1. 첫째항이 6, 공차가 -5 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 -44는 제 몇 항인가?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

첫째항이 6 이고, 공차가 5 이므로 일반항은 a_n 은

$a_n = 6 + (n-1) \cdot (-5) = -5n + 11$

$-5n + 11 = -44$

$5n = 55 \quad \therefore \; n = 11$

2. 세 수 $5-2x$, $4-x$, $6+3x$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$5-2x$, $4-x$, $6+3x$가 등차수열을 이루면 $4-x$가 등차중항이므로

$$4-x=\frac{(5-2x)+(6+3x)}{2}$$

$$2(4-x)=5-2x+6+3x$$

$$8-2x=11+x$$

$$-3x=3 \quad \therefore\ x=-1$$

3. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가)에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{(가)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ $\therefore$ $(가)=\frac{3}{2}$

4. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a+b+c+d$의 값은?(단, a, b, c, d는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$a+b+c+d=9+6+4+36=55$

5. 등차수열 $-3,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ 21$ 에 대하여 $x_4 + x_5$ 의 값은?

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

주어진 등차수열의 공차를 d 라고 하면 21은 제 9항이므로

$21 = -3 + 8d \quad \therefore\ d = 3$

따라서, 주어진 수열은 첫째항이 -3, 공차가 3인 등차수열이고,

$x_4,\ x_5$ 은 각각 제 5항, 제 6항이므로

$x_4 = -3 + (5-1)\cdot 3 = 9$

$x_5 = -3 + (6-1)\cdot 3 = 12$

따라서 $x_4 + x_5$ 은 21이다.

6. 두 수 $2p+7$과 $2p+9$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2p+7$, p^2, $2p+9$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+7)+(2p+9)}{2}$

$2p^2 = 4p+16$, $p^2-2p-8=0$

$(p+2)(p-4)=0$

따라서 $p=-2$ 또는 $p=4$

이때, p는 양수이므로 $p=4$

7. $a_5 = 27,\ a_{11} = 15$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 27$

$a_{11} = a + 10d = 15$

연립하여 풀면 $d = -2,\ a = 35$

$\therefore\ a_n = 35 + (n-1) \times (-2) = -2n + 37$

$-2n + 37 < 0$ 인 정수 n 의 최솟값을 구하면

$37 < 2n, \quad 18.5 < n$

$\therefore\ n = 19$

$\therefore\ \{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은 a_{19} 이다.

8. 첫째항이 -10인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 7항까지의 합과 제 7항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$$S_7 = a_7$$

$$S_7 = \frac{7(2a+6d)}{2}$$

$$a_7 = a + 6d$$

$$\frac{7(2a+6d)}{2} = a + 6d$$

$$7a + 21d = a + 6d$$

$$6a = -15d$$

$$d = \frac{6 \times (-10)}{-15} = 4$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2}$$

$$= \frac{10(-20+36)}{2}$$

$$= \frac{160}{2} = 80$$

9. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = -n^2 + 2n$일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -280

해설

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10})$$
$$= (-20^2 + 2 \times 20) - (-10^2 + 2 \times 10)$$
$$= -360 - (-80) = -280$$

10. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 6,\ a_5 = -2$일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d라 하면

$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore\ d = -2$

$\therefore\ a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$

이때, $a_n \geq 0$에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}| = a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$

$= 2 \cdot \dfrac{4(6+0)}{2} - \dfrac{20(6-32)}{2} (\because\ a_4 = 0,\ a_{20} = -32)$

$= 24 + 260 = 284$

11. 보기의 등차수열 중 첫째항이 a일 때, $S_{15} - S_{14} = 43a$가 성립하는 것을 모두 고른 것은?
(단, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$)

보기

ㄱ $a_n = -3n + 2$　　　ㄴ $a_n = \frac{3}{2}n - 1$

ㄷ $a_n = \sqrt{2}(3n-2)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$S_{15} - S_{14} = a_{15}$
$a_{15} = a + (15-1)d = 43a$
$14d = 42a$
$d = 3a$
즉 공차가 초항의 3배인 등차수열을 찾으면 된다.

ㄱ $a_n = -3n + 2 = -3(n-1) - 1$
초항이 -1, 공차가 -3인 등차수열

ㄴ $a_n = \frac{3}{2}n - 1 = \frac{3}{2}(n-1) + \frac{3}{2} - 1$
$= \frac{3}{2}(n-1) + \frac{1}{2}$
초항이 $\frac{1}{2}$, 공차가 $\frac{3}{2}$인 등차수열

ㄷ $a_n = \sqrt{2}(3n-2)$
$= 3\sqrt{2}n - 2\sqrt{2}$
$= 3\sqrt{2}(n-1) + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$
$= 3\sqrt{2}(n-1) + \sqrt{2}$
초항이 $\sqrt{2}$, 공차가 $3\sqrt{2}$인 등차수열

$\therefore$ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, 수열 $\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\}$은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_n = ar^{n-1}$이므로
$\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$
$= (3ar-2a)r^{n-1} = 12\cdot 2^{n-1}$
따라서 $r=2$이고 $3ar-2a=12$이다.
$6a-2a=12,\ 4a=12$
$\therefore\ a=3$

13. 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_3 = \frac{5}{6}$, $a_2a_3a_4 = \frac{1}{8}$ 일 때, 첫째항의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1 + a_3 = \frac{5}{6}$ 에서, $a_1 + a_1r^2 = \frac{5}{6}$

$a_2a_3a_4 = \frac{1}{8}$ 에서 $(a_1r^2)^3 = \frac{1}{8}$

즉, $a_3 = a_1r^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore\ a_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

14. 이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근의 등차중항을 A, 등비중항을 G라 할 때, A^2, G^2을 두 근으로 하는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 $a+b$의 값은?

① 12 ② 15 ③ 24 ④ 27 ⑤ 39

해설

$x^2-6x+3=0$에서 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=3$

$\therefore A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{6}{2}=3,\ G=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{3}$

이 때, A^2, G^2 즉, 9와 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-9)(x-3)=0\ \ \therefore x^2-12+27=0$

따라서 $a=-12,\ b=27$

15. 서로 다른 세 수 a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이루고 있다. b와 c 사이에 두 수를 넣어 5개의 수가 등차수열을 이루도록 하였다. 이때, $\dfrac{b+c}{a}$의 값은?

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

해설

b와 c사이에 두 수를 넣어 만들어진 등차수열의 공차를 d라 하면

$b=a+d,\ c=a+4d \cdots$ ㉠

세 수 a, b, c가 등비수열을 이루므로

$(a+d)^2=a(a+4d)$

$a^2+2ad+d^2=a^2+4ad$

$\therefore\ d=2a$

㉠에서 $b=3a,\ c=9a$

$\therefore\ \dfrac{b+c}{a}=\dfrac{3a+9a}{a}=12$

16. 첫째항부터 제5항까지의 합이 30, 첫째항부터 제10항까지의 합이 90 인 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은?

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

해설

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_5 = 30,\ S_{10} = 90$이므로

$$S_5 = \frac{a(r^5-1)}{r-1} = 30 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = \frac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1} = 90 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $30(r^5+1) = 90 \quad \therefore r^5 = 2$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15}는

$$S_{15} = \frac{a(r^{15}-1)}{r-1} = \frac{a(r^5-1)(r^{10}+r^5+1)}{r-1}$$

$$= 30(2^2+2+1) = 210$$

17. 다항식 $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2014}$ 을 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는?

① $2^{2014}-1$ ② $2^{2014}+1$ ③ $2^{2015}-1$

④ $2^{2015}+1$ ⑤ 2^{2015}

해설

$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2014}$ 을 $x-2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이므로

$$f(2) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2014} = \frac{2^{2015}-1}{2-1} = 2^{2015}-1$$

18. 첫째항이 1이고, 공비가 4인 등비수열에서 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 1000보다 크게 되는가?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} > 1000, \ 4^n > 3001$$

$$2n \log 2 > \log 3001$$

$$n > \frac{\log 3001}{2 \log 2} > \frac{\log 3000}{2 \log 2}$$

$$= \frac{\log 3 + \log 1000}{2 \log 2} = \frac{3.4771}{0.6020} = 5.7 \times \times \times$$

19. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 2n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{3}(a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^{3}(a_k - 1)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$\sum_{k=1}^{3}(a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^{3}(a_k - 1)^2$
$= \sum_{k=1}^{3}(a_k + 2a_k + 1) - \sum_{k=1}^{3}(a_k^2 - 2a_k + 1)$
$= 4\sum_{k=1}^{3} a_k = 4(3^2 + 2 \times 3) = 60$

20. $1 \cdot 15 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 13 + \cdots + 15 \cdot 1$의 값은?

① 640 ② 660 ③ 680 ④ 700 ⑤ 720

해설

$n \leq 15$일 때, $a_n = n(16-n) = -n^2 + 16n$

$\therefore 1 \cdot 15 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 13 + \cdots + 15 \cdot 1$

$= \sum_{k=1}^{15}(-k^2 + 16k) = -\sum_{k=1}^{15} k^2 + 16\sum_{k=1}^{15} k$

$= -\dfrac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} + 16 \cdot \dfrac{15 \cdot 16}{2} = 680$

21. 방정식 $x^3-1=0$의 두 허근을 α, β라고 할 때, $\sum_{k=1}^{3}(\alpha^k+\beta^k)$의 값은?

① -4　　② -3　　③ -2　　④ -1　　⑤ 0

해설

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 두 허근 α, β는
$x^2+x+1=0$의 근이므로
$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1,\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-1$
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{3}(\alpha^k+\beta^k)=(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^3+\beta^3)$
$=(-1)+(-1)+2=0$

22. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$= (2n^2 - n) - \left\{2(n-1)^2 - (n-1)\right\}$

$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

$n = 1$ 일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$

따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이므로

$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$

$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$

$$= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$$

$= 440 - 30 - 15 = 395$

23. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 3n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} \dfrac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{24}$ ② $\dfrac{1}{48}$ ③ $\dfrac{5}{16}$ ④ $\dfrac{5}{24}$ ⑤ $\dfrac{5}{48}$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2(n \geq 2)$

$a_1 = 1 + 3 = 2 + 2 = 4$ 이므로, $a_n = 2n + 2(n \geq 1)$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k+2)(2k+4)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) = \frac{5}{24}$$

24. 수열 $\{a_n\}$이 $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$ 일 때, 계차수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n = \alpha^n$이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = \beta^n + \gamma$이다. 이때, 실수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$$

$$\begin{array}{cccc} \vee & \vee & \vee & \vee \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{array} \cdots \rightarrow b_n = 2^n$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$\alpha = 2,\ \beta = 2,\ \gamma = -1$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3$$

25. 수열 $1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ 1+2+2^2+2^3, \cdots$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $2^n - n$ ② $2^{n+1} - 1$ ③ $2^{n+1} - n$

④ $2^{n+1} - n - 1$ ⑤ $2^{n+1} - n - 2$

해설

수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$\begin{aligned} S_n &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^k - 1) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

26. 다음 군수열에서 47은 몇 군의 몇째 항인가?

제1군	제2군	제3군	제4군
(1),	(2, 3),	(4, 5, 6),	(7, 8, 9, 10), $\cdots$

① 제9군의 9항 ② 제10군의 2항 ③ 제10군의 3항
④ 제11군의 2항 ⑤ 제11군의 3항

해설

각 군의 첫째항으로 만들어지는 수열
$\{a_n\}$에 대하여
$\{a_n\} : 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11, \cdots$
수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면
$\{b_n\} : 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$
$b_n = n$이므로 제 n군의 첫째항 a_n은

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_{10} = 1 + \frac{10 \cdot 9}{2} = 46$$

따라서, 47은 제 10군의 2항이다.

27. 다음 값을 계산하면?

$$\log_2 4 + \log_2 4^3 + \log_2 4^9 + \cdots + \log_2 4^{3^{n-1}}$$

① $\log_2 4^{3^{n-1}}$ ② $\log_2 4^{3^n}$ ③ $\log_2 3^{n+1}$

④ $3^n - 1$ ⑤ $3^n + 1$

해설

주어진 식은 $a_n = \log_2 4^{3^{n-1}}$ 인 수열의 합 S_n 이다.

$a_n = 3^{n-1} \cdot \log_2 4 = 2 \cdot 3^{n-1}$

a_n 은 첫째항이 2, 공비가 3 인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{2 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$$

28. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 3^n - 1$인 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열이다. 이때, $a + r$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$S_n = 3^n - 1$$
$$S_{n-1} = 3^{n-1} - 1$$
$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1 \\ &= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2) \end{aligned}$$
$$a_1 = S_1 = 2$$
$$\therefore a = 2,\ r = 3$$
$$\therefore a + r = 2 + 3 = 5$$

29. $a_1 = 8,\ a_4 = 1$이고 각 항이 실수인 등비수열 a_n에 대하여 수열 b_n을 $b_n = \log_2 a_{2n}^2$으로 정의하면 수열 b_n은 첫째항이 c이고 공차가 d인 등차수열이다. 이때, $c - d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a_4 = 8 \times r^3 = 1$에서 $r^3 = \dfrac{1}{8},\ r = \dfrac{1}{2}$

$a_n = 8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 $a_{2n} = 8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-1}$

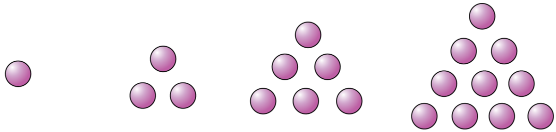
$\therefore\ b_n = \log_2 \left\{8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-1}\right\}^2 = 2\log_2 2^{-2n+4}$

$= 2(-2n+4) = -4n+8$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 -4인 등차수열이다.

$\therefore\ c - d = 8$

30. 다음 그림과 같이 규칙적인 구슬의 개수를 증가시키면서 정삼각형의 모양을 만들 때, 필요한 구슬의 개수를 삼각수라고 한다. 이 삼각수들의 수열을 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?



$a_1 = 1$ $a_2 = 3$ $a_3 = 6$ $a_4 = 10$

① 1500 ② 1510 ③ 1520 ④ 1530 ⑤ 1540

해설

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 6,\ 10, \cdots$

$\{b_n\} :\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$

계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 1인 등차수열이므로

$b_n = 2 + (n-1) \cdot 1 = n + 1$

$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$

$$= 1 + \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{20} \frac{k^2+k}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \frac{20 \cdot 21}{2}\right) \\ &= 1540\end{aligned}$$

31. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 제130항을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 261

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \cdots,$$

제1군 제2군 제3군,

$$\left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \cdots, \frac{2k-1}{2^n}\right)$$

제4군

제 n군의 항수는 2^{n-1} 이므로 제1군에서 제n군까지의 항수의 합은

$$1+2+\cdots+2^{n-1} = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1$$

이때, $n=7$ 이면 $2^7-1=128-1=127$ 이므로 제 130항은 제8군의 3번째 항이다.

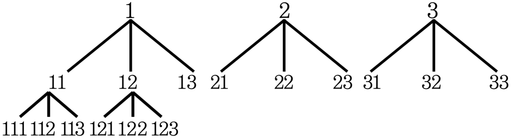
제n군에서 각 항의 분모는 2^n 이고, k번째 항의 분자는 $2k-1$ 이므로

제8군의 3번째 항은 $\frac{2\cdot 3-1}{2^8} = \frac{5}{256}$

따라서 제130항은 $\frac{5}{256}$ 이므로 $p=256,\ q=5$

$\therefore p+q=256+5=261$

32. 그림에 나타나는 수를 크기순으로 나열하여 다음과 같은 수열을 만들었다.



1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, 111, 112, 113, 121, 122, $\cdots$ 이 수열의 제 200항은?

① 13323 ② 13332 ③ 21111

④ 21113 ⑤ 21122

해설

(한 자리 수의 개수)$= 3$개, (두 자리 수의 개수)$= 3^2$개,
(세 자리 수의 개수)$= 3^2$개, (n 자리 수의 개수)$= 3^n$개이므로
$3+9+27+81 < 200 < 3+9+27+81+243$에서
제200항은 5자리 수 중 80번째 수이다. 이때, 13333이 5자리 수 중 81번째 수이므로 제 200항은 13332이다.

33. 다음과 같이 나열된 수를 보고 이 수열의 여섯번째에 올 수를 구하면?

$$\frac{\sqrt{3}}{1},\ \frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{\sqrt{7}}{5},\ \cdots$$

① $\frac{\sqrt{7}}{12}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{\sqrt{13}}{11}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

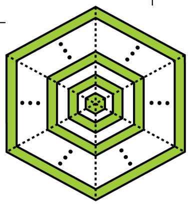
해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며,
분자는 $\sqrt{\ }$ 의 수가 2씩 증가하는 규칙으로 나타난다.
따라서 6번째에 올 수의 분자는 $\sqrt{13}$이다.
분모는 2씩 증가하는 규칙으로 나타난다.
따라서 6번째에 올 수 수의 분모는 11이므로
구하는 수는 $\frac{\sqrt{13}}{11}$

34. 유전 연구에 필요한 두 가지 식물 A, B를 재배하기 위하여 정육각형 모양의 토지를 다음과 같이 나누어 놓았다.

· 정육각형을 여섯 개의 정삼각형으로 나눈다.
· 인접한 두 삼각형이 공유하고 있는 변(점선 부분)을 각각 21 등분한다.
· 21 등분한 각 점을 직선 모양의 울타리로 서로 연결하여 모두 21 개의 부분으로 구분하여 놓는다.

오른쪽 그림과 같이 가장 안쪽에 있는 정육각형 모양의 토지부터 시작하여 검은 부분과 흰 부분으로 토지를 교대로 구분한 다음 검은 부분에는 A를 심고, 흰 부분에는 B를 심었다. A를 심은 부분의 넓이가 $231\,\mathrm{m}^2$ 일 때, B를 심은 부분의 넓이는?(단, 울타리가 차지하는 넓이는 고려하지 않는다.)



① $210\,\mathrm{m}^2$ ② $212\,\mathrm{m}^2$ ③ $214\,\mathrm{m}^2$
④ $216\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $218\,\mathrm{m}^2$

해설

가장 안쪽의 정육각형 모양의 토지의 넓이를 a로 놓으면 인접한 흰 부분의 넓이는 $3a$이다.
또 인접한 검은 부분의 넓이는 $5a$이고, 이에 인접한 흰 부분의 넓이는 $7a$이다.
따라서 검은 부분의 넓이의 합은

$$a+5a+9a+\cdots+41a=\frac{11(a+41a)}{2}=231a$$

흰 부분의 넓이의 합은

$$3a+7a+11a+\cdots+39a=\frac{10(3a+39a)}{2}=210a$$

그런데 검은 부분의 넓이의 합이 231 이므로 구하는 부분의 넓이의 합은 210 이다.

35. 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 하자. 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 ω^n의 실수 부분으로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{999}\left\{f(k)+\frac{1}{3}\right\}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 332

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0,\quad \omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 이때, $f(n)$은 ω^n의 실수 부분이

고, $\omega^3=-1,\ \omega^2=\omega-1$이므로 $f(n)$을 차례로 구하면

$\omega=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$이므로 $f(1)=\dfrac{1}{2}$

$\omega^2=\omega-1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$이므로 $f(2)=-\dfrac{1}{2}$

$\omega^3=-1$이므로 $f(3)=-1$

$\omega^4=\omega^3\omega=-\omega$이므로 $f(4)=-f(1)=-\dfrac{1}{2}$

$\omega^5=\omega^3\omega^2=-\omega^2$이므로 $f(5)=-f(2)=\dfrac{1}{2}$

$\omega^6=(\omega^3)^2=1$이므로 $f(6)=-f(3)=1$

$\omega^7=(\omega^3)^2\cdot\omega=\omega$이므로 $f(7)=f(1)$ 따라서, $f(1)+(2)+\cdots+f(6)=0$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{999}\left\{f(k)+\dfrac{1}{3}\right\}=\sum_{k=1}^{999}f(k)+\sum_{k=1}^{999}\dfrac{1}{3}$

$=166\sum_{k=1}^{6}f(k)+f(997)+f(998)+f(999)+999\cdot\dfrac{1}{3}$

$=166\cdot 0+f(1)+f(2)+f(3)+333$

$=0+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-1\right)+333$

$=332$

36. $\sum_{k=1}^{100}\left[\sqrt{k}\right]$ 의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 625 ② 650 ③ 635 ④ 636 ⑤ 640

해설

$\sum_{k=1}^{100}\left[\sqrt{k}\right]$ 에서 $\left[\sqrt{k}\right]$ 의 값을 알아보면

$k=1$부터 $k=3$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=1$

$k=4$부터 $k=8$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=2$

$k=9$부터 $k=15$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=3$

$k=16$부터 $k=24$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=4$

$k=25$부터 $k=35$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=5$

$k=36$부터 $k=48$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=6$

$k=49$부터 $k=63$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=7$

$k=64$부터 $k=80$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=8$

$k=81$부터 $k=99$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=9$

$k=100$에서 $\left[\sqrt{k}\right]=10$

$\sum_{k=1}^{100}\left[\sqrt{k}\right]=1\times3+2\times5+3\times7+4\times9+5\times11+6\times13+$
$7\times15+8\times17+9\times19+10$
$=\sum_{k=1}^{9}k(2k+1)+10$
$=2\cdot\dfrac{9\cdot10\cdot19}{6}+\dfrac{9\cdot10}{2}+10$
$570+45+10=625$