1. 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 3$
② $x^2 + y^2 = 1$
③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$
④ $x^2 + y^2 = 3^2$
⑤ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$

해설

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \Rightarrow \quad \therefore\ x^2 + y^2 = 9$

2. 원 $x^2+y^2-10x-2y+1=0$의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$반지름의 길이를 r라 할 때, $a+b+r$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
$(x^2-10x+25)+(y^2-2y+1)=25$
$\therefore (x-5)^2+(y-1)^2=5^2$
따라서 중심의 좌표는 $(a,\ b)=(5,\ 1)$
반지름의 길이는 $r=5$이므로
$a+b+r=5+1+5=11$

3. 세 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ -1)$, $(3,\ 2)$를 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$이라 할 때 $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을
$x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+C=0 \cdots\cdots$ ㉡이라 하면
㉡는 점 $(1,1)$, $(2,-1)$, $(3,\ 2)$를 지나므로
$1+1+\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0,\ 4+1+2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$,
$9+4+3\mathrm{A}+2\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$
$\therefore\ \mathrm{A}=-5,\ \mathrm{B}=-1,\ \mathrm{C}=4$
$\therefore\ x^2+y^2-5x-y+4=0$
$\therefore\ \mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}=20$

4. 평행이동 $T : (x,\ y) \rightarrow (x+3,\ y+2)$ 에 의하여 점 $(-1,\ 3)$ 이 옮겨지는 점의 좌표를 구하면?

① $(1,\ 3)$ ② $(4,\ 6)$ ③ $(2,\ 5)$ ④ $(3,\ 9)$ ⑤ $(5,\ 6)$

해설

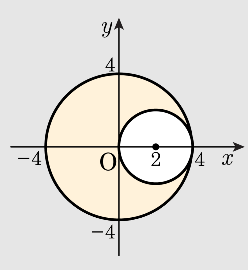
평행이동 T 는 x 축의 방향으로 3 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 옮기는 것이다.
구하는 점의 좌표는 $(-1+3,\ 3+2)$,
즉 $(2,\ 5)$

5. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2 \le 16 \\ (x-2)^2+y^2 \ge 4 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 넓이는?

① 9π ② 10π ③ 12π ④ 14π ⑤ 20π

해설

$x^2+y^2 \le 16$ 은 중심이 원점이고 반지름이 4인 원의 내부이고,
$(x-2)^2+y^2 \ge 4$ 는 중심이 $(2,\ 0)$ 이고 반지름이 2인 원의 외부이다.
동시에 만족하는 영역을 그림으로 나타내면 다음과 같다. 따라서 구하는 영역의 넓이는
$\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 2^2 = 12\pi$

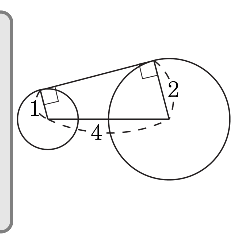


6. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{15}$　③ 0　④ $2\sqrt{5}$　⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의 길이를 구하면
$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ 이다.



7. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

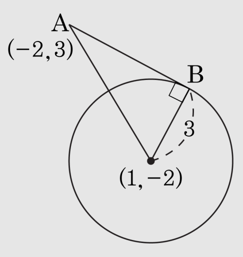
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{AB} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2} = 5$



8. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x \pm \sqrt{5}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$ ③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$
④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$ ⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설
구하는 접선의 방정식은
$y = 2x \pm 3\sqrt{1 + 2^2} \quad \leftarrow \quad m = 2, r = 3$
$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$

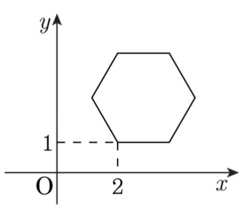
9. 원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=1$
② $(x-2)^2+(y+1)^2=1$
③ $(x+2)^2+(y-1)^2=1$
④ $x^2+(y+2)^2=1$
⑤ $(x-2)^2+y^2=1$

해설

$x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 에서
$(x-2)^2+(y-1)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠을 y 축에 대하여 대칭이동하면
$(x+2)^2+(y-1)^2=1 \cdots\cdots$ ㉡
㉡을 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
$x^2+(y-1)^2=1 \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
$x^2+(y+2)^2=1$

10. 다음은 한 변의 길이가 2 인 정육각형을 직교좌표평면 위에 올려놓은 것이다. 여섯 개의 꼭짓점 중 부등식 $x+5y \geq 10$ 의 영역 안에 있는 점의 개수를 구하여라. (정육각형의 가장 아래 변은 x 축에 평행하고, $\sqrt{3}=1.7$ 로 한다)

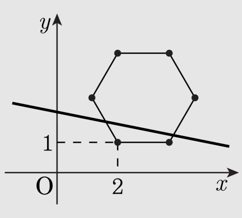


▶ 답 : ______개

▷ 정답 : 4개

해설

직선 $x+5y=10$ 은 x 절편이 10, y 절편이 2 이므로 아래 그림과 같이 그릴 수 있다.
따라서 직선의 윗부분에 해당하는 꼭짓점의 개수는 4 (개) 이다.

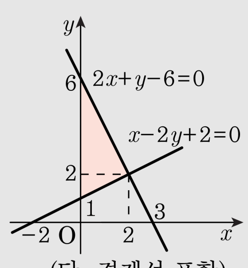


11. 세 부등식 $x \geq 0, x - 2y + 2 \leq 0, 2x + y - 6 \leq 0$을 동시에 만족하는 영역의 넓이는?

① 5　② $\frac{11}{2}$　③ 6　④ $\frac{13}{2}$　⑤ 7

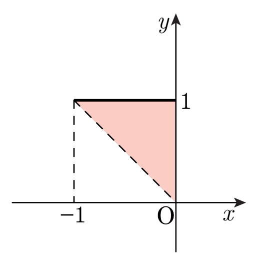
해설

주어진 세 부등식을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분이다.
이 때, 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점은
점 $(2,\ 2)$이므로 어두운 부분의 넓이는
$\frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$



(단, 경계선 포함)

12. x, y 의 영역이 다음 그림과 같이 주어졌을 때, x^2+y^2 의 값의 최댓값은?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$

④ 2 ⑤ 3

해설

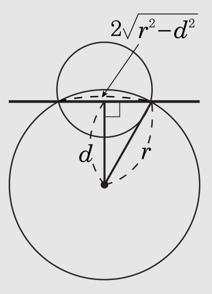
$x^2+y^2=k$ 라 하면,
k 값은 점 $(0,\ 0)$ 을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 제곱한 것이므로
점 $(-1,\ 1)$ 을 지날 때, k 값이 최대이다.
따라서 k 의 값의 최대값은 $(-1)^2+1^2=2$

13. 좌표평면 위의 두 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$, $(x-a)^2+y^2=4$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점 사이의 거리가 최대가 되도록 하는 실수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}$　　② $-\frac{1}{2}$　　③ -1　　④ $-\frac{3}{2}$　　⑤ -2

해설

$x^2+y^2+2x-4y+4=0$에서
$(x+1)^2+(y-2)^2=1$이므로,
중심이 $C_1(-1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.
또, 원 $(x-a)^2+y^2=4$는 중심이 $C_2(a,\ 0)$이고
반지름의 길이가 2인 원이다. 주어진 두 원의 중심 거리는 $\sqrt{(a+1)^2+4}$이고,
두 원은 서로 다른 두 점에서 만나므로
$2-1<\sqrt{(a+1)^2+4}<2+1$
$\therefore 1<(a+1)^2+4<9$
원의 중심에서 직선까지의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때,
공통현의 길이는 $2\sqrt{r^2-d^2}$이므로 d가 가장 작을 때 최댓값을 갖는다.



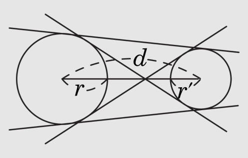
14. 다음 두 원 $x^2+y^2=3^2, (x-9)^2+y^2=2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

먼저 두 원의 반지름의 길이의 합 $r+r'$, 차 $r\sim r'$, 중심거리 d 를 구하여
두 원의 위치관계를 파악한다.



두 원의 반지름의 길이를 각각 $r=3, r'=2$ 로 놓으면
$r+r'=5, r\sim r'=1$ $d=9$ 이므로
$r+r'<d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

15. $x^2+y^2=1$ 일 때, $2x+y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

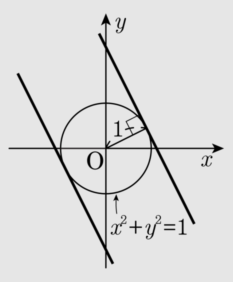
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x+y=k$ 라 하면 $y=-2x+k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.
주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로 점과 직선사이의 거리에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{5}} \leq 1$

$\therefore\ -5 \leq k \leq \sqrt{5}$

16. 다음 중에서 점 $(2, 4)$ 를 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식을 <u>모두</u> 고른 것은?

보기

㉠ $x = 2$	㉡ $y = 4$
㉢ $3x + 4y + 10 = 0$	㉣ $3x - 4y + 10 = 0$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉣　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉢, ㉣

해설

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 으로 놓으면
접선의 방정식은
$x_1x + y_1y = 4 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로
$2x_1 + 4y_1 = 4,\ x_1 + 2y_1 = 2 \cdots\cdots$ ㉡
또, 접점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로
$x_1^2 + y_1^2 = 4 \cdots\cdots$ ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$x_1 = 2, y_1 = 0$ 또는 $x_1 = -\frac{6}{5}, y_1 = \frac{8}{5}$
이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$x = 2$ 또는 $3x - 4y + 10 = 0$

17. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

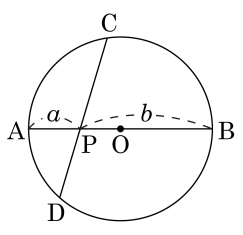
해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

18. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P 를 지나 $\overline{\mathrm{PC}}$의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD 를 긋는다. $\overline{\mathrm{AP}} = a$, $\overline{\mathrm{BP}} = b$ 라 할 때, 선분 DP 의 길이를 a, b 를 써서 나타내면?



① $\dfrac{a+b}{2}$ ② $a+b$ ③ $\sqrt{ab}$

④ ab ⑤ $\dfrac{2ab}{a+b}$

해설

$\overline{\mathrm{CP}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ 이고

$\overline{\mathrm{AP}} \cdot \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{CP}} \cdot \overline{\mathrm{DP}}$ 이므로

$ab = \dfrac{a+b}{2} \cdot \overline{\mathrm{DP}}$

$\therefore \overline{\mathrm{DP}} = \dfrac{2ab}{a+b}$

19. 원 $x^2+(y-4)^2=4$가 원 $(x-4)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　　② 3　　③ 5

④ $4\sqrt{2}-5$　　⑤ $4\sqrt{2}-6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,4)$, $(4,0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$

두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2}-2-3=4\sqrt{2}-5$

20. 포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 a , b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 1$ 에 접하였다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

해설

포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로
각각 a , b 만큼 평행 이동하면 포물선
$y = (x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b$ 가 된다.
이 포물선 $y = (x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b$ 와
직선 $y = 2x + 1$ 이 접하므로
두 식을 연립하면 $(x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b = 2x + 1$ 이다.
$x^2 - 2(a+3)x + a^2 + 4a + b + 6 = 0$ 이
중근을 가지므로
$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2 + 4a + b + 6) = 2a - b + 3 = 0$
$\therefore\ b = 2a + 3$
따라서, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (2a+3)^2}$
$= \sqrt{5\left(a + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}}$ 이므로
$a = -\frac{6}{5}$ 일 때,
최솟값 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 를 가진다.

21. 다음은 점 P$(a,\ b)$ 의 직선 $y=x$ 에 대해 대칭인 점 Q의 좌표 $(x,\ y)$ 를 구하는 과정이다.
$\boxed{}$ 에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

> (1) $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\frac{x+a}{2},\ \frac{y+b}{2}\right)$ 은 직선
> $\boxed{}$ 위에 있으므로 $\frac{y+b}{2}=\frac{x+a}{2}$
> $\therefore\ x-y=b-a \cdots$ ①
> (2) 직선 PQ 는 직선 $y=x$ 에 수직이므로
> $\frac{y-b}{x-a}=\boxed{}$
> ①, ② 를 연립하여 x , y 를 구하면
> $x=\boxed{}$, $y=\boxed{}$이다.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

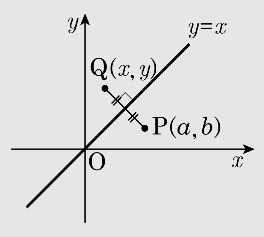
▷ 정답: $y=x$

▷ 정답: -1

▷ 정답: b

▷ 정답: a

해설

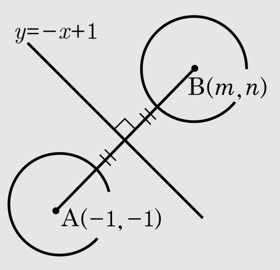


22. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 을 직선 $y=-x+1$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 3　　⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 을 직선 $y=-x+1$ 에 대하여
대칭이동한 도형은 반지름의 길이가 1 인 원이다.



이때, 옮기기 전의 원의 중심을 A $(-1,-1)$,
옮긴 후의 원의 중심을 B (m,n) 이라고 하면
선분 AB 는 직선 $y=-x+1$ 과 수직이므로
$\frac{n+1}{m+1}\cdot(-1)=-1$ 에서
$m=n\cdots\cdots$ ㉠
또한, 선분 AB 의 중점 $\left(\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}\right)$ 은
직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로
$\frac{n-1}{2}=-\frac{m-1}{2}+1$ 에서
$m+n=4\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$m=2,n=2$
따라서, 대칭이동하여 옮겨진 원은 중심이 $(2,2)$ 이고 반지름의 길이가 1 이므로 그 방정식은
$(x-2)^2+(y-2)^2=1$
즉, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$
$\therefore a=-4,b=-4,c=7$
$\therefore a+b+c=-1$

23. 이차방정식 $x^2 + y^2 + 2kx - 2ky + 2 = 0$ 이 원을 나타날 때, 점 $(1,\ 0)$ 이 원의 외부에 있게 되는 k 의 범위를 구하면?

① $k < -1$ 또는 $k > 1$

② $k > -\frac{3}{2}$

③ $-1 < k < 1$

④ $-\frac{3}{2} < k < -1$ 또는 $k > 1$

⑤ $k < -\frac{3}{2}$

해설

$(x+k)^2 + (y-k)^2 = 2k^2 - 2$

i) 원이 되려면

$2k^2 - 2 > 0 \Rightarrow\ k < -1$ 또는 $k > 1$

ii) $(1, 0)$ 이 원의 외부에 있으려면 원 중심과의 거리가 원 반지름 보다 커야 한다.

$\therefore\ \sqrt{(1+k)^2 + k^2} > \sqrt{2k^2 - 2} \Rightarrow\ 2k + 3 > 0$

$\Rightarrow\ k > -\frac{3}{2}$

i), ii) 에 의해 $-\frac{3}{2} < k < -1$ 또는 $k > 1$

24. 좌표평면에서 영역 D 를 $y \geq x^2 + ax + b$ 라고 하자. 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 가 영역 D 에 속할 때, 임의의 실수 a, b 에 대하여 다음 중 항상 영역 D 에 속하는 점은?

① $(2x_1, 2y_1)$ ② $(x_1^2,\ y_1^2)$

③ $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ④ $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

⑤ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

해설

$\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 가 영역 D 에 속하므로

$y_1 \geq x_1^2 + ax_1 + b,\ y_2 \geq x_2^2 + ax_2 + b$

두 식을 더하면

$y_1 + y_2 \geq x_1^2 + x_2^2 + a(x_1 + x_2) + 2b$

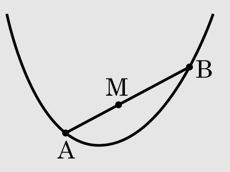
$\therefore\ \frac{y_1 + y_2}{2} \geq \frac{x_1^2 + x_2^2 + a(x_1 + x_2)}{2} + b$

$\geq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + a\frac{(x_1 + x_2)}{2} + b$

(코쉬-슈바르츠 부등식에서 $(1^2 + 1^2)(x_1^2 + x_2^2) \geq (x_1 + x_2)^2$)

$\therefore$ 점 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ 가 반드시 영역 D 에 속하는 점이다.

다음 그림에서 보듯이 주어진 함수는 아래로 볼록한 함수이기 때문에 이 함수 위의 임의의 두 점의 중점은 반드시 그래프의 위쪽에 위치하게 된다.

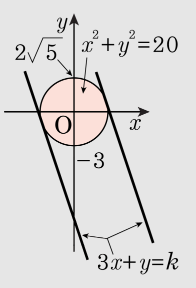


25. 부등식 $x^2 + y^2 \leq 20$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $3x + y$ 의 최댓값은?

① $2\sqrt{5}$　② 5　③ $5\sqrt{2}$　④ 10　⑤ $10\sqrt{2}$

해설

부등식 $x^2 + y^2 \leq 20$ 을 만족하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같다.
$3x + y = k$ (k 는 상수)로 놓으면
다음 그림과 같이 직선 $3x + y - k = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 20$ 과 접할 때
k 는 최댓값과 최솟값을 가진다.
이때, 원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로



$$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+1^2}} = 2\sqrt{5}$$

$|-k| = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = 10\sqrt{2}$

$\therefore\ k = \pm 10\sqrt{2}$

따라서 k 의 최댓값은 $10\sqrt{2}$ 이다.