1. $\log_2(\log_8 x) = -1$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{2}$

해설

$\log_2(\log_8 x) = -1$ 에서

$\log_8 x = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore x = 8^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

2. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^1$

(10년후 원리합계)

$= 1000$만$\times 1.04^{10}$

$= 1000$만 $\times 1.48$

$= 1480$만(원)

3. 첫째항부터 제 n항까지의 합 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2-1) = 3 \cdot 2^{n-1} \cdots$ ㉠

따라서, $n \geq 2$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되려면

㉠이 $n = 1$일 때에도 성립해야 하므로

$3 = 6 + k \quad \therefore \ k = -3$

4. 수열 $1\cdot2\cdot4,\ 2\cdot4\cdot8,\ 3\cdot6\cdot12,\ 4\cdot8\cdot16,\cdots$ 의 제 10항까지의 합은?

① 400 ② 1100 ③ 12100

④ 24200 ⑤ 48400

해설

$a_k = k\cdot 2k\cdot 4k = 8k^3$ 이므로

$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} 8k^3 = 8\cdot\left(\dfrac{10\cdot 11}{2}\right)^2 = 2\cdot 10^2\cdot 11^2 = 24200$

5. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2n^2 - n + 3$인 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1}$의 값은?

① 82 ② 84 ③ 86 ④ 88 ⑤ 90

해설

$S_n = 2n^2 - n + 3$이므로

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - n + 3 - \left\{2(n-1)^2 - (n-1) + 3\right\} \\ &= 4n - 3 \ (n \geq 2) \end{aligned}$$

$a_1 = S_1 = 2 - 1 + 3 = 4$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} &= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \\ &= 4 + 9 + 17 + 25 + 33 = 88 \end{aligned}$$

6. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\dfrac{9}{10}$　② $\dfrac{11}{10}$　③ $\dfrac{10}{11}$　④ $\dfrac{20}{11}$　⑤ $\dfrac{11}{20}$

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

7. 수열 $1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots,$에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면

$1/\ 1,\ 2/1,\ 2,\ 3/\ 1,\ 2,\ 3,\ 4/\cdots$

1군은 1

2군은 $1,\ 2$

3군은 $1,\ 2,\ 3$이므로

7군은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$

(6까지의 항의 총수)$= 1+2+\cdots+6=21$

$21+7=28$(번째 항)

8. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 $\frac{5}{64}$는 제 몇 항인가?

① 제32항　② 제33항　③ 제34항　④ 제35항　⑤ 제36항

해설

분모가 같은 것끼리 같은 군으로 묶으면

$(\frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}), (\frac{1}{16}, \cdots), \cdots$

각 군의 첫째항은 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ 이므로 $\frac{1}{64}$는 제 6군의 첫째항이고, 각 군의 분자는 $1, 3, 5, 7, \cdots$ 이므로 $\frac{5}{64}$는 제 6군의 3번째 항이다.

각 군의 항수는 $1, 2, 4, 8, \cdots$ 이므로 구하는 항의 수는

$(1+2+4+8+16)+3=34$

9. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3a_n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{20}의 값은?

① $2 \cdot 3^{19} - 1$ ② $2 \cdot 3^{19} + 1$ ③ $2 \cdot 3^{20} - 1$

④ $2 \cdot 3^{20} + 1$ ⑤ $2 \cdot 3^{21} - 1$

해설

$a_{n+1} - \alpha = (a_n - \alpha)$꼴로 변형한다.

$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형하면

$a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha$에서

$-2\alpha = 2 \quad \therefore \alpha = -1$

즉, $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$

따라서 수열 $\{a_n + 1\}$은

첫째항이 $a_1 + 1 = 5 + 1 = 6$이고 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n + 1 = 6 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 1$

$\therefore a_{20} = 6 \cdot 3^{19} - 1 = 2 \cdot 3^{20} - 1$

10. $a_1 = 4$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_{n+1} = 3S_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이 성립할 때, 제 5항은?

① 678 ② 708 ③ 738 ④ 768 ⑤ 798

해설

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$이고 $a_{n+1} = 3S_n$이므로

$S_{n+1} - S_n = 3S_n$

$\therefore S_{n+1} = 4S_n$

이때, $a_1 = S_1 = 4$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이다.

$\therefore S_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1} (n \geq 2)$

$\therefore a_5 = 3 \cdot 4^4 = 768$

11. 높이가 h인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가 $a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 이 되었을 때, $\frac{a}{h}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

n번째 날의 탑의 높이를 a_n이라 하면 $(n+1)$째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이 a_n과 그 높이의 절반인 $\frac{1}{2}a_n$의 합이므로

$a_1 = \frac{h}{2}$ 이고, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$

$\therefore a_n = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10} = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{9} = \frac{h}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

즉, $a = \frac{h}{3}$ 이므로 $\frac{a}{h} = \frac{1}{3}$

12. $\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$를 $2^{\frac{q}{p}}$ 로 나타낼 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 53

해설

$$\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{4\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \times 2}}}$$
$$= \sqrt{4\sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2 \cdot \sqrt[12]{2^5}}$$
$$= \sqrt{\sqrt[12]{2^{24} \times 2^5}} = \sqrt[24]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{24}}$$

따라서 $P = 29,\ q = 24$이므로 $p+q = 53$

13. $a>0,\ b>0$일 때, $\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}}$을 간단히 하면?

① $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}}$ ② $\sqrt[8]{\frac{a^3}{b^3}}$ ③ $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^5}}$ ④ $\sqrt[8]{\frac{b^5}{a^3}}$ ⑤ $\sqrt[8]{\frac{a^5}{b^3}}$

해설

$$\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}}$$

$$=\sqrt{\frac{b}{a}}\times\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\times\sqrt[8]{\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\times\frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}}\times\frac{b^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}}$$

$$=a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}\times b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}}=a^{-\frac{3}{8}}\times b^{\frac{3}{8}}$$

$$=\frac{b^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{3}{8}}}=\frac{\sqrt[8]{b^3}}{\sqrt[8]{a^3}}=\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}}$$

14. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$ 일 때, $a-\frac{1}{a}$ 의 값은?(단, $a>1$)

① $\frac{15}{4}$　② 5　③ $\frac{15}{2}$　④ 15　⑤ 1

해설

곱셈 공식의 변형 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$ 에 의하여

$$\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-4=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(\because a>1)$$

$$\therefore a-\frac{1}{a}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}$$

15. $x>0$이고 $x^2+x^{-2}=7$일 때, $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$의 값은?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

해설

곱셈 공식을 써서 식을 변형한다.

$x^2+x^{-2}=7$

$(x+x^{-1})^2=x^2+x^{-2}+2$에서

$(x+x^{-1})^2=7+2=9$

$x+x^{-1}>0$이므로 $x+x^{-1}=3$

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2$에서

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=3+2=5$

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0$이므로 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

$\therefore (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})=3\sqrt{5}$

16. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$을 이용하여 $\log_{10} 2.25$의 값을 계산하면?

① 0.1661 ② 0.1761 ③ 0.1771

④ 0.3522 ⑤ 0.5283

해설

$\log_{10} 2.25 = \log_{10}(3^2 \times 5^2 \div 100)$

$= 2\log 3 + 2(1 - \log 2) - 2$

$= 0.3522$

17. $\log \dfrac{x}{4.71} = 1.9812$를 만족하는 양수 x의 값을 다음 상용로그표를 이용하여 구하여라.

수	0	1	1	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	$\cdots$
4.6	.6628	.6737	.6647	.6656	$\cdots$
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

▶ 답 :

▷ 정답 : 451

해설

$\log x$의 가수를 구하고, 가수가 같은 로그의 진수를 상용로그표에서 찾는다.

$\log \dfrac{x}{4.71} = \log x - \log 4.71 = \log x - 0.6730 = 1.9812$이므로

$\log x = 2.6542 = 2 + 0.6542$

로그표에서 $\log 4.51 = 0.6542$이므로 $x = 451$

18. $[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots+[\log 2014]$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2007　② 3515　③ 4914　④ 4935　⑤ 7826

해설

(i) $1 \le n < 10$일 때, $0 \le \log n < 1$이므로 $[\log n]=0$

(ii) $10 \le n < 100$일 때, $1 \le \log n < 2$이므로 $[\log n]=1$

(iii) $100 \le n < 1000$일 때, $2 \le \log n < 3$이므로 $[\log n]=2$

(iv) $1000 \le n < 10000$일 때, $3 \le \log n < 4$이므로 $[\log n]=3$

(i), (ii), (iii), (iv)에서

$[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots+[\log 2014]$

$=0\times 9+1\times 90+2\times 900+3\times 1015=4935$

19. 한 은행은 고객으로부터 100만원을 연이율 5%의 5년 만기 정기예금으로 받으면 그 중에서 90만원을 연이율 r%로 5년 동안 대출하고 나머지 10만원은 예비비로 보관한다. 5년 후 은행은 대출금을 이자와 함께 회수하고 고객에게 정기예금을 이자와 함께 지불하여 20만원의 수익을 얻으려고 한다. 이때, 대출 이율 r을 구하는 식은? (단, 모든 이자는 1년마다의 복리로 계산한다.)

① $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=10^5$

② $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=2\times10^5$

③ $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=3\times10^5$

④ $9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5=10^5$

⑤ $9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^6=2\times10^5$

해설

연이율 5%의 5년 만기 정기예금 100만원에 대한 5년 후의 원리합계는 $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5$

대출 이율이 r%인 대출금 90만원에 대한 5년 후의 원리합계는

$9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5$

이 은행은 100만원의 정기예금에서 90만원을 대출하고 10만원의 예비비를 보관하고 있으므로 5년 후 20만원의 수익을 얻으려면 정기예금의 원리합계와 대출금의 원리합계의 차가 10만원이면 된다.

$\therefore\ 9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5=10^5$

20. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 3^n - 1$인 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열이다. 이때, $a + r$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$S_n = 3^n - 1$

$S_{n-1} = 3^{n-1} - 1$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1 \\ &= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2) \end{aligned}$$

$a_1 = S_1 = 2$

$\therefore a = 2,\ r = 3$

$\therefore a + r = 2 + 3 = 5$

21. $a_1 = 8,\ a_4 = 1$이고 각 항이 실수인 등비수열 a_n에 대하여 수열 b_n을 $b_n = \log_2 a_{2n}^2$으로 정의하면 수열 b_n은 첫째항이 c이고 공차가 d인 등차수열이다. 이때, $c-d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a_4 = 8 \times r^3 = 1$에서 $r^3 = \dfrac{1}{8},\ r = \dfrac{1}{2}$

$a_n = 8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 $a_{2n} = 8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-1}$

$$\therefore\ b_n = \log_2 \left\{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right\}^2 = 2\log_2 2^{-2n+4}$$

$= 2(-2n+4) = -4n+8$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 -4인 등차수열이다.

$\therefore\ c-d = 8$

22. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, $b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{20}$과 같은 것은?

① $a_{20}-a_{19}$ ② $a_{20}-a_2$ ③ $a_{21}-a_{20}$

④ $a_{21}-a_2$ ⑤ $a_{21}-a_1$

해설

$b_n=a_{n+1}-a_n$이므로

$b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{20}$

$=(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{21}-a_{20})$

$=-a_2+a_{21}=a_{21}-a_2$

23. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{|a-3|}(3ax^2-ax+1)$이 정의되기 위한 정수 a의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

(i) 밑의 조건에서 $|a-3|>0$이고 $|a-3|\neq 1$

$\therefore a\neq 3,\ a\neq 2,\ a\neq 4\cdots\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 진수조건에서 $3ax^2-ax+1>0$

① $a=0$ 일 때, $1>0$ 이므로 성립

② $a>0$일 때, 방정식 $3ax^2-ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-12a<0,\ a(a-12)<0$

$\therefore 0<a<12$

①, ②에서 $0\leq a<12\cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수는 0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11의 9개다.

24. 2.4^n 의 정수부분이 네 자리가 되도록 하는 최소의 정수 n 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3, \log 3 = 0.48$ 로 계산한다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

2.4^n 의 정수부분이 4자리이므로 $\log 2.4^n$ 의 지표는 3이다.

$3 \le \log 2.4 < 4$

$$\frac{3}{\log 2.4} \le n < \frac{4}{\log 2.4}$$

이때, $\log 2.4 = \log \frac{24}{10} = \log 24 - \log 10$

$= \log(2^3 \times 3) - \log 10$

$= 3\log 2 + \log 3 - 1$

$= 3 \times 0.3 + 0.48 - 1 = 0.38$

이므로 $\frac{3}{0.38} \le n < \frac{4}{0.38}$

$\therefore 7.89 \times \times\times \le n < 10.52 \times \times\times$

따라서 위의 범위를 만족하는 최소의 정수 n 의 값은 8이다.

25. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면 $\log_4(S_n+p) = n-1$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열이다. 이때, 세 상수 a, r, p의 합 $a+r+p$의 값은?

① 1　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{5}{3}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 5

해설

$\log_4(S_n+p) = n-1$에서 $S_n+p = 4^{n-1}$이므로

$S_n = 4^{n-1} - p$

이때,

$a_1 = S_1 = 4^{1-1} - p = 1 - p \cdots$ ㉠

$a_n = S_n - S_{n-1} = (4^{n-1} - p) - (4^{n-2} - p)$

$= (4-1)4^{n-2}$

$= 3 \cdot 4^{n-2}$(단, $n \geq 2$)$\cdots$ ㉡

이때, ㉡은 $a_2 = 3$, 공비 $r = 4$인 등비수열을 이루므로 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면

$a = a_1 = \frac{a_2}{4} = \frac{3}{4}$이어야 한다.

따라서, $1 - p = \frac{3}{4}$이어야 한다.

$\therefore\ p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore\ a + r + p = \frac{3}{4} + 4 + \frac{1}{4} = 5$