1. 두 수 3, 7의 조화중항을 x, 두 수 4, 6의 조화중항을 y라고 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$x=\frac{2\cdot3\cdot7}{3+7}=\frac{42}{10}$, $y=\frac{2\cdot4\cdot6}{4+6}=\frac{48}{10}$

$x+y=\frac{42}{10}+\frac{48}{10}=\frac{90}{10}=9$

2. 8 의 세제곱근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2, $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$

해설

8 의 세제곱근은 $x^3 = 8$ 을 만족하는 x 의 값이므로
$x^3 - 8 = 0$ 에서
$(x-2)(x^2+2x+4) = 0$
$\therefore\ x-2=0$ 또는 $x^2+2x+4=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $x=-1+\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1-\sqrt{3}i$
따라서 8 의 세제곱근은
2, $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$

3. 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α, β의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이므로 α,β의 등차중항은 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$

4. 수열 $\omega,\ \omega^3,\ \omega^5,\ \omega^7,\ \cdots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라. $(\omega^3 = 1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω, 공비가 ω^2, 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega\left\{(\omega^2)^{36} - 1\right\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore\ S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

5. 1과 10 사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

1, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}, 10

1, b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_{20}, 10

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1}$의 값은?

① $\dfrac{10}{21}$ ② $\dfrac{11}{21}$ ③ $\dfrac{20}{11}$ ④ $\dfrac{21}{11}$ ⑤ 2

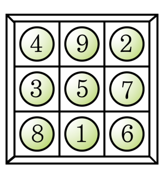
해설

1, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}, 10의 공차를 p라 하면 $1+11p=10 \Rightarrow p=\dfrac{9}{11}$

1, b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_{20}, 10의 공차를 q라 하면 $1+21q=10 \Rightarrow q=\dfrac{9}{21}$

$$\frac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1}=\frac{9p}{9q}=\frac{p}{q}=\frac{\frac{9}{11}}{\frac{9}{21}}=\frac{21}{11}$$

6. 1부터 9까지 번호가 적힌 9개의 공이 있다. 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로, 대각선 방향에 놓여 있는 공에 적힌 수들의 합이 각각 15가 되도록 3×3격자판 위에 빈칸 없이 공을 배열하였다. 위와 같은 방법으로 5부터 40까지 번호가 적힌 36개의 공을 가로, 세로, 대각선 방향에 놓여있는 공에 적힌 수들의 합이 각각 m이 되도록 $n\times n$ 격자판 위에 빈 칸 없이 모두 배열할 때, $m+n$ 의 값은?



① 137　② 139　③ 141　④ 143　⑤ 145

해설

5부터 40까지 모두 36개 이므로 $n=6$

$m=\dfrac{5+6+\cdots+40}{6}=135$

$\therefore\ m+n=141$

7. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = x - 3,\ a_2 = x,\ a_3 = x + 6$이 성립할 때, a_5의 값은?

① 16　② 24　③ 32　④ 48　⑤ 52

해설

x는 $x - 3$과 $x + 6$의 등비중항이므로

$x^2 = (x - 3)(x + 6) = x^2 + 3x - 18$

$3x = 18 \ \therefore x = 6$

즉, $a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 12$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$

8. 5개의 수 $1,\ x,\ y,\ z,\ 16$이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x+y+z$의 값이 될 수 있는 것을 모두 구하여 더하면?

① -10　② -8　③ 8　④ 10　⑤ 18

해설

y는 1과 16의 등비중항이므로 $y^2=16$ $\therefore$ $y=\pm 4$
(i) $y=4$일 때, x는 1과 4의 등비중항이므로
$x^2=4$ $\therefore$ $x=\pm 2$
이때, $x=2$이면 공비가 2가 되므로 $z=8$
또, $x=-2$이면 공비가 -2가 되므로 $z=-8$
(ii) $y=-4$일 때, x는 1과 -4의 등차중항이므로 $x^2=-4$
이것을 만족하는 실수 x의 값은 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 $x=2,\ y=4,\ z=8$ 또는 $x=-2,\ y=4,\ z=-8$ 이므로
$x+y+z=14$ 또는 $x+y+z=-6$
따라서 $x+y+z$의 값이 될 수 있는 것을 모두 더하면 $14+(-6)=8$

9. 두 수열

$\{a_n\} = 6,\ a_2,\ a_3,\ 48, \cdots$

$\{b_n\} = 6,\ b_2,\ b_3,\ 48, \cdots$ 에 대하여

$\{a_n\}$은 등비수열, $\{b_n\}$은 등차수열일 때, $a_{10} - 10b_{10}$ 의 값은?(단, 공비는 실수이다.)

① 1752　② 1843　③ 1950　④ 2250　⑤ 2356

해설

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $a_4 = 48$이므로

$6r^3 = 48,\ r^3 = 8 \quad \therefore\ r = 2(\because\ r$은 실수)

$a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$

수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하면 $b_4 = 48$이므로

$6 + 3d = 48,\ 3d = 42 \quad \therefore\ d = 14$

$b_n = 6 + (n-1) \cdot 14 = 14n - 8$

$\therefore\ a_{10} - 10b_{10} = 6 \times 2^9 - 10(14 \cdot 10 - 8)$

$= 3072 - 1320 = 1752$

10. 8, a, b가 이 순서로 등차수열을 이루고, a, b, 36이 이 순서로 등비수열을 이루도록 하는 양수 a, b의 값을 정할 때, a, b의 최대공약수는?

① 1 ② 3 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

a는 8과 b의 등차중항이므로
$2a = 8 + b \cdots$ ㉠
b는 a와 36의 등비중항이므로
$b^2 = 36a \cdots$ ㉡
㉠에서 $a = \frac{1}{2}(8+b)$ 이므로 ㉡에 대입하면
$b^2 = 18(8+b)$, $b^2 - 18b - 144 = 0$
$(b-24)(b+6) = 0$
$\therefore b = 24$ 또는 $b = -6$
그런데 b는 양수이므로 $b = 24$
$\therefore a = \frac{1}{2}(8+24) = 16$
16과 24의 최대공약수는 8이다.

11. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2 \cdot 3^n + k$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이 되기 위한 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$S_n = 2 \cdot 3^n + k$에서

$a_1 = S_1 = 2 \cdot 3 + k = 6 + k$

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2 \cdot 3^n + k) - (2 \cdot 3^{n-1} + k) \\ &= 2 \cdot 3^{n-1}(3-1) \\ &= 4 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots$ 이 등비수열이 되려면

$\dfrac{a_2}{a_1} = 3$이어야 한다.

즉, $a_2 = 4 \cdot 3^{2-1} = 12$이므로 $\dfrac{12}{6+k} = 3$

$\therefore k = -2$

12. $\sum_{k=1}^{4}(k^3-k^2)$ 의 값은?

① 50 ② 60 ③ 70 ④ 80 ⑤ 90

해설

$\sum_{k=1}^{4}(k^3-k^2)$
$=\sum_{k=1}^{4}k^3-\sum_{k=1}^{4}k^2$
$=\left(\frac{4\cdot 5}{2}\right)^2-\frac{4\cdot 5\cdot 9}{6}$
$=100-30=70$

13. 두 수열 a_n, b_n에 대하여 $a_n = n^3 + 3n^2 + 2n$, $b_n = n^2 + n$일 때, $\sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\right)$의 값은?

① 4000　② 4100　③ 4200　④ 4300　⑤ 4400

해설

$a_n = n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$

$b_n = n^2 + n = n(n+1)$

$\therefore\ \sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\right) = \sum_{i=1}^{4} a_i \left(\sum_{j=1}^{3} b_j\right)$

$= \left(\sum_{i=1}^{4} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} b_j\right)$

$= \left\{\sum_{i=1}^{4} i(i+1)(i+2)\right\} \times \sum_{j=1}^{3} j(j+1)$

$= \sum_{i=1}^{4} (i^3 + 3i^2 + 2i) \times \sum_{j=1}^{3} (j^2 + j)$

$$= \left\{\left(\frac{4\cdot 5}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{4\cdot 5\cdot 9}{6} + 2\cdot\frac{4\cdot 5}{2}\right\}$$

$$\times \left(\frac{3\cdot 4\cdot 7}{6} + \frac{3\cdot 4}{2}\right)$$

$= 210 \times 20 = 4200$

14. 수열 $1\cdot1,\ 2\cdot3,\ 3\cdot5,\ 4\cdot7, \cdots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$
③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$

$= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\left\{2(2n+1)-3\right\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

15. $\sum_{k=1}^{15} \log_2 \left(1+\frac{1}{k}\right)$ 의 값은?

① $\log_2 3$ ② $\log_2 15$ ③ $\log_2 30$

④ 3 ⑤ 4

해설

$\sum_{k=1}^{15} \log_2 \left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{15} \log_2 \frac{k+1}{k}$

$= \sum_{k=1}^{15} \{\log_2(k+1) - \log_2 k\}$

$= (\log_2 2 - \log_2 1) + (\log_2 3 - \log_2 2) + \cdots$

$+ (\log_2 16 - \log_2 15)$

$= \log_2 16 - \log_2 1 = \log_2 2^4 = 4$

16. 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ 을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S = \dfrac{n(1-x^n)}{2}$　　② $S = \dfrac{1-x^n}{2}$

③ $S = \dfrac{1-x^n}{2} - \dfrac{2x^n}{x}$　　④ $S = \dfrac{1-x^n}{1+x} - \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S = \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로 양변에 x를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -)\ xS = & \quad\ \ x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S = & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x \end{array}$$

$$= \frac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$$

$$\therefore S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

17. 다음과 같은 군수열에 대하여 제1군에서 제10군 까지의 합은?

제1군	제2군	제3군	제4군
(1),	(1, 2),	(1, 2, 3),	(1, 2, 3, 4)$\cdots$

① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

해설

제n군의 합을 a_n이라 하면

$a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

따라서, 제 1군에서 제 10군까지의 합은

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^{10} k(k+1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} + \frac{10\cdot 11}{2}\right) \\ &= 220\end{aligned}$$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} = 2a_n + 2$일 때, a_{10}의 값은?

① 1022 ② 1024 ③ 2021 ④ 2046 ⑤ 2082

해설

$a_{n+1} = 2a_n + 2$에서 $a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$
이때, $a_n + 2 = b_n$이라 하면
$b_{n+1} = 2b_n,\ b_1 = a_1 + 2 = 4$
즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4이고, 공비가 2인 등비수열이므로
$b_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$
따라서 $a_n = b_n - 2 = 2^{n+1} - 2$이므로
$a_{10} = 2^{11} - 2 = 2048 - 2 = 2046$

19. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $3+5+\cdots+(2n+1)=n^2+2n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉠]에 알맞은 것은?

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=3$, (우변)$=1^2+2\cdot 1=3$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 식이 성립한다고 가정하면
$3+5+\cdots+(2k+1)=k^2+2k\cdots\cdots$ ①이다.
①의 양변에 $2k+3$를 더하면
$3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
이므로 [㉠]일 때에도 성립한다.
따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n=-k+1$ ② $n=-k+2$ ③ $n=k+1$
④ $n=k+2$ ⑤ $n=2k+1$

해설

㉠의 양변에 $2k+3$를 더하면
$3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)$
$=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
이므로 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
따라서 (i),(ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

20. $10^{0.31} = 2,\ 10^{1.04} = 11$로 계산할 때, $10^a = 275$를 만족하는 a의 값은?

① 2.34　② 2.38　③ 2.42　④ 2.46　⑤ 2.50

해설

$5 = \frac{10}{2} = \frac{10}{10^{0.31}} = 10^{1-0.31} = 10^{0.69}$ 이므로

$275 = 5^2 \times 11 = (10^{0.69})^2 \times 10^{1.04}$

$= 10^{1.38} \times 10^{1.04} = 10^{2.42}$

$\therefore\ a = 2.42$

21. $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$ 일 때, $\dfrac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^{x} + a^{-x}}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2} - 1$

④ $2\sqrt{2} - 1$ ⑤ $2\sqrt{2} - 2$

해설

$a^{-2x} = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$

주어진 식의 분모, 분자에 a^{x} 을 곱하면,

$\dfrac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} = \dfrac{(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) + 1}$

$= \dfrac{3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1$

22. $36^a = 8,\ 6^b = 4$일 때, $2^{\frac{1}{2a-b}}$의 값은?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

해설

$6^{2a} \div 6^b = 2,\ 6^{2a-b} = 2$

$2^{\frac{1}{2a-b}} = (6^{2a-b})^{\frac{1}{2a-b}} = 6$

23. 지진이 발생할 때, 지진의 세기를 진도라 하며 보통 리히터수로 나타낸다. 지질학자 C.F.Richer는 강도가 I인 지진의 진도 R을 다음과 같이 정의하였다.

$R = \log\frac{I}{I_0}$(단, I_0는 표준지진의 강도)

리히터수로 진도 6.8인 지진의 강도는 리히터 수로 진도 4.8인 지진의 강도의 몇배인가?

① 1.4배 ② 2배 ③ $\sqrt{10}$배
④ 10배 ⑤ 100배

해설

진도가 4.8, 6.8일 때의 지진의 강도를 각각 I_1, I_2라 하면

$4.8 = \log\frac{I_1}{I_0}$, $6.8 = \log\frac{I_2}{I_0}$이므로

$\therefore \log\frac{I_2}{I_1} = \frac{10^{6.8}}{10^{4.8}} = 100$(배)

24. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 의 값이 존재하기 위한 실수 x 의 범위는?

① $-1 < x < 3$ ② $0 > x$ ③ $2 < x < 5$

④ $3 < x < 4$ ⑤ $5 < x < 7$

해설

밑의 조건에서 $x-3>0, x-3 \neq 1$

따라서 $x > 3, x \neq 4 \cdots$ ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+6x-8>0$

$x^2-6x+8<0$

$(x-2)(x-4)<0$

따라서 $2 < x < 4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 의 공통범위를 구하면 $3 < x < 4$

25. 양의 실수 x에 대하여 $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$라 하자. $f(\sqrt{a}) = p$, $f(\sqrt{b}) = q$일 때, $f(ab)$의 값을 p, q로 나타내면?

① $2(p+q)$　② $2p$　③ $2q$
④ $2(p-q)$　⑤ $-2p-2q$

해설

$f(x) = \log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2}\log_2 x$이므로

$f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\log_2 a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\log_2 a = p$

$f(\sqrt{b}) = \frac{1}{2}\log_2 b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\log_2 b = q$

$\therefore\ f(ab) = \log_2 \sqrt{ab} = \log_2 \sqrt{a} + \log_2 \sqrt{b}$

$= \frac{1}{2}\log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 b = 2(p+q)$

26. $2^x = a,\ 2^y = b$일 때, $\log_{2ab} a^3b^2$을 $x,\ y$로 나타내면?

① $\dfrac{3x+2y}{1+x+y}$　② $\dfrac{2x+3y}{2+x+y}$　③ $\dfrac{2+x+y}{3x+2y}$

④ $\dfrac{x^2y^2}{4xy}$　⑤ $\dfrac{4xy}{x^3y^2}$

해설

$2^x = a,\ 2^y = b$이므로

$\log_{2ab} a^3b^3 = \log_{2\cdot 2^x \cdot 2^y} (2^x)^3 \cdot (2^y)^2$

$= \log_{2^{1+x+y}} 2^{3x+2y}$

$= \dfrac{3x+2y}{1+x+y} \log_2 2 = \dfrac{3x+2y}{1+x+y}$

27. $\log_{10} 2 = 0.301$ 일 때,
$\dfrac{10(\log_{10} 0.8 - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} 0.7 + \log_{10} 7 - \log_{10} 49}$ 의 값은?

① 3.01 ② 6.02 ③ 6.99 ④ 9.03 ⑤ 10

해설

$$\frac{10(\log_{10} 0.8 - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} 0.7 + \log_{10} 7 - \log_{10} 49}$$

$$= \frac{10(\log_{10} \frac{8}{10} - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} \frac{7}{10} + \log_{10} 7 - \log_{10} 49}$$

$$= \frac{10 \log_{10}(\frac{8}{10} \times \frac{1}{32} \times 8)}{\log_{10}(\frac{7}{10} \times 7 \times \frac{1}{49})}$$

$$= \frac{10 \log_{10} \frac{2}{10}}{\log_{10} \frac{1}{10}} = \frac{10(\log_{10} 2 - 1)}{\log_{10} 10^{-1}}$$

$$= \frac{10(0.301 - 1)}{-1} = 6.99$$

28. 양수 A의 상용로그의 정수 부분이 2일 때, 등식 $\log\frac{A}{2} = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$을 만족하는 자연수 n의 개수는?

① 56　② 57　③ 58　④ 59　⑤ 60

해설

$\log\frac{A}{2} = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$에서

$\log A - \log 2 = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$

$\log A = \log 2 + 2\log 2\sqrt{2} + \log n = \log 2 + \log 8 + \log n = \log 16n$

$A = 16n$

그런데, 양수 A의 상용로그의 정수 부분이 2이므로

$2 \le \log A < 3,\ 10^2 \le A < 10^3$

$\therefore 100 \le 16n < 1000$

$6.25 \le n < 62.5$

따라서 자연수 n의 개수는 $62 - 6 = 56$이다.

29. 네 수 1, a, b, c는 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$를 만족시킨다. 공비 r의 값은? (단, $r > 1$)

① 2　　② $\frac{5}{2}$　　③ 3　　④ $\frac{7}{2}$　　⑤ 4

해설

$a = r,\ b = r^2,\ c = r^3$ 이므로
$\log_8 c = \log_{2^3} r^3 = \log_2 r$
$\log_a b = \log_r r^2 = 2$
따라서, $\log_8 c = \log_a b$에서
$\log_2 r = 2$
$\therefore\ r = 2^2 = 4$

30. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n(n = 1,\ 2,\ 3,\cdots)$으로 정의될 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2014}$를 10으로 나눈 나머지는?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$n = 1,\ 2,\ 3,\cdots,\ 2013$을
차례대로 대입하여 변끼리 곱한다.

$$\begin{aligned} a_n &= n \times (n-1) \times \cdots \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \cdot n \end{aligned}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6,$
$a_4 = 24,\ a_5 = 120,\ a_6 = 6a_5,$
$a_7 = 7a_6,\ \cdots$
따라서, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2014}$을 10으로
나눈 나머지는 3이다.

31. $a_1 = 1,\ a_2 = 10$ 이고

$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \sqrt[3]{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}\,(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log a_3 = \dfrac{q}{p}$ 이다. 이때, 서로소인 두 자연수 $p,\ q$ 의 합 $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \sqrt[3]{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$\log a_{n+2} - \log a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(\log a_{n+1} - \log a_n)$

이때, $\log a_{n+1} - \log a_n = b_n$ 이라 놓으면

$b_1 = \log a_2 - \log a_1 = \log 10 - \log 1 = 1$ 이고,

$b_{n+1} = \dfrac{1}{3} b_n$ 이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

또한, 수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{\log a_n\}$ 의 계차수열이므로

$\log a_n = \log a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(\log a_{k+1} - \log a_k)$

$= \log 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1} = \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$

$\therefore\ \log a_3 = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{8}{9} = \dfrac{4}{3}$

$\therefore\ p + q = 7$

32. $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$ 일 때, 2^{25} 의 최고 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log 2^{25}$ 의 가수를 이용하면 최고 자리의 숫자를 구할 수 있다.
$\log 2^{25} = 25 \log 2 = 25 \times 0.3010 = 7.5250$ 이므로
$\log 2^{25}$ 의 가수는 0.5250 이다.
$\log 2 = 0.3010,\ \ \log 3 = 0.4771,\ \ \log 4 = 2 \log 2 = 0.6020$ 이므로
$\log 3 < 0.5250 < \log 4$
$\therefore 7 + \log 3 < 7.5250 < 7 + \log 4$
$\log(3 \times 10^7) < \log 2^{25} < \log(4 \times 10^7)$
따라서 $3 \times 10^7 < 2^{25} < 4 \times 10^7$ 이므로
2^{25} 의 최고 자리의 숫자는 3 이다.

33. 실수 a에 대하여 $[a]$는 a보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다. 다음 조건을 동시에 만족하는 모든 실수 x의 값의 곱을 M이라 할 때, $\log_{10} M^4$의 값을 구하여라.

> ㉠ $[\log_{10} x] = 1$
>
> ㉡ $\log_{10} x - \log_{10} \frac{1}{x^3} = [\log_{10} x] - \left[\log_{10} \frac{1}{x^3}\right]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

조건 ㉠에서 $[\log_{10} x] = 1$이므로 $\log_{10} x$의 지표는 1이다.

$\therefore 1 \le \log_{10} x < 2$

조건 ㉡에서 $\log_{10} x - [\log_{10} x] = \log_{10} \frac{1}{x^3} - \left[\log_{10} \frac{1}{x^3}\right]$이므로

$\log_{10} x$와 $\log_{10} \frac{1}{x^3}$의 가수가 같다

즉, $\log_{10} x + 3\log_{10} x=$(정수)

$\therefore 4\log_{10} x=$(정수)

㉠에서 $4 \le 4\log_{10} x < 8$

$4\log_{10} x = 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{4},\ \frac{7}{4}$

$\therefore x = 10,\ 10^{\frac{5}{4}},\ 10^{\frac{6}{4}},\ 10^{\frac{7}{4}}$

따라서, x의 값을 모두 곱하면

$M = 10^{1+\frac{5}{4}+\frac{6}{4}+\frac{7}{4}} = 10^{\frac{11}{2}}$

$\therefore \log_{10} M^4 = 22$