)^2 < 54 \quad \therefore\ k = -1,\ 13$

$k=-1$일 때 $x = -\frac{1}{3}$,

$k=13$일 때 $x = \frac{13}{3}$

$\therefore\ 9\alpha\beta = -13$

15. 이차항의 계수가 각각 1, -1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음의 그림과 같다. 부등식 $f(x)-g(x) \le 0$의 해가 $-1 \le x \le 3$이고 $f(2)=1$일 때, $g(1)$의 값은?



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y=f(x)$의 y절편이 -1이므로 $f(x)=x^2+ax-1$로 놓을 수 있다.

$f(2)=2a+3=1$에서 $a=-1$

$\therefore f(x)=x^2-x-1$

$g(x)=-x^2+bx+c$로 놓으면 $f(x)-g(x) \le 0$의 해가 $-1 \le x \le 3$이므로

$f(x)-g(x)=2x^2-(1+b)x-1-c=2(x+1)(x-3)=2x^2-4x-6$

따라서, $1+b=4$, $-1-c=-6$에서

$b=3$, $c=5$

$\therefore g(x)=-x^2+3x+5$

$\therefore g(1)=7$