1. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x-5>3-2x \\ 2(x-3)\le x+4 \end{cases}$$

① $2 \le x < 10$　　② $2 < x \le 10$　　③ $2 < x < 10$

④ $2 \le x \le 10$　　⑤ $x \le 10$

해설

첫 번째 부등식에서 $x > 2 \cdots\cdots$ ㉠
두 번째 부등식에서 $2x-6 \le x+4$
$\therefore x \le 10 \cdots\cdots$ ㉡
따라서, 구하는 해는 ㉠과 ㉡를
동시에 만족하는 x의 값이므로
$\therefore 2 < x \le 10$

2. $x^3 - 2x^2 + a$ 가 $x + 3$ 로 나누어 떨어지도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 45$

해설

$f(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 + a = a - 45 = 0$

$\therefore\ a = 45$

3. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$이라 놓으면,
$x = -1$일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$몫
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x+1)$
$\therefore\ f(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$

4. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$　② $a=0, b=3$　③ $a=-1, b=2$

④ $a=0, b=2$　⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D'=(k-a)^2-(k^2+b-3)=0$

$\Rightarrow \quad -2ak+a^2-b+3=0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a=0,\ a^2-b+3=0$

$\therefore \quad a=0, b=3$

5. 원점에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 4 ② 8 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

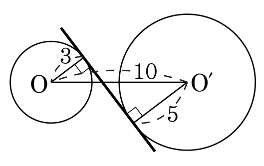
원점 (0, 0) 에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a\times0+b\times0+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$4=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\rightarrow\ 2(a^2+b^2)=16$

$\therefore\ a^2+b^2=8$

6. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2-(3+5)^2}=6$

7. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(2x+3y+1)$
$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

8. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 4), B(−2, 6), C(6, 8) 를 꼭지점으로 하는 △ABC 에서 변 AB의 중점을 P, 변 BC 의 중점을 Q, 변 CA의 중점을 R이라 하자. △PQR 의 무게중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

△ABC 의 무게중심과 각 변의 중점을 연결하여 만든 △PQR 의 무게중심은 같다.
△ABC 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-2)+6}{3},\ \frac{4+6+8}{3}\right)=(2,\ 6)$$

따라서 $a=2,\ b=6$

$\therefore\ a+b=8$

9. 세 점 $A(4,\ -5)$, $B(-5,\ 2)$, $C(-8,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\triangle ABC$ 에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 의 값이 최소가 될 때, 점 P 의 좌표는?

① (-3, -3)　　② (-3, 0)　　③ (0, 0)

④ (3, 0)　　⑤ (3, 3)

해설

$P(x,\ y)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(x-4)^2+(y+5)^2+(x+5)^2+(y-2)^2+(x+8)^2+(y-3)^2$

$=3(x+3)^2+3y^2+116$

따라서 $x=-3,\ y=0$일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 최소가 된다.

10. 상수 a, b, c가 조건 $ab > 0$, $bc < 0$을 만족시킬 때 방정식 $ax+by-c=0$이 나타내는 그래프가 지나는 사분면을 <u>모두</u> 고르면?

① 제 1, 2, 3 사분면
② 제 2, 3, 4 사분면
③ 제 1, 3, 4 사분면
④ 제 1, 2 사분면
⑤ 제 2, 3 사분면

해설

$ax+by-c=0 \Rightarrow \quad y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$

$ab>0$, $bc<0$이므로

기울기는 $(-)$, y절편은 $(-)$이다.

$\therefore$ 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.

11. $2x+(a+3)y-1=0$, $(a-2)x+ay+2=0$에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 하나도 없도록 하는 상수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

두 직선 $2x+(a+3)y-1=0$,
$(a-2)x+ay+2=0$이 평행해야 하므로
$\frac{2}{a-2}=\frac{a+3}{a}\neq\frac{-1}{2}$
$(a-2)(a+3)=2a$, $(a+2)(a-3)=0$
$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=3$
그런데 $\frac{a+3}{a}\neq\frac{-1}{2}$에서 $a\neq-2$이므로
구하는 a의 값은 3이다.

12. 점 $P(0,a)$ 에서 직선 $y=\frac{4}{3}x+2$ 까지의 거리와 점 P 에서 x 축 까지의 거리가 같을 때, 음수 a 의값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② -9 ③ $-\frac{4}{9}$ ④ -3 ⑤ -2

해설

점$P(0,\ a)$ 와 직선 $4x-3y+6=0$ 간의 거리는 $\frac{|-3a+6|}{5}$ 이고,
점$P(0,\ a)$ 와 x 축간의 거리는 y 좌표의 절대값인 $|a|$ 이므로,
$|-3a+6|=5|a|$, $-3a+6=\pm 5a$
$\therefore\ a=\frac{3}{4}$ 또는 -3
$\therefore\ a=-3\ \ (\because\ a<0)$

13. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

14. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$
$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$
$\overline{OP}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{OP}$ $\sqrt{4^2+3^2}+2=7$

15. 부등식 $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ 의 영역의 넓이를 A, 부등식 $x^2 + y^2 \le 9$ 의 영역의 넓이를 B 라 할 때, $B - A$ 의 값은?

① 9π ② $9\pi - 4$ ③ $9\pi + 1$

④ $9\pi - 2$ ⑤ $9\pi + 2$

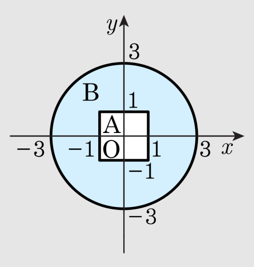
해설

$|x| \le 1$, $|y| \le 1$ 의 영역을 그림으로 나타내면 $A = 4$

$x^2 + y^2 \le 9$ 의 영역을 그림으로 나타내면

$B = 9\pi$

$\therefore\ B - A = 9\pi - 4$



16. $a^2 - b^2 = 2$일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$의 값은?

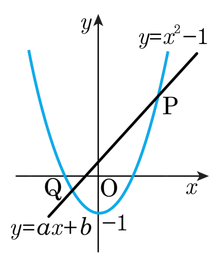
① 2^n ② 2^{n+1} ③ 2^{n+2} ④ 2^{n+3} ⑤ 2^{n+4}

해설

$(a+b)^n = A,\ (a-b)^n = B$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(A^2 + 2AB + B^2\right) - \left(A^2 - 2AB + B^2\right)\\ &= 4AB\\ &= 4\left\{(a+b)(a-b)\right\}^n\\ &= 4 \times 2^n\\ &= 2^{n+2}\end{aligned}$$

17. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax+b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x의 좌표가 $1+\sqrt{2}$일 때, $2a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax+b$ 의 한 교점 P 의 x 좌표가 $1+\sqrt{2}$ 이므로 $1+\sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 1 = a\left(1+\sqrt{2}\right) + b$

$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$2 = a + b$, $2 = a$

$\therefore a = 2$, $b = 0$

18. x의 3차방정식 $x^3-(3k+1)x+3k=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 k의 값들의 합은?

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

주어진 식의 좌변을 인수분해하면
$(x-1)(x^2+x-3k)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x^2+x-3k=0$
여기에서 $x^2+x-3k=0$이 중근을 가질 때는 $D=1+12k=0$
$\therefore\ k=-\frac{1}{12}$
또, $x^2+x-3k=0$이 $x=1$이라는 근을 가져도 그 근은 중근이 되므로
$1+1-3k=0$
$\therefore\ k=\frac{2}{3}$
$\therefore\ -\frac{1}{12}+\frac{2}{3}=\frac{-1+8}{12}=\frac{7}{12}$

19. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 하고, $z = \dfrac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$이라 할 때, $4z \cdot \overline{z}$의 값을 구하면? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수)

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 13

해설

$x^3 = 8$에서 $(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

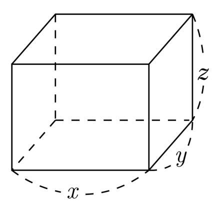
$x^2 + 2x + 4 = 0$의 한 허근을 α라 하면

다른 허근은 $\overline{\alpha}$이므로

$\alpha + \overline{\alpha} = -2,\ \alpha\overline{\alpha} = 4$

$$\begin{aligned} \therefore\ 4z\overline{z} &= 4 \times \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 2} \times \frac{2\overline{\alpha} + 1}{\overline{\alpha} + 2} \\ &= 4 \times \frac{4\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha + \overline{\alpha}) + 1}{\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha + \overline{\alpha}) + 4} \\ &= 4 \times \frac{4 \times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13 \end{aligned}$$

20. 다음 그림과 같이 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 x, y, z 인 직육면체의 12 개의 모서리의 길이가 평균이 8 , 표준편차가 2 이다. 이 때, 6 개면의 넓이의 평균은?



① 53　　② 56　　③ 59

④ 62　　⑤ 65

해설

$$\frac{4(x+y+z)}{12}=8 \Rightarrow x+y+z=24$$

$$\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{12}-8^2=4$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=204$$

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=186$$

$$\frac{2(xy+yz+zx)}{6}=\frac{xy+yz+zx}{3}=\frac{186}{3}=62$$

21. 임의의 실수 x에 대하여 $\sqrt{ax^2+ax+b}$가 실수일 때, 계수 a, b가 만족하는 조건을 구하면?

① $0 \le a \le 4b$　② $0 < a \le 4b$　③ $0 \le a < 4b$
④ $0 < a < 4b$　⑤ $0 < a < 4b$

해설

모든 실수 x에 대하여
$ax^2+ax+b \ge 0$을 만족해야 하므로
ⅰ) $a=0$일 때, $b \ge 0 \cdots$①
ⅱ) $a>0$일 때,
$D=a^2-4ab \le 0$
$a-4b \le 0 \cdots$②
①,②에서 $0 \le a \le 4b$

22. 정수 a, b에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + b = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 무리수이다.　② 정수가 아닌 유리수이다.

③ 정수이다.　④ 홀수인 자연수이다.

⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta + \gamma = -a$(정수) , $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0,\ \alpha\beta\gamma = -b$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= a^2$(정수)

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a(a^2 - 0) - 3b = -a^3 - 3b$(정수)

그러나 $a > 0,\ b > 0$이면

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$은 자연수가 되지는 못한다.

23. 연립방정식 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x^2+y^2-z^2=25 \\ x^3+y^3-z^3=109 \end{cases}$ 의 근을

$x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$ 라 할 때, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$ 의 값은 ?

① 5　　② 7　　③ 9　　④ 11　　⑤ 13

해설

$x+y-z=1 \cdots$ ①
$x^2+y^2-z^2=25 \cdots$ ②
$x^3+y^3-z^3=109 \cdots$ ③
① 에서 $z=x+y-1 \cdots$ ④
④ 를 ②, ③ 에 대입하여 각각 정리하면
$x+y-xy=13,$
$xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=-36$
$x+y=u,\ xy=v$ 로 놓으면 윗식은 각각
$u-v=13 \cdots$ ⑤
$uv-u^2+u+36=0 \cdots$ ⑥
⑤, ⑥ 을 연립하면 $u=3,\ v=-10$
$\therefore\ x+y=3,\ xy=-10,\ z=2$
$\therefore\ (x,\ y,\ z)=(5,\ -2,\ 2),\ (-2,\ 5,\ 2)$
$\therefore\ |\alpha|+|\beta|+|r|=9$

24. 2개의 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통접선의 기울기를 구하면 ?

① $\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$　② $\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$
③ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{4}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{8}$　④ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{5}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{10}$
⑤ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{12}$

해설

$x^2+y^2=1 \cdots\cdots$ ①
$(x-4)^2+y^2=4 \cdots\cdots$ ②
공통접선을 $y=mx+n \cdots\cdots$ ③이라 하면
①의 중심과 ③과의 거리는 1이고,
②의 중심과 ③과의 거리는 2이므로
$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$이고
$\frac{|4m+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$
$\Rightarrow\ m^2+1=n^2 \cdots\cdots$ ④
$4(m^2+1)=(4m+n)^2 \cdots$ ⑤
④를 ⑤에 대입하여 인수분해하면
$(4m+3n)(4m-n)=0$
$n=-\frac{4}{3}m$에서 $m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$
$n=4m$에서 $m=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$
$\therefore\ m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7},\ \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

25. $x^2+y^2 \le 2$, $|x|-y \le 0$를 만족하는 모든 $(x,\ y)$가 $y-ax^2+1 \ge 0$를 만족한다고 할 때, 상수 a의 최댓값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ $\frac{3}{2}$　　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

그림을 그려보면 오른쪽과 같다. 조건을 만족하는 a 의 값이 최대일 때는
포물선 $y = ax^2 - 1$ 이
$(1,1)$, $(-1,1)$ 을 지날 때이다.
따라서 $1 = a-1$ 에서 $a = 2$ 이다.