1. $\sqrt[4]{4+\sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$을 간단히 하면?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$$\sqrt[4]{4+\sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$$
$$= \sqrt{\sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$$
$$= \frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$$
$$= \frac{\sqrt{5-3}}{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[4]{8}$$
$$= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{\frac{8}{2}}$$
$$= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{4}$$
$$= \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$
$$= 2$$

2. $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^k}}$ 일 때, 상수 k의 값은? (단, $a > 0,\ a \neq 1$)

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

해설

$a^{\frac{5}{3}} = (a^{\frac{k}{3}+1})^{\frac{1}{4}}$

$\frac{5}{3} = \frac{k}{12} + \frac{1}{4}$

$20 = k + 3$

$k = 17$

3. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\log_3 64}$

$= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12$

4. $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$라고 할 때, $\log_8 125$를 a, b로 나타내면?

① $1-2b$ ② $2b-a$ ③ $a-b$
④ $\frac{b}{a}$ ⑤ $\frac{a}{b}$

해설

$\log_3 2 = a \quad \log_3 5 = b$
$\log_8 125 = \log_{2^3} 5^3 = \log_2 5$
$= \frac{\log_3 5}{\log_3 2} = \frac{b}{a}$

5. 1이 아닌 양수 p와 세 양수 x, y, z에 대하여 $\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z = -3$가 성립할 때, xyz의 값은?

① $\dfrac{1}{p^3}$　② $\dfrac{1}{2p}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $2p$　⑤ p^2

해설

$\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z$

$= \log_p x + \dfrac{2}{2}\log_p y + \dfrac{3}{3}\log_p z$

$= \log_p xyz = -3$

$\therefore xyz = p^{-3} = \dfrac{1}{p^3}$

6. 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, 수열 $b_n = 2^{a_n}$이다. 수열 $\{b_n\}$에서 처음으로 2000보다 커지는 항은? (단, $\log 2 = 0.3010$)

① 제5항　② 제6항　③ 제7항
④ 제8항　⑤ 제9항

해설

$a_n = 2n$이므로 $b_n = 2^{2n}$

$4^n > 2000$에서 $2n \log 2 > \log 2000$

$\therefore\ n > \dfrac{3.3010}{0.6020} = 5.48\times\times\times$

따라서 제6항부터 처음으로 2000보다 커진다.

7. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$을 n에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$　　② $n^2 + 3n$　　③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$　　⑤ $3n^2 - 1$

해설

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$이므로

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \left\{(n-1)^2 + (n-1)\right\} \\ &= 2n \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2$

이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 2n$

$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k - 2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} (4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

8. $\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{100}{k}\right]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지않는 최대의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 291

해설

$\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{100}{k}\right]=100+50+33+25+20+16+14+12+11+10=$
291

9. 오른쪽 그림처럼 바둑판 모양의 칸에 1부터 시계 방향으로 차례로 자연수를 배열하였다. 이때, 1 아래로 생기는 수열 1, 4, 15, 34, $\cdots$ 에서 제 10항의 일의 자리 수는?

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	27
19	6	1	2	11	28
18	5	4	3	12	29
17	16	15	14	13	30
$\cdots$	$\cdots$	34	33	32	31

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

수열 1, 4, 15, 34, 61, $\cdots$

1, 4, 15, 34, 61, $\cdots$, a_{10}

$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$

3, 11, 19, 61, $\cdots$, b_9

이므로 $b_k = 3 + (k-1)8 = 8k - 5$

$\therefore a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^{9}(8k-5) = 1 + 8 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} - 5 \cdot 9 = 316$

따라서, 일의 자리 수는 6이다.

10. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 제 20항은?

① $\frac{9}{64}$ ② $\frac{11}{64}$ ③ $\frac{9}{32}$ ④ $\frac{19}{32}$ ⑤ $\frac{21}{32}$

해설

분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

제1군 제2군 제3군

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \cdots\cdots$

제 n군까지의 항수는

$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

따라서, 제 4군까지 항수는 15개이므로 구하는 제 20항은 제5군의 제5항이다.

한편, 제 n군의 제 m항은 $\frac{2m-1}{2^n}$ 이므로

제5군의 제5항은 $\frac{9}{2^5} = \frac{9}{32}$

11. 다음과 같은 수열에서 $(6,\ 4)$는 몇 번째 항인가?

$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),$
$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ \cdots$

① 제40항　② 제41항　③ 제42항
④ 제43항　⑤ 제44항

해설

(합이 2인 순서쌍)$=1$개, (합이 3인 순서쌍)$=2$개, $\cdots$ 합이 9개인 순서쌍까지의 개수의 합을 모두 더하면, $1+2+\cdots+8=36$이고, 합이 10인 순서쌍 중에서 $(6,\ 4)$는 여섯 번째이므로 42번째이다.

12. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$$\begin{array}{rl} & \vdots \\ + & a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ \hline & a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1) \\ & \quad = -1 + \dfrac{(n-1) \cdot n}{2} \end{array}$$

$$\therefore a_{10} = -1 + \frac{9 \cdot 10}{2}$$

$$= -1 + 45 = 44$$

13. 다음은 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 (n = 1, 2, 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$a_{n+1} - \boxed{(가)} = \frac{1}{2}(a_n - \boxed{(가)})$ 이므로 $a_n = \boxed{(가)} + (a_1 - \boxed{(가)})(\boxed{(나)})^{n-1}$

① 1, $\frac{1}{2}$　② 1, 2　③ 2, $\frac{1}{2}$　④ 2, 2　⑤ 3, $\frac{1}{2}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ 에서

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

이때, 수열 $\{a_n - 2\}$은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 2 + (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore$ (가) $= 2$, (나) $= \frac{1}{2}$

14. $a_1 = 4,\ a_2 = 6,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0\ (n \geq 1)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_n$의 값은?

① $2^{10} + 6$　　② $2^{10} + 0$　　③ $2^{10} + 18$

④ $2^{11} + 9$　　⑤ $2^{11} + 18$

해설

$a_{n+2} - a_{n+1} = P(a_{n+1} - a_n)$꼴로 변형하면
$a_{n+2} - (1+P)a_{n+1} + Pa_n = 0 \quad \therefore P = 2$
즉, $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$
이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$이라 하면 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$이고 공비가 2인 등비수열이다.
$\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$
$\therefore a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 4 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2-1} = 2^n + 2$
$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (2^n + 2) = \dfrac{2(2^{10} - 1)}{2-1} + 2 \cdot 10$
$= 2^{11} - 2 + 20 = 2^{11} + 18$

15. 양의 정수 n에 대하여 $p(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 이라 할 때 다음은 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n-1) = n\{p(n) - 1\}$ $(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 2$일 때 (좌변)$= p(1) = 1$
> (우변)$= 2\{p(2) - 1\} = 2\left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$이므로 성립한다.
> (ii) $n = k$ $(k \geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k-1) = k\{p(k) - 1\}$
> $p(1) + p(2) + \cdots + p(k) = (㉠)p(k) - k$
> $= (㉠)\{p(k+1) - ㉡\} - k$
> $= (k+1)\{p(k+1) - 1\}$ 이므로 $n = k+1$일 때 성립한다.
> 따라서 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① $k,\ \frac{1}{k}$
② $k,\ \frac{1}{k+1}$
③ $k+1,\ \frac{1}{k}$
④ $k+1,\ \frac{1}{k+1}$
⑤ $k+2,\ \frac{1}{k}$

해설

$n = k$ $(k \geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면
$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots p(k-1) = k\{p(k) - 1\}$이고,
$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(k) = k\{p(k) - 1\} + p(k)$
$= (k+1)p(k) - k$
$= (k+1)\left\{p(k+1) - \frac{1}{k+1}\right\} - k$
$= (k+1)\{p(k+1) - 1\}$
$\therefore$ ㉠ : $k+1$, ㉡ : $\frac{1}{k+1}$

16. $\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$를 $2^{\frac{q}{p}}$ 로 나타낼 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 53

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} &= \sqrt{4\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4\times 2}}} \\ &= \sqrt{4\sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2\cdot\sqrt[12]{2^5}} \\ &= \sqrt{\sqrt[12]{2^{24}\times 2^5}} = \sqrt[24]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{24}}\end{aligned}$$

따라서 $P=29,\ q=24$이므로 $p+q=53$

17. $2^x + \dfrac{1}{2^x} = 2$ 일 때, $8^x + \dfrac{1}{8^x}$ 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$8^x + \dfrac{1}{8^x} = (2^x)^3 + \left(\dfrac{1}{2^x}\right)^3$

$= \left(2^x + \dfrac{1}{2^x}\right)^3 - 3 \cdot 2^x \cdot \dfrac{1}{2^x}\left(2^x + \dfrac{1}{2^x}\right)$

$= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$

18. $\log a$ 의 정수 부분이 2 일 때, $A = \log a\sqrt{a}$ 의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \le A < 3$

② $\frac{3}{2} < A \le 3$

③ $2\sqrt{2} \le A < 3\sqrt{3}$

④ $3 \le A < \frac{9}{2}$

⑤ $3 < A \le \frac{9}{2}$

해설

$\log a$ 의 정수 부분이 2 이므로 $2 \le \log a < 3$

$\log a\sqrt{a} = \log a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log a$

$\frac{3}{2} \times 2 \le \frac{3}{2}\log a < \frac{3}{2} \times 3$

$\therefore 3 \le A < \frac{9}{2}$

19. $\log_{10} 275$ 의 값을 $\log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 11 = 1.041$ 을 이용하여 계산한 다음, 소수 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2.44

해설

$\log_{10} 275 = \log_{10}^{25\times 11} = 2\log_{10}^{5} + \log_{10}^{11}$
$= 2(1 - \log_{10}^{2}) + \log_{10}^{11}$
$= 2(1 - 0.301) + 1.041$
$= 2.439$
소수 셋째 자리에서 반올림하면 2.44

20. 다음 세 조건을 동시에 만족하는 두 자연수 x, y에 대하여 xy는?

> ㉠ x와 y의 상용로그의 정수 부분은 같다.
> ㉡ x와 $\frac{1}{y}$의 상용로그의 소수 부분은 같다.
> ㉢ x^3y^2의 상용로그의 정수 부분은 7이다.

① 10 ② 100 ③ 1000 ④ 2500 ⑤ 8000

해설

㉠ $\log x = n + \alpha$, (단, n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)
$\log y = n + \beta (0 \le \beta < 1)$
㉡ $\log \frac{1}{y} = \log y^{-1} = -\log y$
$= -n - \beta = -n + 1 - 1 - \beta$
$= (-n - 1) + 1 - \beta$
$1 - \beta = \alpha$
$\therefore \ \alpha + \beta = 1$
㉢ $\log x^3y^2 = 3\log x + 2\log y$
$= 3(n + \alpha) + 2(n + \beta)$
$= 5n + 3\alpha + 2\beta$
정수 부분이 7이므로
소수 부분은 $3\alpha + 2\beta - 2, \ n = 1$
$\therefore \log^{xy} = \log x + \log y$
$= n + \alpha + n + \beta$
$= 2n + \alpha + \beta = 2 + 1 = 3$
$\therefore xy = 10^3 = 1000$

21. 매년 말에 6만원씩 적립할 때, 10년 후의 원리합계는?
(단, 연이율은 6푼, 1년마다의 복리로 계산하고, $1.06^{10} \fallingdotseq 1.791$)

① 791000원　② 792000원　③ 793000원
④ 794000원　⑤ 795000원

해설

$$S_n = \frac{60000\left\{(1.06)^{10}-1\right\}}{0.06} = \frac{60000 \times 0.791}{0.06}$$
$$= 791000(\text{원})$$

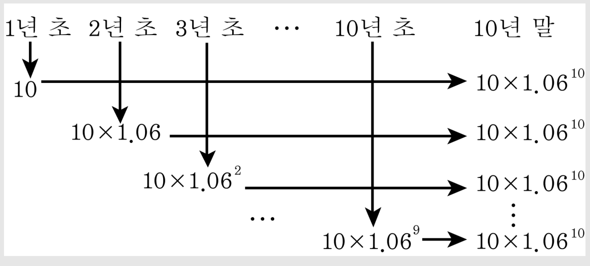
22. 정부가 통일 이후 필요한 비용을 마련하기 위해 예산의 일부를 2015년부터 매년 1월 1일 적립한다고 하자. 적립할 금액은 경제성장률을 감안하여 매년 전년도보다 6% 씩 증액한다. 2015년 1월 1일부터 10조원을 적립하기 시작한다면 2024년 12월 31일 까지 적립된 금액의 원리합계는 몇 조원인지 구하여라. (단, 연이율 6%, 1년마다의 복리로 계산하고 $1.06^{10} = 1.8$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 180

해설

2015년 1월 1일 적립금이 10조원이므로 n년 후의 적립금은 10×1.06^n(조원)이다.



따라서 구하는 적립금의 원리합계는
$10 \times 10 \times 1.06^{10} = 10 \times 10 \times 1.8 = 180$(조원)

23. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음 보기와 같을 때, 보기 중 수열 $\{a_n\}$이 등비수열인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $S_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$　　㉡ $S_n = 2^{n-1} - 2$

㉢ $S_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \left(2^{n-1} - \frac{1}{2}\right) - \left(2^{n-2} - \frac{1}{2}\right) = 2^{n-2}$

이것은 $n = 1$일 때에도 성립하므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열이다.

㉡ $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = -1$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2^{n-1} - 2) - (2^{n-2} - 2) = 2^{n-2}$

이것은 $n = 1$일 때 성립하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이 아니다.

㉢ $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = \frac{3}{8}$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right\} - \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

이것은 $n = 1$일 때 성립하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이 아니다.

따라서 보기 중 등비수열인 것은 ㉠이다.

24. $a_1 = 8,\ a_4 = 1$ 이고 각 항이 실수인 등비수열 a_n 에 대하여 수열 b_n 을 $b_n = \log_2 a_{2n}^2$ 으로 정의하면 수열 b_n 은 첫째항이 c 이고 공차가 d 인 등차수열이다. 이때, $c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a_4 = 8 \times r^3 = 1$ 에서 $r^3 = \frac{1}{8},\ r = \frac{1}{2}$

$a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 $a_{2n} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$

$\therefore\ b_n = \log_2 \left\{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right\}^2 = 2\log_2 2^{-2n+4}$

$= 2(-2n+4) = -4n+8$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 4 이고 공차가 -4 인 등차수열이다.

$\therefore\ c-d = 8$

25. $3^x+3^y=5,\ x+y=1$일 때, $(3^x+1)(3^{2x}-3^x+1)+(3^y-1)(3^{2y}+3^y+1)$의 값은?

① 60 ② 70 ③ 80 ④ 90 ⑤ 100

해설

$$
\begin{aligned}
&(3^x+1)(3^{2x}-3^x+1)+(3^y-1)(3^{2y}+3^y+1)\\
&=(3^{3x}+1)+(3^{3y}-1)\\
&=3^{3x}+3^{3y}\\
&=(3^x+3^y)^3-3\cdot 3^x\cdot 3^y\cdot(3^x+3^y)\\
&=(3^x+3^y)^3-3^{x+y+1}(3^x+3^y)\\
&=5^3-3^2\cdot 5=80
\end{aligned}
$$