

1. $\sqrt[4]{4 + \sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$ 을 간단히 하면?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{4 + \sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \sqrt{\sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \frac{\sqrt{5 - 3}}{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{\frac{8}{2}} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{4} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[4]{a \sqrt[3]{a^k}}$ 일 때, 상수 k 의 값은? (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 19

해설

$$a^{\frac{5}{3}} = (a^{\frac{k}{3}+1})^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{k}{12} + \frac{1}{4}$$

$$20 = k + 3$$

$$k = 17$$

3. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\log_3 64} \\ &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12\end{aligned}$$

4. $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$ 라고 할 때, $\log_8 125$ 를 a , b 로 나타내면?

① $1 - 2b$

② $2b - a$

③ $a - b$

④ $\frac{b}{a}$

⑤ $\frac{a}{b}$

해설

$$\log_3 2 = a \quad \log_3 5 = b$$

$$\log_8 125 = \log_{2^3} 5^3 = \log_2 5$$

$$= \frac{\log_3 5}{\log_3 2} = \frac{b}{a}$$

5. 1이 아닌 양수 p 와 세 양수 x, y, z 에 대하여 $\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z = -3$ 가 성립할 때, xyz 의 값은?

① $\frac{1}{p^3}$

② $\frac{1}{2p}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $2p$

⑤ p^2

해설

$$\begin{aligned} & \log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z \\ &= \log_p x + \frac{2}{2}\log_p y + \frac{3}{3}\log_p z \\ &= \log_p xyz = -3 \\ &\therefore xyz = p^{-3} = \frac{1}{p^3} \end{aligned}$$

6. 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 $\{a_n\}$ 이라 할 때, 수열 $b_n = 2^{a_n}$ 이다.
수열 $\{b_n\}$ 에서 처음으로 2000보다 커지는 항은? (단, $\log 2 = 0.3010$)

① 제5항

② 제6항

③ 제7항

④ 제8항

⑤ 제9항

해설

$$a_n = 2n \text{ 이므로 } b_n = 2^{2n}$$

$$4^n > 2000 \text{ 에서 } 2n \log 2 > \log 2000$$

$$\therefore n > \frac{3.3010}{0.6020} = 5.48 \times \times \times$$

따라서 제6항부터 처음으로 2000보다 커진다.

7. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$ 일 때, $\sum_{k=1}^n a_{2k-1}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$

② $n^2 + 3n$

③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$

⑤ $3n^2 - 1$

해설

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n \text{ 이므로}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = 2$$

이것은 ㉞에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 2n$$

$$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^n (4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

8. $\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지않는 최대의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 291

해설

$$\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor = 100 + 50 + 33 + 25 + 20 + 16 + 14 + 12 + 11 + 10 = 291$$

9. 오른쪽 그림처럼 바둑판 모양의 칸에 1부터 시계 방향으로 차례로 자연수를 배열하였다. 이때, 1 아래로 생기는 수열 1, 4, 15, 34, ...에서 제 10항의 일의 자리 수는?

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	27
19	6	1	2	11	28
18	5	4	3	12	29
17	16	15	14	13	30
...	...	34	33	32	31

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

수열 1, 4, 15, 34, 61, ...

1, 4, 15, 34, 61, ..., a_{10}

$\begin{matrix} \vee & \vee & \vee & \vee & & \vee \\ 1 & 4 & 15 & 34 & 61 & \dots \end{matrix}$

3, 11, 19, 61, ..., b_9

이므로 $b_k = 3 + (k-1)8 = 8k - 5$

$$\therefore a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^9 (8k - 5) = 1 + 8 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} - 5 \cdot 9 = 316$$

따라서, 일의 자리 수는 6이다.

10. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 에서 제 20 항은?

① $\frac{9}{64}$

② $\frac{11}{64}$

③ $\frac{9}{32}$

④ $\frac{19}{32}$

⑤ $\frac{21}{32}$

해설

분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

제1군 제2군 제3군

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \dots$$

제 n 군까지의 항수는

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

따라서, 제 4군까지 항수는 15 개이므로 구하는 제 20 항은 제5군의 제5항이다.

한편, 제 n 군의 제 m 항은 $\frac{2m-1}{2^n}$ 이므로

$$\text{제5군의 제5항은 } \frac{9}{2^5} = \frac{9}{32}$$

11. 다음과 같은 수열에서 (6, 4)는 몇 번째 항인가?

(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1),
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 5), (2, 4), ...

① 제40 항

② 제41 항

③ 제42 항

④ 제43 항

⑤ 제44 항

해설

(합이 2인 순서쌍)= 1개, (합이 3인 순서쌍)= 2개, ... 합이 9
개인 순서쌍까지의 개수의 합을 모두 더하면, $1+2+\cdots+8=36$
이고, 합이 10인 순서쌍 중에서 (6, 4)는 여섯 번째이므로 42
번째이다.

12. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ + & \left| \begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ a_n = a_1 + 1 + \dots + (n-1) \\ = -1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{10} &= -1 + \frac{9 \cdot 10}{2} \\ &= -1 + 45 = 44 \end{aligned}$$

13. 다음은 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$$a_{n+1} - \boxed{\text{(가)}} = \frac{1}{2}(a_n - \boxed{\text{(가)}}) \text{ 이므로}$$

$$a_n = \boxed{\text{(가)}} + (a_1 - \boxed{\text{(가)}})(\boxed{\text{(나)}})^{n-1}$$

① $1, \frac{1}{2}$

② $1, 2$

③ $2, \frac{1}{2}$

④ $2, 2$

⑤ $3, \frac{1}{2}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \text{ 에서}$$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

이때, 수열 $\{a_n - 2\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - 2 = (a_1 - 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2 + (a_1 - 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \text{(가)} = 2, \text{(나)} = \frac{1}{2}$$

14. $a_1 = 4, a_2 = 6, a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ ($n \geq 1$) 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_n$ 의 값은?

① $2^{10} + 6$

② $2^{10} + 0$

③ $2^{10} + 18$

④ $2^{11} + 9$

⑤ $2^{11} + 18$

해설

$a_{n+2} - a_{n+1} = P(a_{n+1} - a_n)$ 꼴로 변형하면

$$a_{n+2} - (1+P)a_{n+1} + Pa_n = 0 \quad \therefore P = 2$$

$$\text{즉, } a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$ 이고 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\therefore a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 4 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n + 2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (2^n + 2) = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 2 \cdot 10$$

$$= 2^{11} - 2 + 20 = 2^{11} + 18$$

15. 양의 정수 n 에 대하여 $p(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 이라 할 때 다음은 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n-1) = n \{p(n) - 1\}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때 (좌변) $= p(1) = 1$

(우변) $= 2 \{p(2) - 1\} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$ 이므로 성립한다.

(ii) $n = k$ ($k \geq 2$) 일 때 성립한다고 가정하면 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k-1) = k \{p(k) - 1\}$

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(k) = (\ominus)p(k) - k$$

$$= (\ominus) \{p(k+1) - \textcircled{\text{L}}\} - k$$

$= (k+1) \{p(k+1) - 1\}$ 이므로 $n = k+1$ 일 때 성립한다.
따라서 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 $\ominus$, $\textcircled{\text{L}}$ 에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① $k, \frac{1}{k}$

② $k, \frac{1}{k+1}$

③ $k+1, \frac{1}{k}$

④ $k+1, \frac{1}{k+1}$

⑤ $k+2, \frac{1}{k}$

해설

$n = k$ ($k \geq 2$) 일 때 성립한다고 가정하면

$$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(k-1) = k \{p(k) - 1\} \text{ 이고,}$$

$$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(k) = k \{p(k) - 1\} + p(k)$$

$$= (k+1)p(k) - k$$

$$= (k+1) \left\{ p(k+1) - \frac{1}{k+1} \right\} - k$$

$$= (k+1) \{p(k+1) - 1\}$$

$$\therefore \ominus : k+1, \textcircled{\text{L}} : \frac{1}{k+1}$$

16. $\sqrt{4 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2}}}$ 를 $2^{\frac{q}{p}}$ 로 나타낼 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 53

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2}}} &= \sqrt{4 \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4} \times 2}} \\ &= \sqrt{4 \sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2 \cdot \sqrt[12]{2^5}} \\ &= \sqrt[12]{2^{24} \times 2^5} = \sqrt[12]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{12}}\end{aligned}$$

따라서 $P = 12, q = 29$ 이므로 $p + q = 41$

17. $2^x + \frac{1}{2^x} = 2$ 일 때, $8^x + \frac{1}{8^x}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$8^x + \frac{1}{8^x} = (2^x)^3 + \left(\frac{1}{2^x}\right)^3$$

$$= \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^3 - 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^x} \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)$$

$$= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$$

18. $\log a$ 의 정수 부분이 2일 때, $A = \log a \sqrt{a}$ 의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \leq A < 3$

② $\frac{3}{2} < A \leq 3$

③ $2\sqrt{2} \leq A < 3\sqrt{3}$

④ $3 \leq A < \frac{9}{2}$

⑤ $3 < A \leq \frac{9}{2}$

해설

$\log a$ 의 정수 부분이 2이므로 $2 \leq \log a < 3$

$$\log a \sqrt{a} = \log a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log a$$

$$\frac{3}{2} \times 2 \leq \frac{3}{2} \log a < \frac{3}{2} \times 3$$

$$\therefore 3 \leq A < \frac{9}{2}$$

19. $\log_{10} 275$ 의 값을 $\log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 11 = 1.041$ 을 이용하여 계산한 다음, 소수 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2.44

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 275 &= \log_{10}^{25 \times 11} = 2 \log_{10}^5 + \log_{10}^{11} \\ &= 2(1 - \log_{10}^2) + \log_{10}^{11} \\ &= 2(1 - 0.301) + 1.041 \\ &= 2.439\end{aligned}$$

소수 셋째 자리에서 반올림하면 2.44

20. 다음 세 조건을 동시에 만족하는 두 자연수 x, y 에 대하여 xy 는?

㉠ x 와 y 의 상용로그의 정수 부분은 같다.

㉡ x 와 $\frac{1}{y}$ 의 상용로그의 소수 부분은 같다.

㉢ x^3y^2 의 상용로그의 정수 부분은 7이다.

① 10

② 100

③ 1000

④ 2500

⑤ 8000

해설

㉠ $\log x = n + \alpha$, (단, n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)

$\log y = n + \beta$ ($0 \leq \beta < 1$)

㉡ $\log \frac{1}{y} = \log y^{-1} = -\log y$

$= -n - \beta = -n + 1 - 1 - \beta$

$= (-n - 1) + 1 - \beta$

$1 - \beta = \alpha$

$\therefore \alpha + \beta = 1$

㉢ $\log x^3y^2 = 3\log x + 2\log y$

$= 3(n + \alpha) + 2(n + \beta)$

$= 5n + 3\alpha + 2\beta$

정수 부분이 7이므로

소수 부분은 $3\alpha + 2\beta - 2$, $n = 1$

$\therefore \log^{xy} = \log x + \log y$

$= n + \alpha + n + \beta$

$= 2n + \alpha + \beta = 2 + 1 = 3$

$\therefore xy = 10^3 = 1000$

21. 매년 말에 6만원씩 적립할 때, 10년 후의 원리합계는?
(단, 연이율은 6푼, 1년마다의 복리로 계산하고, $1.06^{10} \approx 1.791$)

- ① 791000 원 ② 792000 원 ③ 793000 원
④ 794000 원 ⑤ 795000 원

해설

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{60000 \{ (1.06)^{10} - 1 \}}{0.06} = \frac{60000 \times 0.791}{0.06} \\ &= 791000(\text{원}) \end{aligned}$$

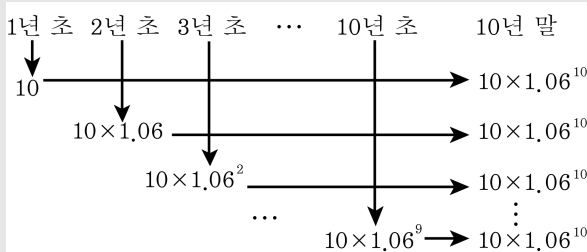
22. 정부가 통일 이후 필요한 비용을 마련하기 위해 예산의 일부를 2015년부터 매년 1월 1일 적립한다고 하자. 적립할 금액은 경제성장률을 감안하여 매년 전년도보다 6%씩 증액한다. 2015년 1월 1일부터 10조원을 적립하기 시작한다면 2024년 12월 31일 까지 적립된 금액의 원리합계는 몇 조원인지 구하여라. (단, 연이율 6%, 1년마다의 복리로 계산하고 $1.06^{10} = 1.8$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 180

해설

2015년 1월 1일 적립금이 10조원이므로 n 년 후의 적립금은 10×1.06^n (조원)이다.



따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$$10 \times 10 \times 1.06^{10} = 10 \times 10 \times 1.8 = 180(\text{조원})$$

23. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 다음 보기와 같을 때, 보기 중 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열인 것을 모두 고르면?

보기

$$\begin{array}{ll} \text{㉠ } S_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2} & \text{㉡ } S_n = 2^{n-1} - 2 \\ \text{㉢ } S_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & \end{array}$$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\text{㉠ } n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \left(2^{n-1} - \frac{1}{2}\right) - \left(2^{n-2} - \frac{1}{2}\right) = 2^{n-2} \end{aligned}$$

이것은 $n = 1$ 일 때에도 성립하므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열이다.

$$\text{㉡ } n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = -1$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^{n-1} - 2) - (2^{n-2} - 2) = 2^{n-2} \end{aligned}$$

이것은 $n = 1$ 일 때 성립하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이 아니다.

$$\text{㉢ } n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = \frac{3}{8}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \right\} - \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

이것은 $n = 1$ 일 때 성립하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이 아니다.

따라서 보기 중 등비수열인 것은 ㉠이다.

24. $a_1 = 8$, $a_4 = 1$ 이고 각 항이 실수인 등비수열 a_n 에 대하여 수열 b_n 을 $b_n = \log_2 a_{2n}^2$ 으로 정의하면 수열 b_n 은 첫째항이 c 이고 공차가 d 인 등차수열이다. 이때, $c - d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$a_4 = 8 \times r^3 = 1 \text{ 에서 } r^3 = \frac{1}{8}, r = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ 이므로 } a_{2n} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\therefore b_n = \log_2 \left\{ 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \right\}^2 = 2 \log_2 2^{-2n+4}$$

$$= 2(-2n + 4) = -4n + 8$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 4이고 공차가 -4인 등차수열이다.

$$\therefore c - d = 8$$

25. $3^x + 3^y = 5$, $x + y = 1$ 일 때, $(3^x + 1)(3^{2x} - 3^x + 1) + (3^y - 1)(3^{2y} + 3^y + 1)$ 의 값은?

① 60

② 70

③ 80

④ 90

⑤ 100

해설

$$\begin{aligned} & (3^x + 1)(3^{2x} - 3^x + 1) + (3^y - 1)(3^{2y} + 3^y + 1) \\ &= (3^{3x} + 1) + (3^{3y} - 1) \\ &= 3^{3x} + 3^{3y} \\ &= (3^x + 3^y)^3 - 3 \cdot 3^x \cdot 3^y \cdot (3^x + 3^y) \\ &= (3^x + 3^y)^3 - 3^{x+y+1}(3^x + 3^y) \\ &= 5^3 - 3^2 \cdot 5 = 80 \end{aligned}$$