

1. 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 3$

② $x^2 + y^2 = 1$

③ $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

④ $x^2 + y^2 = 3^2$

⑤ $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 3$

해설

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2 \Rightarrow \therefore x^2 + y^2 = 9$$

2. 원 $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$ 의 중심의 좌표를 (a, b) 반지름의 길이를 r 라 할 때, $a + b + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면

$$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 2y + 1) = 25$$

$$\therefore (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$

따라서 중심의 좌표는 $(a, b) = (5, 1)$

반지름의 길이는 $r = 5$ 이므로

$$a + b + r = 5 + 1 + 5 = 11$$

3. 세 점 $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(3, 2)$ 를 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 이라 할 때 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \cdots \textcircled{A} \text{이라 하면}$$

$\textcircled{A}$ 는 점 $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(3, 2)$ 를 지나므로

$$1 + 1 + A + B + C = 0, 4 + 1 + 2A - B + C = 0,$$

$$9 + 4 + 3A + 2B + C = 0$$

$$\therefore A = -5, B = -1, C = 4$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$$

$$\therefore A \times B \times C = 20$$

4. 평행이동 $T : (x, y) \rightarrow (x + 3, y + 2)$ 에 의하여 점 $(-1, 3)$ 이 옮겨지는 점의 좌표를 구하면?

① $(1, 3)$

② $(4, 6)$

③ $(2, 5)$

④ $(3, 9)$

⑤ $(5, 6)$

해설

평행이동 T 는 x 축의 방향으로 3 만큼,
 y 축의 방향으로 2 만큼 옮기는 것이다.
구하는 점의 좌표는 $(-1 + 3, 3 + 2)$,
즉 $(2, 5)$

5. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ (x-2)^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 넓이는?

① 9π

② 10π

③ 12π

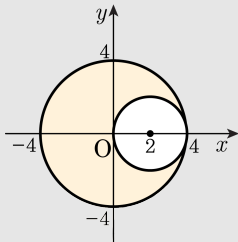
④ 14π

⑤ 20π

해설

$x^2 + y^2 \leq 16$ 은 중심이 원점이고
반지름이 4인 원의 내부이고,
 $(x-2)^2 + y^2 \geq 4$ 는 중심이 $(2, 0)$ 이고
반지름이 2인 원의 외부이다.
동시에 만족하는 영역을 그림으로 나타
내면 다음과 같다. 따라서 구하는 영역
의 넓이는

$$\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 2^2 = 12\pi$$



6. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$

② $\sqrt{15}$

③ 0

④ $2\sqrt{5}$

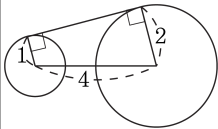
⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.

피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의
길이를 구하면

$$\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15} \text{ 이다.}$$



7. 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B 라 할 때, AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

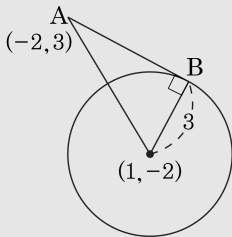
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 $(1, -2)$, 반지름은 3 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



8. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x \pm \sqrt{5}$

② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$

③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$

⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 3\sqrt{1+2^2} \leftarrow m=2, r=3$$

$$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$$

9. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 1$

② $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$

③ $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

④ $x^2 + (y + 2)^2 = 1$

⑤ $(x - 2)^2 + y^2 = 1$

해설

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$

㉠을 y 축에 대하여 대칭이동하면

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$

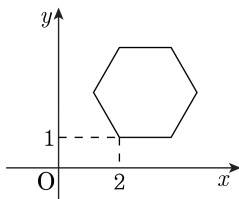
㉡을 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면

$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$

㉢을 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면

$x^2 + (y + 2)^2 = 1$

10. 다음은 한 변의 길이가 2 인 정육각형을 직교 좌표평면 위에 올려놓은 것이다. 여섯 개의 꼭짓점 중 부등식 $x + 5y \geq 10$ 의 영역 안에 있는 점의 개수를 구하여라. (정육각형의 가장 아래 변은 x 축에 평행하고, $\sqrt{3} = 1.7$ 로 한다)



▶ 답:

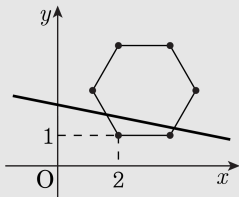
개

▷ 정답: 4개

해설

직선 $x + 5y = 10$ 은 x 절편이 10, y 절편이 2 이므로 아래 그림과 같이 그릴 수 있다.

따라서 직선의 위부분에 해당하는 꼭짓점의 개수는 4 (개) 이다.



11. 세 부등식 $x \geq 0, x - 2y + 2 \leq 0, 2x + y - 6 \leq 0$ 을 동시에 만족하는 영역의 넓이는?

① 5

② $\frac{11}{2}$

③ 6

④ $\frac{13}{2}$

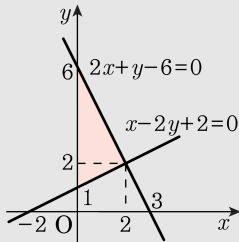
⑤ 7

해설

주어진 세 부등식을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분이다.

이 때, 두 직선 $x - 2y + 2 = 0, 2x + y - 6 = 0$ 의 교점은

점 $(2, 2)$ 이므로 어두운 부분의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$



(단, 경계선 포함)

12. x, y 의 영역이 다음 그림과 같이 주어졌을 때, $x^2 + y^2$ 의 값의 최댓값은?

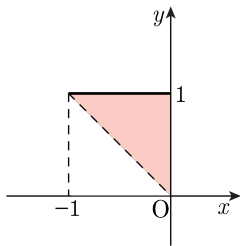
① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ 3



해설

$x^2 + y^2 = k$ 라 하면,

k 값은 점 $(0, 0)$ 을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 제공한 것이므로

점 $(-1, 1)$ 을 지날 때, k 값이 최대이다.

따라서 k 의 값의 최댓값은 $(-1)^2 + 1^2 = 2$

13. 좌표평면 위의 두 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$, $(x - a)^2 + y^2 = 4$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점 사이의 거리가 최대가 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{2}$

③ -1

④ $-\frac{3}{2}$

⑤ -2

해설

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 에서

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 이므로,

중심이 $C_1(-1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

또, 원 $(x - a)^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 $C_2(a, 0)$ 이고

반지름의 길이가 2인 원이다. 주어진 두 원의 중심 거리는 $\sqrt{(a + 1)^2 + 4}$ 이고,

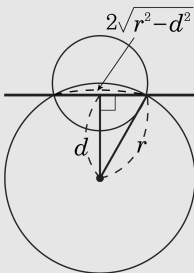
두 원은 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$2 - 1 < \sqrt{(a + 1)^2 + 4} < 2 + 1$$

$$\therefore 1 < (a + 1)^2 + 4 < 9$$

원의 중심에서 직선까지의 거리를 d , 반지름의 길이를 r 라 할 때,

공통현의 길이는 $2\sqrt{r^2 - d^2}$ 이므로 d 가 가장 작을 때 최댓값을 갖는다.



14. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

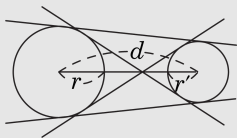
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r - r'$, 중심거리 d 를 구하
여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

$r + r' = 5, r - r' = 1, d = 9$ 이므로

$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
4 개



15. $x^2 + y^2 = 1$ 일 때, $2x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

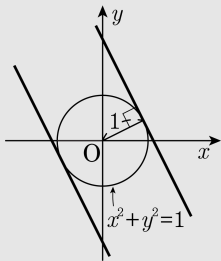
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x + y = k$ 라 하면 $y = -2x + k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.

주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로

점과 직선사이의 거리에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \leq 1$

$\therefore -5 \leq k \leq \sqrt{5}$

16. 다음 중에서 점 $(2, 4)$ 를 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x = 2$

㉡ $y = 4$

㉢ $3x + 4y + 10 = 0$

㉣ $3x - 4y + 10 = 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉢, ㉣

해설

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 으로 놓으면

접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

㉠이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$$2x_1 + 4y_1 = 4, x_1 + 2y_1 = 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또, 점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 4 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$x_1 = 2, y_1 = 0 \text{ 또는 } x_1 = -\frac{6}{5}, y_1 = \frac{8}{5}$$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$x = 2 \text{ 또는 } 3x - 4y + 10 = 0$$

17. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을

표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로

중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.

원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는

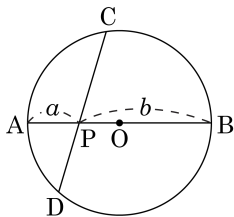
$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에

이르는 거리의 최솟값은

$$d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

18. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P 를 지나 $\overline{PC}$ 의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD 를 긋는다. $\overline{AP} = a$, $\overline{BP} = b$ 라 할 때, 선분 DP 의 길이를 a , b 를 써서 나타내면?



- ① $\frac{a+b}{2}$ ② $a+b$ ③ $\sqrt{ab}$
 ④ ab ⑤ $\frac{2ab}{a+b}$

해설

$$\overline{CP} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a+b}{2} \text{ 이고}$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP} \text{ 이므로}$$

$$ab = \frac{a+b}{2} \cdot \overline{DP}$$

$$\therefore \overline{DP} = \frac{2ab}{a+b}$$

19. 원 $x^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 원 $(x - 4)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $4\sqrt{2} - 5$

⑤ $4\sqrt{2} - 6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 4)$, $(4, 0)$ 이므로 중심거리는

$$\sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

두 원의 반지름은 각각 2, 3 이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2} -$

$$2 - 3 = 4\sqrt{2} - 5$$

20. 포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 a , b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 1$ 에 접하였다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

해설

포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 a , b 만큼 평행 이동하면 포물선

$$y = (x - a)^2 - 4(x - a) + 7 + b \text{ 가 된다.}$$

이 포물선 $y = (x - a)^2 - 4(x - a) + 7 + b$ 와

직선 $y = 2x + 1$ 이 접하므로

두 식을 연립하면 $(x - a)^2 - 4(x - a) + 7 + b = 2x + 1$ 이다.

$$x^2 - 2(a + 3)x + a^2 + 4a + b + 6 = 0 \text{ 이}$$

중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (a + 3)^2 - (a^2 + 4a + b + 6) = 2a - b + 3 = 0$$

$$\therefore b = 2a + 3$$

$$\text{따라서, } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (2a + 3)^2}$$

$$= \sqrt{5 \left(a + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}} \text{ 이므로}$$

$$a = -\frac{6}{5} \text{ 일 때,}$$

최솟값 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 를 가진다.

21. 다음은 점 $P(a, b)$ 의 직선 $y = x$ 에 대해 대칭인 점 Q 의 좌표 (x, y) 를 구하는 과정이다.

에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

(1) $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$ 은 직선

위에 있으므로 $\frac{y+b}{2} = \frac{x+a}{2}$

$\therefore x - y = b - a \cdots \textcircled{1}$

(2) 직선 PQ 는 직선 $y = x$ 에 수직이므로

$\frac{y-b}{x-a} = \text{$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 x, y 를 구하면

$x = \text{}, y = \text{$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

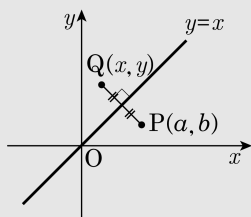
▷ 정답 : $y = x$

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : b

▷ 정답 : a

해설



22. 원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 을 직선 $y = -x + 1$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

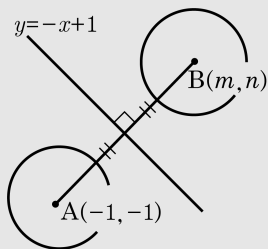
④ 3

⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 을 직선 $y = -x + 1$ 에 대하여 대칭이동한 도형은 반지름의 길이가 1 인 원이다.

이때, 옮기기 전의 원의 중심을 $A(-1, -1)$, 옮긴 후의 원의 중심을 $B(m, n)$ 이라고 하면



선분 AB 는 직선 $y = -x + 1$ 과 수직이므로

$$\frac{n+1}{m+1} \cdot (-1) = -1 \text{ 에서}$$

$$m = n \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또한, 선분 AB 의 중점 $\left(\frac{m-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ 은

직선 $y = -x + 1$ 위에 있으므로

$$\frac{n-1}{2} = -\frac{m-1}{2} + 1 \text{ 에서}$$

$$m + n = 4 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$m = 2, n = 2$$

따라서, 대칭이동하여 옮겨진 원은 중심이 $(2, 2)$

이고 반지름의 길이가 1 이므로 그 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$\text{즉, } x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$$

$$\therefore a = -4, b = -4, c = 7$$

$$\therefore a + b + c = -1$$

23. 이차방정식 $x^2 + y^2 + 2kx - 2ky + 2 = 0$ 이 원을 나타낼 때, 점 $(1, 0)$ 이 원의 외부에 있게 되는 k 의 범위를 구하면?

① $k < -1$ 또는 $k > 1$

② $k > -\frac{3}{2}$

③ $-1 < k < 1$

④ $-\frac{3}{2} < k < -1$ 또는 $k > 1$

⑤ $k < -\frac{3}{2}$

해설

$$(x+k)^2 + (y-k)^2 = 2k^2 - 2$$

i) 원이 되려면

$$2k^2 - 2 > 0 \Rightarrow k < -1 \text{ 또는 } k > 1$$

ii) $(1, 0)$ 이 원의 외부에 있으려면 원 중심과의 거리가 원 반지름 보다 커야 한다.

$$\therefore \sqrt{(1+k)^2 + k^2} > \sqrt{2k^2 - 2} \Rightarrow 2k + 3 > 0$$

$$\Rightarrow k > -\frac{3}{2}$$

i), ii)에 의해 $-\frac{3}{2} < k < -1$ 또는 $k > 1$

25. 부등식 $x^2 + y^2 \leq 20$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $3x + y$ 의 최댓값은?

① $2\sqrt{5}$

② 5

③ $5\sqrt{2}$

④ 10

⑤ $10\sqrt{2}$

해설

부등식 $x^2 + y^2 \leq 20$ 을 만족하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같다.

$3x + y = k$ (k 는 상수)로 놓으면

다음 그림과 같이 직선 $3x + y - k = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 20$ 과 접할 때

k 는 최댓값과 최솟값을 가진다.

이때, 원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$|-k| = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore k = \pm 10\sqrt{2}$$

따라서 k 의 최댓값은 $10\sqrt{2}$ 이다.

