1. $3^{\log_4 5^{\log_3 4}}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$$3^{\log_4 5^{\log_3 4}} = 3^{\log_3 4 \cdot \log_4 5} = 3^{\log_3 5} = 5$$

2. 직각삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가 이 순서대로 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 이 직각삼각형의 넓이는?

① 52　② 54　③ 56　④ 58　⑤ 60

해설

직각삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가 이 순서대로 공차가 3인 등차수열을 이루므로

$a = b - 3$, $c = b + 3$으로 놓을 수 있다.

즉, 세 변의 길이는 $b-3$, b, $b+3$이고 빗변의 길이가 $b+3$이므로 피타고라스의 정리를 이용하면

$(b+3)^2 = (b-3)^2 + b^2$

$b(b-12) = 0$

$\therefore b = 12 (\because b > 0)$

이때, $a = b - 3 = 9$

따라서 주어진 직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$

3. 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 수열 $\{3a_n\}$은 공차가 9 인 등차수열이다.

㉡ 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

㉢ 수열 $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

공차가 3 인 등차수열의 일반항은

$a_n = 3n + b$(단, b는 상수)

㉠ $3a_n = 9n + 3b$ 이므로 공차가 9 인 등차수열 ∴ 참

㉡ $a_{2n-1} = 3(2n-1) + b = 6n - 3 + b$ 이므로 공차가 6 인 등차수열 ∴ 참

㉢ $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\} = 12n + 2b - (6n - 3 + b)$
$= 6n + 3 + b$
이므로 공차가 6 인 등차수열 ∴ 참

4. 0이 아닌 네 실수 a, b, c, d에 대하여 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$과 b, c, d가 이 순서대로 각각 조화수열을 이룰 때, 다음 중 옳은 것은?

① $ad = bc$　　② $ab = cd$　　③ $abcd = 1$

④ $a + b = d$　　⑤ $a - d = b - c$

해설

$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$가 조화수열을 이루면 a, b, c가 등차수열을 이루므로

$2b = a + c \cdots$ ㉠

또, b, c, d가 조화수열을 이루므로

$$c = \frac{2bd}{b+d} \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $c = \dfrac{(a+c)d}{b+d}$

$bc + cd = ad + cd \quad \therefore\ bc = ad$

5. 다음 조건을 만족하는 등차수열 $\{a_n\}$의 개수는? (단, $n \geq 3$)

㉠ $a_1 = 1$

㉡ 공차는 정수이다.

㉢ $a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_n = 118$

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 무수히 많다.

해설

$$S_n = \frac{n\{2+(n-1)d\}}{2} = 118$$

$n\{2+(n-1)d\} = 236$

$236 = 4 \times 59$ 이고 $n \geq 3$ 이므로

(i) $n = 4$ 일때

$2 + (n-1)d = 59$

$2 + 3d = 59,\ d = 19$

(ii) $n = 59$ 일때

$2 + (n-1)d = 4$

$2 + 58d = 4$

d는 정수이므로 성립하지 않는다.

$\therefore \{a_n\}$은 한 개

6. 첫째항이 45이고, 공차가 -4인 등차수열은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음 음수가 되는가?

① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

해설

첫째항이 45이고, 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합은

$$\frac{n\{2\cdot 45+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}=n(47-2n)$$

$n(47-2n)<0$에서 $n<0$ 또는 $n>\frac{47}{2}$

$n>0$이므로 $n>\frac{47}{2}=23.5$

따라서 주어진 수열은 첫째항부터 제 24항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

7. 첫째항이 3이고, 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + pn$인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 할 때, $p+d$의 값은? (단, p는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$S_n = n^2 + pn$

$S_{n-1} = (n-1)^2 + p(n-1)$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} (n \geq 2) \\ &= n^2 + pn - (n^2 - 2n + 1 + pn - p) \\ &= 2n - 1 + p \quad \rightarrow d = 2 \end{aligned}$$

$a_1 = 1^2 + p = 3$

$p = 2$

$\therefore p + d = 2 + 2 = 4$

8. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = 2n^2 + 2n + \alpha$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 α의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$S_n = 2n^2 + 2n + \alpha$

$S_{n-1} = 2(n-1)^2 + 2(n-1) + \alpha$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 2n^2 + 2n + \alpha - (2n^2 - 4n + 2 + 2n - 2 + \alpha)$

$= 4n \ (n \geq 2)$

$a_1 = S_1$ 이므로

$4 = 4 + \alpha$

$\therefore \ \alpha = 0$

9. 첫째항부터 제n항까지의 합 $S_n = n^2 + 3n$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_5 + a_{10}$의 값은?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

해설

주어진 수열의 합을 이용하여 수열의 일반항을 구한다.

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\}$

$= 2n + 2 \quad \cdots\cdots ㉠$

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$

이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 2n + 2$

$\therefore a_1 + a_5 + a_{10} = 4 + 12 + 22 = 38$

10. 0이 아닌 다섯 개의 수 a, b, c, d, e에 대하여 a, b, c는 이 순서로 조화수열을, b, c, d는 이 순서로 등비수열을, c, d, e는 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 다음 중 옳은 것은?

① a, c, e는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

② a, c, e는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

③ a, c, e는 이 순서로 조화수열을 이룬다.

④ a, e, c는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

⑤ a, e, c는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

해설

b는 a와 c의 조화중항이므로 $b = \dfrac{2ac}{a+c} \cdots$ ㉠

c는 b와 d의 등비중항이므로 $c^2 = bc \cdots$ ㉡

d는 c와 e의 등차중항이므로 $d = \dfrac{c+e}{2} \cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$$c^2 = \frac{2ac}{a+c} \times \frac{c+e}{2}, \quad c^2 = \frac{ac(c+e)}{a+c}$$

$$c = \frac{a(c+e)}{a+c}, \quad ac + c^2 = ac + ae \quad \therefore c^2 = ae$$

따라서, a, c, e는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

11. a_1, a_2, $a_3, \cdots$, a_n은 0, 1, 2 중 어느 하나의 값을 갖는다. $\sum_{k=1}^{n} = 40$, $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 70$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k^3$의 값은?

① 110 ② 120 ③ 130 ④ 140 ⑤ 150

해설

a_1, a_2, $a_3, \cdots$, a_n중 1의 개수를 x, 2의 개수를 y라고 하면
$\sum_{k=1}^{n} a_k = x + 2y = 40 \cdots$ ㉠
$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = x + 4y = 70 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $x = 10$, $y = 15$
$\therefore$ $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = x + 8y = 10 + 120 = 130$

12. $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$을 n에 대한 식으로 나타내면 an^2+bn+c일 때, 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+1)+(n^2+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{n-1}\{k^2+1-(k^2-1)\}+(n^2+1)$

$=\sum_{k=1}^{n-1}2+(n^2+1)$

$=2(n-1)+(n^2+1)=n^2+2n-1$

$\therefore a=1,\ b=2,\ c=-1$

$\therefore abc=-2$

13. 오른쪽 그림처럼 바둑판 모양의 칸에 1부터 시계 방향으로 차례로 자연수를 배열하였다. 이때, 1 아래로 생기는 수열 1, 4, 15, 34, $\cdots$ 에서 제 10항의 일의 자리 수는?

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	27
19	6	1	2	11	28
18	5	4	3	12	29
17	16	15	14	13	30
$\cdots$	$\cdots$	34	33	32	31

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

수열 1, 4, 15, 34, 61, $\cdots$

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 4, & 15, & 34, & 61, & \cdots, & a_{10} \\ \vee & \vee & \vee & \vee & & & \vee \\ 3, & 11, & 19, & 61, & \cdots, & & b_9 \end{array}$$

이므로 $b_k = 3 + (k-1)8 = 8k - 5$

$\therefore a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^{9}(8k-5) = 1 + 8 \cdot \dfrac{9 \cdot 10}{2} - 5 \cdot 9 = 316$

따라서, 일의 자리 수는 6이다.

14. 다음 군수열에서 47은 몇 군의 몇째 항인가?

제1군	제2군	제3군	제4군
(1),	(2, 3),	(4, 5, 6),	(7, 8, 9, 10), $\cdots$

① 제9군의 9항　② 제10군의 2항　③ 제10군의 3항

④ 제11군의 2항　⑤ 제11군의 3항

해설

각 군의 첫째항으로 만들어지는 수열

$\{a_n\}$에 대하여

$\{a_n\} : 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11, \cdots$

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{b_n\} : 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$

$b_n = n$이므로 제 n군의 첫째항 a_n은

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_{10} = 1 + \frac{10 \cdot 9}{2} = 46$$

따라서, 47은 제 10군의 2항이다.

15. 수열 $(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2),\ (3,\ 0),$
$(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (0,\ 3),\ (4,\ 0)\cdots$ 에서 $(10,\ 9)$는 제 몇 항인가?

① 180 ② 189 ③ 198 ④ 199 ⑤ 206

해설

x좌표와 y좌표의 합이 같은 것끼리 군으로 묶으면
$\{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\},\ \{(2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2)\},$
$\{(3,\ 0),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (0,\ 3)\},\cdots$
$(10,\ 9)$은 좌표의 합이 19이므로 제19군의 10번째 항이다.
$\therefore (2+3+4+\cdots+19)+10=199$

16. 다음과 같은 수열에서 $(6,\ 4)$는 몇 번째 항인가?

$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),$
$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ \cdots$

① 제40항　② 제41항　③ 제42항
④ 제43항　⑤ 제44항

해설

(합이 2인 순서쌍)$=$ 1개, (합이 3인 순서쌍)$=$ 2개, $\cdots$ 합이 9개인 순서쌍까지의 개수의 합을 모두 더하면, $1+2+\cdots+8=36$이고, 합이 10인 순서쌍 중에서 $(6,\ 4)$는 여섯 번째이므로 42번째이다.

17. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제 10 항은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$a_{n+1} - a_n = 2$의 양변에
$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots, (n-1)$을 대입하여 변끼리
더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2 - a_1 = 2 \\ & a_3 - a_2 = 2 \\ & a_4 - a_3 = 2 \\ & \quad \vdots \\ +) & a_n - a_{n-1} = 2 \\ \hline & a_n - a_1 = 2(n-1) \end{array}$$

$\therefore a_n = a_1 + 2(n-1) = 2n + 1$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10 + 1 = 21$

해설

첫째항이 3, 공차가 2인 등차
수열이므로 $a_n = 2n + 1$

$\therefore a_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$

18. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$

$= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots\cdots$ ㉠

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=$ (우변)$=2$

(ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{(가)}$를 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot \boxed{(나)}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{(가)}$

$= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(10)}$의 값은?

① $\dfrac{1}{1024}$ ② $\dfrac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

(i) $n=1$일 때, $1 \cdot 2^1 = 2$

(ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$을 대입하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{2(2k+1)}$을 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\boxed{(2k+1) \cdot 2^{k+1}}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1)\boxed{2(2k+1)}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(2k+2)(2k+1)$

$= (2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1) \cdots (k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i) ,(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

즉, $f(k) = 2(2k+1)$, $g(k) = (2k+1)2^{k+1}$

$\therefore \dfrac{g(k)}{f(k)} = 2^k$

$\therefore \dfrac{g(10)}{f(10)} = 1024$

19. 거듭제곱에 대한 설명 중 옳은 것은?

① $\sqrt[4]{81} = \pm 3$

② $\sqrt[3]{-64} = -8$

③ 16의 네제곱근은 ± 2이다.

④ $\sqrt{(-3)^2}$의 제곱근은 3이다.

⑤ -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다.

해설

① $\sqrt[4]{81} = \sqrt{9} = 3 \quad \therefore$ 거짓

② $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4 \quad \therefore$ 거짓

③ 16의 네제곱근은 $\pm 2, \ \pm 2i$이다. $\therefore$ 거짓

④ $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$이다. $\therefore$ 거짓

⑤ $(-1)^3 = -1$이므로 -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다. $\therefore$ 참

20. $a>0, a\neq 1$일 때, $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}}=a^k$을 만족시키는 유리수 k의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$$\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}}$$
$$=\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\cdot a^{\frac{1}{4}}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}}}$$
$$=\sqrt[3]{a\cdot\left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}}$$
$$=\sqrt[3]{a\cdot a^{\frac{5}{12}}}\times\sqrt[3]{(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}}$$
$$=(a^{\frac{17}{12}})^{\frac{1}{3}}\times(a^{\frac{1}{12}})^{\frac{1}{3}}$$
$$=a^{\frac{17}{36}+\frac{1}{36}}=a^{\frac{18}{36}}=a^{\frac{1}{2}}$$

21. $2^x + \frac{1}{2^x} = 2$일 때, $8^x + \frac{1}{8^x}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$8^x + \frac{1}{8^x} = (2^x)^3 + \left(\frac{1}{2^x}\right)^3$$

$$= \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^3 - 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^x}\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)$$

$$= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$$

22. $2^{2x}=3$ 일 때, $\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^{3x}+2^{-3x}}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{2}{7}$ ③ $\dfrac{3}{8}$ ④ $\dfrac{3}{7}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 2^{3x}를 곱하면

$$\frac{2^x+2^{-x}}{2^{3x}+2^{-3x}}=\frac{(2^x+2^{-x})\times 2^{3x}}{(2^{3x}+2^{-3x})\times 2^{3x}}$$

$$=\frac{2^{4x}+2^{2x}}{2^{6x}+1}=\frac{(2^{2x})^2+2^{2x}}{(2^{2x})^3+1}$$

$$=\frac{3^2+3}{3^3+1}=\frac{3}{7}$$

23. $a>0,\ a\neq 1$이고 $x>0,\ y>0$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\log_a a = 1$

② $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

③ $\log_a(x-y) = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

④ $\log_a x^y = y\log_a x$

⑤ $\log_a 5 \cdot \log_5 a = 1$

해설

③ $\log_a(x-y) \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$

⑤ $\log_a 5 \cdot \log_5 a = \log_a 5 \cdot \frac{1}{\log_a 5} = 1$

24. $\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$의 소수 부분을 x라 할때, 2^{x+1}의 값을 구하면?

① $\sqrt{3}+1$　② $\sqrt{5}+1$　③ $\sqrt{6}+1$

④ $\sqrt{7}+1$　⑤ $2\sqrt{2}+1$

해설

$\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$

$=\log_2 \sqrt{7+2\sqrt{6}}$

$=\log_2(\sqrt{6}+1)$

$=\log_2(3.\times\times\times)$

$=1.\times\times\times$

따라서, $x=\log_2(\sqrt{6}+1)-1$

$2^{x+1}=2^{\log_2(\sqrt{6}+1)}=\sqrt{+}1$

25. 등식 $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_3(\log_4(\log_2 y)) = \log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0$ 이 성립할 때, $x+y+z$의 값은?

① 58 ② 64 ③ 75 ④ 89 ⑤ 93

해설

$\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$에서 $\log_3(\log_4 x) = 1$

$\log_4 x = 3 \quad \therefore x = 4^3 = 64$

$\log_3(\log_4(\log_2 y)) = 0$에서 $\log_4(\log_2 y) = 1$

$\log_2 y = 4 \quad \therefore y = 2^4 = 16$

$\log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0$에서 $\log_2(\log_3 z) = 1$

$\log_3 z = 2 \quad \therefore z = 3^2 = 9$

$\therefore x+y+z = 64+16+9 = 89$

26. $\sum_{k=1}^{100}[\log_5 k]$ 의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 150 ② 161 ③ 172 ④ 183 ⑤ 193

해설

$\log_5 1 = 0,\ \log_5 5 = 2,\ \log_5 125 = 3$ 이므로

$[\log_5 1] + [\log_5 2] + [\log_5 3] + [\log_5 4] = 0$

$[\log_5 5] + [\log_5 6] + \cdots + [\log_5 24] = 1 \times 20$

$[\log_5 25] + [\log_5 26] + \cdots + [\log_5 100] = 2 \times 76$

$\sum_{k=1}^{100}[\log_5 k] = 1 \times 20 + 2 \times 76 = 172$

27. 정부에서는 흡연률과 간접흡연의 피해를 줄이고 청소년 흡연예방 등을 위해 담배 가격을 지속적으로 인상하려고 한다. 만약 정부가 담배 가격을 매년 일정한 시기에 바로 이전 연도 보다 15% 씩 올리기로 한다면, 현재 가격의 세 배 이상이 되는 것은 최소 n년이 경과해야 하는지를 아래 상용로그표를 이용하여 구하면? (단, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 이다.)

< 상용로그표 >

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

현재 가격을 a라 하고, n년후 처음으로 3배 이상이 된다고 하면 $a(1+0.15)^n \geq 3a$,

$n \log 1.15 \geq \log 3$

$$n \geq \frac{\log 3}{\log 1.15} = \frac{0.4771}{0.0607} = 7.8\times\times\times$$

8년 후 처음으로 3배 이상이 된다.

28. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, $na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족할 때, $\sum_{n=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 210

해설

수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$이고 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$이므로

$na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$에서 $n(S_{n+1} - S_n) = S_n$

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \dfrac{n+1}{n}$의 양변의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 각각 대입하여 변끼리 곱하면

$$\frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \frac{S_4}{S_3} \times \cdots \times \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

$\dfrac{S_n}{S_1} = n$ 이므로 $S_n = nS_1 = na_1 = n$

$$\sum_{n=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = S_1 + S_2 + \cdots S_{20} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$$

29. 수열 a_n 을 다음과 같이 정의한다.

$a_n = 10^{n-1} + 10^{-n}$(단, $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)

$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 라고 할 때,

$\sum_{k=1}^{10} b_k = \dfrac{1}{㉠}\{10^{㉡} + 10^{㉢} + ㉣\}$ 이다.

이때, ㉠+ ㉡+ ㉢+ ㉣의 값은?

① 29 ② 69 ③ 71 ④ 93 ⑤ 111

해설

$b_n = \sum_{k=1}^{n}(10^{k-1} + 10^{-k})$

$$= \frac{10^n - 1}{10 - 1} + \frac{\frac{1}{10}\left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{9}\left\{10^n - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$$

즉, $b_n = \dfrac{10^n - 10^{-n}}{9}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{10} b_k = \dfrac{1}{9}\sum_{k=1}^{10}(10^k - 10^{-k})$

$$= \frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^{10} - 1)}{10 - 1} - \frac{\frac{1}{10}(1 - 10^{-10})}{1 - \frac{1}{10}}\right\} = \frac{1}{81}(10^{11} + 10^{-10} - 11)$$

$\therefore$ ㉠ + ㉡ + ㉢ + ㉣ $= 81 + 11 - 10 - 11 = 71$

30. $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 $\square$안에 공통으로 들어 갈 것은?

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n+1}{2}$$

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$,
(우변)$=\dfrac{2+1}{2}=\dfrac{3}{2}$이므로 주어진 식이 성립한다.
(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면
$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{k+1}{2}$이므로 양변에 $\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)$을 곱하면
$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)$
$=\dfrac{k+1}{2}\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{k+2}{2}=\dfrac{(\square)+1}{2}$
따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 식이 성립한다. (i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k+1$

해설

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$,

(우변)$=\dfrac{2+1}{2}=\dfrac{3}{2}$이므로 주어진 식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면
$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{k+1}{2}$이므로 양변에 $\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)$을 곱하면

$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)$
$=\dfrac{k+1}{2}\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{k+2}{2}=\dfrac{(k+1)+1}{2}$
따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

31. $\log 7.62 = 0.8820, \log 2.955 = 0.4705$일 때, $\sqrt[4]{0.0762}$를 계산하면 $0.abcd$이다. 이때, $a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c,는 0보다 크거나 같고 10보다는 작은 정수이다.)

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$\log 7.62 = 0.8820$이므로

$$\sqrt[4]{0.0762} = \frac{1}{4}\log 0.00762 = \frac{1}{4}\log\frac{7.62}{1000}$$

$$= \frac{1}{4}(\log 7.62 - 3) = \frac{1}{4}(0.8820 - 3)$$

$$= -0.5292 = -1 + (1 - 0.5292)$$

$$= -1 + 0.4705 = -1 + \log 2.955$$

$$= \log\frac{1}{10} + \log 2.955$$

$$= \log 0.2955$$

따라서 $\sqrt[4]{0.0762} = 0.2955$

$a+b+c+d$는 $2+9+5+5=21$

32. A, B 두 그릇에 농도가 각각 10%, 20% 인 소금물이 각각 100g 씩 들어 있다. A 그릇의 소금물 25g 을 덜어 B 그릇에 담아 잘 섞은 다음 B 그릇의 소금물 25g 을 다시 덜어 A 그릇에 담아 잘 섞는다. 이와 같은 작업을 n 회 시행하였더니 두 그릇의 소금물의 농도의 차가 5% 이하가 되었을 때, 자연수 n 의 최솟값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

n 회 시행 후 두 그릇에 들어 있는 소금의 양은 100g 으로 동일하므로 소금의 양이 바로 농도가 된다.
시행 전 A, B 두 그릇에 들어있는 소금의 양은 각각
$a_0 = 10\text{g}$, $\text{b}_0 = 20\text{g}$
n 회 시행 후 각 그릇에 남아 있는 소금의 양을 각각 a_n, b_n 이라 하면

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \left(\frac{1}{4}a_n + b_n\right) \times \frac{1}{5}$$

즉, $a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5}b_n \cdots$ ㉠

한편, 매 시행 후 두 그릇에 들어 있는 소금의 양의 합은 변함이 없으므로

$$a_0 + b_0 = \cdots = a_n + b_n = a_{n+1} + b_{n+1}$$

$\therefore\ b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{4}{5}b_n \cdots$ ㉡

㉡ − ㉠ 에서 $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{3}{5}(b_n - a_n)$

한편, $a_1 = \frac{4}{5}a_0 + \frac{1}{5}b_0 = \frac{4}{5}\cdot 10 + \frac{1}{5}\cdot 20 = 12$

$$b_1 = \frac{1}{5}a_0 + \frac{4}{5}b_0 = \frac{1}{5}\cdot 10 + \frac{4}{5}\cdot 20 = 18$$

$$\therefore\ b_n - a_n = (b_1 - a_1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = 6\cdot\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n = 10\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

소금물의 농도의 차가 5% 이하가 되려면 소금의 양의 차가 0.05 이하가 되어야 하므로

$$10\left(\frac{3}{5}\right)^n \le 0.05,\ \left(\frac{3}{5}\right)^n \le \frac{1}{200}$$

양변에 로그를 취하면

$$n(\log 3 - \log 5) \le -\log 2 - 2$$

$$n \ge \frac{-\log 2 - 2}{\log 3 - \log 5} = \frac{-0.3010 - 2}{0.4771 - 0.699} = 10.37(\because \log 5 = 1 - \log 2)$$

따라서 만족하는 자연수 n 의 최솟값은 11 이다.

33. 매년 매출액의 30%를 임금으로 지급하는 회사가 있다. 2014년 현재 5%인 물가상승률이 2024년까지 10년 동안 매년 같은 비율로 지속된다고 하자. 임금의 물가상승률을 감안하여 2024년 임금이 2007년 현재의 임금에 대하여 실질적으로 3배 인상되었다고 하려면 매년 x%의 매출 신장이 있어야 한다고 한다. 이때, $10x$의 값을 구하여라. (단, 인원수의 변화는 없고, 매출 신장률도 매년 일정하다. 또한 $10^{0.477}=3$, $10^{0.0689}=1.172$, $10^{0.0727}=1.182$로 계산하여라.)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755

▶ 답:

▷ 정답: 172

해설

2014년의 매출액을 a라 하면 2014년의 임금은 $a\times0.3$이다.
이때, 매출액이 매년 x%씩 늘어난다면 2024년의 매출액은

$a\times\left(1+\frac{x}{100}\right)^{10}\cdots$㉠

물가상승률을 감안한 2014년 임금의 실질적인 3배인 2024년의 임금은

$3\times a\times0.3\times1.05^{10}\cdots$㉡,

㉠, ㉡에서 $a\times\left(1+\frac{x}{100}\right)^{10}\times0.3=3\times a\times0.3\times1.05^{10}$

$\therefore\ (1+\frac{x}{100})^{10}=3\times1.05^{10}$

따라서, $10\log\left(1+\frac{x}{100}\right)=\log3+10\log1.05$

㉠ $\Leftrightarrow\log\left(1+\frac{x}{100}\right)=\frac{1}{10}\log3+\log1.05=0.0689=\log1.172$

$\therefore\ 1+\frac{x}{100}=1.172$

$\therefore\ \frac{x}{100}=0.172$

$\therefore\ 10x=172$