

1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a^2 \div a^{-3} \times a^4 = a^9$

③ $\frac{a^2 \times a^{-3}}{a^{-2} \times a^4} = a^{-2}$

⑤ $\frac{a^3 \times a^{-4}}{a^2 \times a^{-5}} = a^9$

② $(a^{-3})^2 \times (a^2)^{-4} = a^{-14}$

④ $\frac{(a^3)^{-2}}{a^5 \times a^2} = a^{-16}$

해설

③ $\frac{a^2 \times a^{-3}}{a^{-2} \times a^4} = \frac{a^{-1}}{a^2} = a^{-1-2} = a^{-3}$

2. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

① 385

② 550

③ 1100

④ 1150

⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \cdot \sum_{j=1}^{10} j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) \\ &= 385 \end{aligned}$$

3. 다음 수열의 □안에 알맞은 두 수의 합을 구하면?

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \square, \square \dots$$

① $\frac{4}{21}$

② $\frac{8}{21}$

③ $\frac{10}{21}$

④ $\frac{14}{21}$

⑤ $\frac{16}{21}$

해설

균으로 나눠 보면

$$\frac{1}{1} / \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1} / \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1} /$$

따라서 $\frac{1}{7}, \frac{2}{6}$ 가 됨을 알 수 있다.

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$$

4. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1}

② 2^n

③ 2^{n-2}

④ 2^{n+1}

⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 2a_n$$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-2} \end{aligned}$$

5. $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}}$ 를 간단히 하면?

- ① $\sqrt[4]{a^3}$ ② $\sqrt[6]{a^5}$ ③ $\sqrt[13]{a^5}$ ④ $\sqrt[7]{a^8}$ ⑤ $\sqrt{a^5}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}} \\ &= \sqrt[3]{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot a^{-\frac{1}{4}}} \\ &= (a^{1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} \end{aligned}$$

6. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 이 정의되기 위한 실수 x 의 값의 범위를 구하면?

① $3 < x < 4$

② $5 < x < 7$

③ $-1 < x < 3$

④ $x > 0$

⑤ $2 < x < 5$

해설

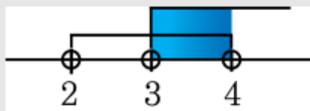
$$x - 3 \neq 1, x - 3 > 0,$$

$$-x^2 + 6x - 8 > 0 \text{ 이므로}$$

$$x \neq 4, x > 3$$

$$x^2 - 6x + 8 < 0$$

$$2 < x < 4$$



$$\therefore 3 < x < 4$$

7. $3^{\log_3 \frac{4}{7} + \log_3 7}$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 4

④ 5

⑤ 7

해설

$$3^{\log_3 \frac{4}{7} + \log_3 7} = 3^{\log_3 4} = 4$$

8. 다음 등식이 성립하도록 하는 c 의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=11}^{100} (k-2)^2 = \sum_{k=11}^{100} k^2 - 4 \sum_{k=11}^{100} k + c$$

▶ 답:

▷ 정답: 360

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=11}^{100} (k-2)^2 &= \sum_{k=11}^{100} (k^2 - 4k + 4) \\ &= \sum_{k=11}^{100} k^2 - 4 \sum_{k=11}^{100} k + \sum_{k=11}^{100} 4 \\ \therefore c &= \sum_{k=11}^{100} 4 = 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 90 = 360\end{aligned}$$

9. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$ 의 값은?

① $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

② $\frac{n(3n+5)}{4(2n+1)(n+2)}$

③ $\frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}$

④ $\frac{n(3n+4)}{4(n+1)(n+2)}$

⑤ $\frac{n(3n+4)}{2(n+1)(n+2)}$

해설

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right\} \\
 &+ \cdots + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}
 \end{aligned}$$

10. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 44

해설

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

⋮

$$\begin{aligned} + \left| \begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ a_n = a_1 + 1 + \dots + (n-1) \\ = -1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{10} &= -1 + \frac{9 \cdot 10}{2} \\ &= -1 + 45 = 44 \end{aligned}$$

11. 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_1 = \frac{1}{32}$, $\log_2 a_{n+1} = \frac{1}{2} + \log_2 a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의할 때, a_{101} 의 값은?

① 2^{40}

② 2^{45}

③ 2^{50}

④ 2^{55}

⑤ 2^{60}

해설

$$a_1 = \frac{1}{32}, \log_2 a_{n+1} = \frac{1}{2} + \log_2 a_n \text{에서 } \log_2 a_{n+1} = \log_2 \sqrt{2} + \log_2 a_n$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 \sqrt{2} a_n \quad \therefore a_{n+1} = \sqrt{2} a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{32}$, 공비가 $\sqrt{2}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore a_n = \frac{1}{32} \cdot \sqrt{2}^{n-1} = 2^{-5} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{n-11}{2}}$$

$$\therefore a_{101} = 2^{\frac{101-11}{2}} = 2^{45}$$

12. 세 수 $A = 2^{\frac{1}{2}}, B = 3^{\frac{1}{3}}, C = 9^{\frac{1}{9}}$ 의 대소 관계는?

① $A < B < C$

② $B < A < C$

③ $B < C < A$

④ $C < B < A$

⑤ $C < A < B$

해설

$$A = 2^{\frac{1}{2}} \text{ 이면 } A^{18} = (2^{\frac{1}{2}})^{18} = 2^9 = 512$$

$$B = 3^{\frac{1}{3}} \text{ 이면 } B^{18} = (3^{\frac{1}{3}})^{18} = 3^6 = 729$$

$$C = 9^{\frac{1}{9}} \text{ 이면 } C^{18} = (9^{\frac{1}{9}})^{18} = 9^2 = 81$$

$$C^{18} < A^{18} < B^{18} \text{ 이므로}$$

$$\therefore C < A < B$$

13. $2^x + \frac{1}{2^x} = 2$ 일 때, $8^x + \frac{1}{8^x}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$8^x + \frac{1}{8^x} = (2^x)^3 + \left(\frac{1}{2^x}\right)^3$$

$$= \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^3 - 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^x} \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)$$

$$= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$$

14. $9^x = 2$ 일 때, $\left(\frac{1}{27}\right)^{-4x}$ 의 값은?

① $\frac{1}{64}$

② $\frac{1}{16}$

③ 16

④ 64

⑤ 256

해설

$9^x = 2$ 이므로 $3^{2x} = 2$ 이다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= (3^{-3})^{-4x} = 3^{12x} \\ &= (3^{2x})^6 = 2^6 = 64\end{aligned}$$

15. $\log_5 250 = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라고 할 때, $n \times 25^\alpha$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$125 < 250 < 625$ 이므로

$$\log_5 5^3 < \log_5 250 < \log_5 5^4$$

$\log_5 250$ 의 정수부분은 $n = 3$ 이고

$$\text{소수부분은 } \alpha = \log_5 250 - \log_5 125 = \log_5 \frac{250}{125} = \log_5 2$$

따라서 $25^\alpha = 25^{\log_5 2} = 4$ 이므로 25^α 의 값과 정수부분 n 의 곱은 $3 \times 4 = 12$ 이다.

16. 방정식 $2x^2 - 8x - 1 = 0$ 의 두 근이 $\log_{10} a$, $\log_{10} b$ 일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값은?

① -2

② -8

③ -12

④ -26

⑤ 34

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\log_{10} a + \log_{10} b = 4,$$

$$\log_{10} a \cdot \log_{10} b = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} + \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} \\ &= \frac{(\log_{10} a + \log_{10} b)^2 - 2 \log_{10} a \cdot \log_{10} b}{\log_{10} a \cdot \log_{10} b} \\ &= \frac{16 + 1}{-\frac{1}{2}} = -34\end{aligned}$$

17. $\log_2 x = 5.2$ 일 때, $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분은 ? (단, $\log 2 = 0.30$)

① 0.32

② 0.36

③ 0.40

④ 0.44

⑤ 0.48

해설

$$\log_2 x = 5.2 \text{ 이므로 } \frac{\log x}{\log 2} = 5.2, \log x = 1.56$$

$$\log \frac{1}{x} = -\log x = -1.56 = -2 + 0.44$$

$$\therefore \log \frac{1}{x} \text{ 의 소수 부분은 } 0.44$$

18. $\log_{10} 275$ 의 값을 $\log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 11 = 1.041$ 을 이용하여 계산한 다음, 소수 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2.44

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 275 &= \log_{10}^{25 \times 11} = 2 \log_{10}^5 + \log_{10}^{11} \\ &= 2(1 - \log_{10}^2) + \log_{10}^{11} \\ &= 2(1 - 0.301) + 1.041 \\ &= 2.439\end{aligned}$$

소수 셋째 자리에서 반올림하면 2.44

19. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 할 때, $\log_2(S_n + k) = n$ 이다. 이때, 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이 되게 하는 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log_2(S_n + k) = n$ 에서

$$S_n + k = 2^n \quad \therefore S_n = 2^n - k$$

(i) $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2^1 - k = 2 - k$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - k) - (2^{n-1} - k)$$

$$= 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2 - 1) = 2^{n-1}$$

따라서 수열 a_2, a_3, a_4, \dots 는 공비가 2인 등비수열이다.

(i), (ii)로부터 수열 $2 - k, 2^1, 2^2, 2^3, \dots$ 이 등비수열이 되어야

하므로

$$2 - k = 1 \quad \therefore k = 1$$

20. 해수면의 빛의 밝기가 A 인 어느 지역의 바닷물은 깊이가 일정하게 깊어질수록 빛의 밝기가 일정한 비율로 감소한다고 한다. 깊이가 x m 인 곳의 빛의 밝기를 L 이라 하면 다음과 같은 관계가 있다.

$$L = Ak^x \text{ (단, } k \text{는 } k \neq 1 \text{인 양의 상수)}$$

이 지역의 바다에서 깊이가 20m 인 곳의 빛의 밝기는 해수면의 빛의 밝기의 50%일 때, 물속에서의 빛의 밝기가 해수면의 빛의 밝기의 $\frac{1}{6}$ 이 되는 지점의 수심은 am 이다. 이때, 실수 a 의 값을 구하여라. (단, $\log_2 3 = 1.6$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

깊이가 20m 인 곳의 빛의 밝기는 해수면의 빛의 밝기 A 의 50% 이므로

$$Ak^{20} = \frac{1}{2}A \quad \therefore k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{1}{20}}$$

따라서, 빛의 밝기가 해수면의 빛의 밝기의 $\frac{1}{6}$ 이 되는 지점의 수심을 x m라 하면

$$A \cdot 2^{-\frac{x}{20}} = \frac{1}{6}A \quad \therefore 2^{-\frac{x}{20}} = \frac{1}{6}$$

위의 식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$-\frac{x}{20} = \log_2 \frac{1}{6} = -\log_2 6$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= 20(\log_2 2 + \log_2 3) \\ &= 20(2 + 1.6) = 72(\text{m}) \end{aligned}$$

21. 매년 말에 6만원씩 적립할 때, 10년 후의 원리합계는?
(단, 연이율은 6푼, 1년마다의 복리로 계산하고, $1.06^{10} \approx 1.791$)

- ① 791000 원 ② 792000 원 ③ 793000 원
④ 794000 원 ⑤ 795000 원

해설

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{60000 \{ (1.06)^{10} - 1 \}}{0.06} = \frac{60000 \times 0.791}{0.06} \\ &= 791000(\text{원}) \end{aligned}$$

22. 올해 초 학자금 400 만원을 대출받아 그 해부터 매년 말에 a 만원씩 갚아서 10년에 걸쳐 모두 상환하려고 한다. 연이율 10%, 1년마다 복리로 계산할 때, a 의 값을 구하여라. (단, $1.1^{10} = 2.6$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 62

해설

올해 말부터 매년 말 a 만원씩 갚는다고 하면 10년에 걸쳐 갚아야 할 총 금액은

$$\begin{aligned} & a + a(1 + 0.1) + a(1 + 0.1)^2 + \cdots + a(1 + 0.1)^9 \\ &= \frac{a(1.1^{10} - 1)}{1.1 - 1} \\ &= \frac{a(2.6 - 1)}{0.1} = \frac{1.6a}{0.1} \\ &= 16a(\text{만원}) \cdots \textcircled{A} \end{aligned}$$

한편 400만원의 10년 후의 원리합계는 $400 \times 1.1^{10} = 400 \times 2.6 = 1040$ (만원)

ⓐ와 ⓑ이 같아야 하므로

$$16a = 1040 \quad \therefore a = 65$$

따라서 매달 65만원씩 갚아야 한다.

24. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$ 일 때, 옳은 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

- ㉠ $a_3 = 36$
 ㉡ $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.
 ㉢ $\{\log_{10} a_n\}$ 은 등차수열이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$$

$$a_1 = S_1 = 4 \text{ 이므로}$$

$$a_n = (2 \cdot 3^n - 2) - (2 \cdot 3^{n-1} - 2) = 4 \cdot 3^{n-1}$$

$$\text{㉠ } a_3 = 36$$

㉡ $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열이다.

㉢ $\{\log_{10} a_n\}$ 은 첫째항이 $\log_{10} 4$, 공차가 $\log_{10} 3$ 인 등차수열이다.

25. 다음과 같이 제 n 행의 가장 바깥쪽에는 n 을 쓰고, 그 안쪽에는 바로 위의 행의 두 수의 합을 써서 삼각형 모양으로 수를 나열하였다.

(제1행)		1			
(제2행)		2	2		
(제3행)		3	4	3	
(제4행)		4	7	7	4
(제5행)	5	11	14	11	5
	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮

이때, 제 10 행에 있는 모든 수의 합은?

① 1024

② 1248

③ 1534

④ 1980

⑤ 2046

해설

제 n 행의 모든 수의 합을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 10, a_4 = 22, \dots \text{이므로}$$

$$a_2 - a_1 = 3, a_3 - a_2 = 6, a_4 - a_3 = 12, \dots$$

따라서 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{10} &= 1 + \sum_{k=1}^9 3 \cdot 2^{k-1} \\ &= 1 + \frac{3(2^9 - 1)}{2 - 1} = 1534 \end{aligned}$$