1. 식 $\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{48} \times \sqrt[3]{8}$의 값은?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 8

해설

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{48} \times \sqrt[3]{8} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 4\sqrt{3} \times 2 = 8$$

2. $12^3 \times 2^{-4} \div 3^2$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

$$(2^2 \times 3)^3 \times 2^{-4} \times 3^{-2} = 2^6 \times 3^3 \times 2^{-4} \times 3^{-2}$$
$$= 2^2 \times 3 = 12$$

3. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 12

해설

$$\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\log_3 64}$$

$$= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12$$

4. 광이가 첫째 날에 2원, 둘째 날에 6원, 셋째 날에 18원, ⋯ 과 같이 매일 전날의 3배씩 30일 간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

① $3^{30}-2$원　② $3^{30}-1$원　③ 3^{30}원

④ $3^{30}+1$원　⑤ $3^{30}+2$원

해설

전날의 3배씩 모으므로 공비 $r=3$

$a=2,\ r=3$

$$\therefore\ S_{30}=\frac{2\cdot(3^{30}-1)}{3-1}=3^{30}-1$$

5. 수열 3, 33, 333, 3333, $\cdots$ 의 일반항 a_n을 구하여라.

① $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$　② $a_n = \frac{2}{3}(10^n - 1)$

③ $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 2)$　④ $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 2)$

⑤ $a_n = \frac{2}{3}(10^n - 2)$

해설

수열 9, 99, 999, 9999, $\cdots$ 에서

$9 = 10^1 - 1,\ 99 = 10^2 - 1,\ 999 = 10^3 - 1,\ 9999 = 10^4 - 1, \cdots$

따라서 이 수열의 일반항은 $10^n - 1$ 이다.

수열 3, 33, 333, 3333, $\cdots$ 의 각 항은

$3 = 9 \times \frac{1}{3},\ 33 = 99 \times \frac{1}{3},\ 333 = 999 \times \frac{1}{3},\ \cdots$ 이므로

주어진 수열의 일반항은 $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$ 이다.

6. $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n$ 은 0, 1, 2 중 어느 하나의 값을 갖는다. $\sum_{k=1}^{n} = 40$, $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 70$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k^3$ 의 값은?

① 110　　② 120　　③ 130　　④ 140　　⑤ 150

해설

$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n$ 중 1의 개수를 x, 2의 개수를 y라고 하면
$\sum_{k=1}^{n} a_k = x + 2y = 40 \cdots$ ㉠
$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = x + 4y = 70 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $x = 10,\ y = 15$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} a_k^3 = x + 8y = 10 + 120 = 130$

7. 1 에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 할 때, $\frac{S}{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 132

해설

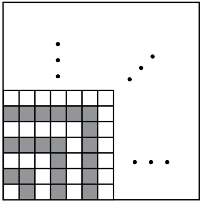
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 이므로
1 에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 하면
$(1+2+3+\cdots+10)^2 = (1^2+2^2+\cdots+10^2)+2S$

$$2S = \left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2 - \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 2640$$

$\therefore S = 1320$

$$\therefore \frac{S}{10} = 132$$

8. 한 변이 100cm 인 정사각형 모양의 바닥을 한 변이 5cm 인 정사각형 모양의 타일로 빈틈없이 붙이려고 한다. 그림과 같이 흰색 타일과 검정색 타일로 바닥을 붙일 때, 필요한 흰색타일의 총 개수는?


(□ : 흰색 타일, ■ : 검정색 타일)

① 185 ② 190 ③ 200 ④ 205 ⑤ 210

해설

흰색 타일의 총 개수는

$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + 5,\ a_3 = 1 + 5 + 9, \cdots$

$$a_{10} = 1 + 5 + 9 + \cdots + 37 = \frac{10(1+37)}{2} = 190$$

9. 다음 군수열에서 47은 몇 군의 몇째 항인가?

제1군	제2군	제3군	제4군	
(1),	(2, 3),	(4, 5, 6),	(7, 8, 9, 10),	$\cdots$

① 제9군의 9항 ② 제10군의 2항 ③ 제10군의 3항

④ 제11군의 2항 ⑤ 제11군의 3항

해설

각 군의 첫째항으로 만들어지는 수열

$\{a_n\}$에 대하여

$\{a_n\}: 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11, \cdots$

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{b_n\}: 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$

$b_n = n$이므로 제 n군의 첫째항 a_n은

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_{10} = 1 + \frac{10 \cdot 9}{2} = 46$$

따라서, 47은 제 10군의 2항이다.

10. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + n^2 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$의 n에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_1 = a_1 + 1^2 \\ & a_3 = a_2 + 2^2 \\ & a_4 = a_3 + 3^2 \\ & \quad\vdots \\ +) & a_{10} = a_9 + 9^2 \\ \hline \end{array}$$

$$a_{10} = a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2)$$

$$= 5 + \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6}$$

$$= 290$$

11. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$이 성립하고 $a_1 = 1$일 때, $a_{10} + 1$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$이므로 $\alpha = -1$

$\therefore\ a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$

12. 두 수열 a_n, b_n에 대하여 $b_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$이 성립한다. $b_n = 3^{n(n+1)}$일 때, $\sum_{k=1}^{100} \dfrac{1}{\log_3 a_k \cdot \log_3 a_{k+1}}$의 값은?

① $\dfrac{5}{33}$　② $\dfrac{25}{99}$　③ $\dfrac{15}{101}$　④ $\dfrac{25}{101}$　⑤ $\dfrac{35}{101}$

해설

$b_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$이므로

$$a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{3^{n(n+1)}}{3^{(n-1)n}} = 3^{2n}$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\log_3 a_k \cdot \log_3 a_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\log_3 3^{2k} \cdot \log_3 3^{2k+2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2k \cdot 2(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{101}\right)$$

13. $(7^{\frac{1}{4}}-5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}})$의 값은?

① 2 ② 6 ③ 10 ④ 14 ⑤ 18

해설

$(7^{\frac{1}{4}}-5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}})$

$\left\{(7^{\frac{1}{4}})^2-(5^{\frac{1}{4}})^2\right\}(7^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}})$

$=(7^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}})(7^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}})=(7^{\frac{1}{2}})^2-(5^{\frac{1}{2}})^2$

$=7-5=2$

14. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{(k-2)^2}(kx^2+kx+1)$이 의미를 갖기 위한 정수 k의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\log_a b$에서 $a>0,\ a \neq 1, b>0$

(i) $(k-2)^2>0 \rightarrow k \neq 2$

(ii) $(k-2)^2 \neq 1 \rightarrow k \neq 3,\ 1$

(ii) $kx^2+kx+1>0$

$\rightarrow k=0$ 또는 $k>0$일때, $k^2-4k<0$

$\therefore\ 0<k<4$

따라서 (i), (ii), (iii)를 만족하는 정수 k는 0

15. $\log_{10} 2 = 0.301$ 일 때,

$\dfrac{10(\log_{10} 0.8 - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} 0.7 + \log_{10} 7 - \log_{10} 49}$ 의 값은?

① 3.01 ② 6.02 ③ 6.99 ④ 9.03 ⑤ 10

해설

$$\frac{10(\log_{10} 0.8 - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} 0.7 + \log_{10} 7 - \log_{10} 49}$$

$$= \frac{10(\log_{10} \frac{8}{10} - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} \frac{7}{10} + \log_{10} 7 - \log_{10} 49}$$

$$= \frac{10 \log_{10}(\frac{8}{10} \times \frac{1}{32} \times 8)}{\log_{10}(\frac{7}{10} \times 7 \times \frac{1}{49})}$$

$$= \frac{10 \log_{10} \frac{2}{10}}{\log_{10} \frac{1}{10}} = \frac{10(\log_{10} 2 - 1)}{\log_{10} 10^{-1}}$$

$$= \frac{10(0.301 - 1)}{-1} = 6.99$$

16. $\log x$ 의 정수 부분이 4 이고, $\log y$ 의 정수 부분이 2 일 때, $\log \sqrt{xy}$ 의 정수 부분을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log x = 4 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$

$\log y = 2 + \beta \ (0 \le \beta < 1)$

$\log \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\log^x + \log^y)$

$= \frac{1}{2}(4 + \alpha + 2 + \beta)$

$= 3 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

$0 \le \alpha < 1, \ 0 \le \beta < 1$ 이므로

$0 \le \frac{1}{2}(\alpha + \beta) < 1$

$\therefore \log^{\sqrt{xy}}$ 의 정수 부분은 3

17. 두 양수 A, $\frac{1}{A}$의 상용로그의 소수 부분을 각각 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log A$이 정수 부분을 n이라고 하면 $\log A = \alpha + n$

$\log \frac{1}{A} = \log A^{-1} = -\log A$

$= -(n+\alpha) = -n-\alpha$

$= (-n-1) + (1-\alpha)$

따라서 $\log \frac{1}{A}$의 소수 부분은 $1-\alpha$이므로 $\beta = 1-\alpha$

$\therefore \alpha + \beta = \alpha + (1-\alpha) = 1$

18. $\sum_{k=1}^{100}[\log_3 n]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 284

해설

(i) $n=1,\ 2$ 일 때, $0 \le \log_3 n < 1$이므로 $[\log_3 n]=0$
(ii) $3 \le n < 9$ 일 때, $1 \le \log_3 n < 2$이므로 $[\log_3 n]=1$
(iii) $9 \le n < 27$ 일 때, $2 \le \log_3 n < 3$이므로 $[\log_3 n]=2$
(iv) $27 \le n < 81$ 일 때, $3 \le \log_3 n < 4$이므로 $[\log_3 n]=3$
(v) $81 \le n < 100$ 일 때, $4 \le \log_3 n < 5$이므로 $[\log_3 n]=4$
(i) ~ (v)로부터
$\sum_{k=1}^{100}[\log_3 n] = 0\cdot 2 + 1\cdot 6 + 2\cdot 18 + 3\cdot 54 + 4\cdot 20 = 284$

19. 데시벨(dB)은 소리의 세기를 표준음의 세기 $10^{-12}\mathrm{W/m^2}$와 비교해서 나타낸다. 소리의 세기 $x\mathrm{W/m^2}$를 $y\mathrm{dB}$로 나타내는 식은 다음과 같다.

$$y = 120 + 10\log x$$

요란한 음악의 세기가 130dB일 때, 이것은 표준음의 세기의 몇 배인가?

① 10^9배 ② 10^{10}배 ③ 10^{11}배

④ 10^{12}배 ⑤ 10^{13}배

해설

요란한 음악의 세기가 130dB이므로 이 소리의 세기를 a라 하면

$130 = 120 + 10\log a$

$10 = 10\log a$

$1 = \log a$

$\therefore\ a = 10$

따라서 표준음의 세기의 $\dfrac{10}{10^{-12}} = 10^{1-(-12)} = 10^{13}$(배)

20. 갑은 2001년 말부터 2012년까지 매년 초에 300만원 씩 모두 12회를 금융기관에 적립한 것을 2012년 말에 그 원리금을 모두 인출하고 그대로 2013년 초에 금융기관에 다시 예금하여 12년 동안 두었다가 2024년 말에 그 원리금을 모두 인출하기로 하였다. 이때, 갑이 2024년말에 인출한 원리금액은?(단, 연이율 6%의 복리로 하고, $1.06^{12} = 2.01$로 계산한다.)

① 약 10540만 원 ② 약 10650만 원 ③ 약 10760만 원

④ 약 10870만 원 ⑤ 약 10980만 원

해설

2012년 말의 원리금 S_{12}를 구하면

$S_{12} = 300 \times 1.06 + 300 \times 1.06^2 + \cdots + 300 \times 1.06^{12}$

$= \dfrac{300 \times 1.06 \times (1.06^{12} - 1)}{1.06 - 1}$

$= \dfrac{300 \times 1.06 \times 1.01}{0.06} = 5353$(만원)

따라서 2024년 말의 원리금을 구하면

$S_{24} = S_{12} \times 1.06^{12}$

$= 5353 \times 2.01 = 10759.53$(만 원)

따라서 구하는 금액은 약 10760만 원이다.

21. 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n을 $S_n = 2^{n+1} - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하자. $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}$의 값은?

① $\dfrac{2^{20}}{5}$　② $\dfrac{2^{21}+5}{4}$　③ $\dfrac{2^{21}-5}{3}$

④ 2^{20}　⑤ $2^{21}-5$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2^{n+1} - 3) - (2^n - 3) = 2^n (n \geq 2)$

$S_1 = 2^2 - 3 = 1$이므로

$\therefore\ a_n = 2^n (n \geq 2),\ a_1 = 1$

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} = 1 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{19}$

$= 1 + \dfrac{2^3\left\{(2^2)^9 - 1\right\}}{4-1}$

$= 1 + \dfrac{2^{21}}{3} - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{2^{21}}{3}$

22. a, b, c는 $1 < a < b < c < 9$인 정수이고, 수열 $0.\dot{a}$, $0.0\dot{b}$, $0.00\dot{c}$, $\cdots$가 등비수열일 때, 이 수열의 제 4항은?

① $0.0\dot{1}\dot{5}$　　② $0.0\dot{1}\dot{6}$　　③ $0.001\dot{6}$

④ $0.001\dot{7}$　　⑤ $0.0\dot{1}\dot{7}$

해설

$0.\dot{a} = \dfrac{a}{9}$, $0.0\dot{b} = \dfrac{b}{90}$, $0.00\dot{c} = \dfrac{c}{900}$이므로

$\left(\dfrac{b}{90}\right)^2 = \dfrac{a}{9} \times \dfrac{c}{900}$에서 $b^2 = ac$

즉, a, b, c는 이 순서로 등비수열을 이루고

$1 < a < b < c < 9$인 정수이므로 $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$이다.

따라서 이 수열은 $\dfrac{2}{9}$, $\dfrac{4}{90}$, $\dfrac{8}{900}$, $\cdots$ 이므로

첫째항이 $\dfrac{2}{9}$이고, 공비가 $\dfrac{2}{10}$인 등비수열이다.

$\therefore a_4 = \dfrac{16}{9000} = 0.001\dot{7}$

23. m, n이 양의 정수이고 a가 양수일 때, 다음 중 실수인 것은 모두 몇 개인가?

$\sqrt[2m]{(-a)^{2n}}$ $\sqrt[2m-1]{(-a)^{2n}}$ $\sqrt[2m-1]{(-a)^{2n-1}}$ $\sqrt[2m]{(-a)^{2n-1}}$

① 4개 ② 3개 ③ 2개 ④ 1개 ⑤ 없다.

해설

(i) $(-a)^{2n} > 0$ 이므로 실수

(ii) $(-2a)^{2n} > 0$이므로 실수

(iii) $(-a)^{2n-1} < 0,\ (2m-1)$은 홀수이므로 실수

(iv) $(-a)^{2n-1} < 0,\ m$은 짝수이므로 실수가 아니다.

$\therefore$ 실수는 3개

24. $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 일 때, $2x^3 + 6x + 1$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세 제곱하면

$$x^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$= (2^{\frac{1}{3}})^3 - (2^{-\frac{1}{3}})^3 - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})$$

$$= 2 - 2^{-1} - 3(2^{\frac{1}{3}} - 2 - \frac{1}{3})$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - 3x$$

따라서 $x^3 + 3x = \frac{3}{2}$ 이므로

$$2x^3 + 6x + 1 = 2(x^3 + 3x) + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$$

25. $\log x$ 의 정수 부분이 1 이고 $\log x$ 의 소수 부분과 $\log x^3$ 의 소수 부분이 같을 때, 모든 x 의 값들의 곱은 10^k 이다. 이때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

$\log x$ 의 소수 부분을 α 라 하면
$\log x = 1 + \alpha$ (단, $0 \leq \alpha < 1$)
$\therefore x^3 = 3\log x = 3(1+\alpha) = 3 + 3\alpha$

(i)$0 \leq \alpha < \frac{1}{3}$ 일 때,
$\log x^3$ 의 소수 부분은 3α 이므로 $\alpha = 3\alpha$ $\therefore \alpha = 0$
$\therefore \log x = 1,\ x = 10$

(ii) $\frac{1}{3} \leq \alpha < \frac{2}{3}$ 일 때,
$\log x^3 = 3 + 3\alpha = 4 + (3\alpha - 1)$
이 때, $\log x^3$ 의 소수 부분은 $3\alpha - 1$ 이므로 $\alpha = 3\alpha - 1$ $\therefore \frac{1}{2}$
$\therefore \log x = \frac{3}{2},\ x = 10^{\frac{3}{2}}$

iii) $\frac{2}{3} \leq \alpha < 1$ 일 때,
$\log x^3 = 3 + 3\alpha = 5 + (3\alpha - 2)$
이때, $\log x^3$ 의 소수 부분은 $3\alpha - 2$ 이므로 $\alpha = 3\alpha - 2$ $\therefore \alpha = 1$(모순)
따라서 (i),(ii), (iii) 에서 $10^1 \times 10^{\frac{3}{2}} = 10^{1+\frac{3}{2}} = 10^{\frac{5}{2}}$
$\therefore k = \frac{5}{2}$

해설

$\log x$ 의 정수 부분이 1 이므로
$1 \leq \log x < 2 \cdots\cdots$ ㉠
$\log x$ 의 소수 부분과 $\log x^3$ 의 소수 부분이 같으므로
$\log x^3 - \log x = 2\log x =$ (정수)
㉠에서 $2 \leq 2\log x < 4$ 이므로
$2\log x = 2$ 또는 $2\log x = 3$,
$x = 10$ 또는 $\log x = \frac{3}{2}$,
$10 \cdot 10^{\frac{3}{2}} = 10^{\frac{5}{2}} = 10^k$
$\therefore k = \frac{5}{2}$