

1. 두 수 3, 7의 조화중항을 x , 두 수 4, 6의 조화중항을 y 라고 할 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{3 + 7} = \frac{42}{10}, y = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{4 + 6} = \frac{48}{10}$$

$$x + y = \frac{42}{10} + \frac{48}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

2. 8의 세제곱근을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$

해설

8의 세제곱근은 $x^3 = 8$ 을 만족하는 x 의 값이므로

$x^3 - 8 = 0$ 에서

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$\therefore x-2=0 \text{ 또는 } x^2+2x+4=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=-1+\sqrt{3}i \text{ 또는 } x=-1-\sqrt{3}i$$

따라서 8의 세제곱근은

$$2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i$$

3. 이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, α, β 의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 6$ 이므로 α, β 의 등차중항은

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

4. 수열 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7, \dots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라.
($\omega^3 = 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω , 공비가 ω^2 , 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega \{(\omega^2)^{36} - 1\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

5. 1과 10 사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$$1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$$

$$1, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\frac{a_{10} - a_1}{b_{10} - b_1}$ 의 값은?

① $\frac{10}{21}$

② $\frac{11}{21}$

③ $\frac{20}{11}$

④ $\frac{21}{11}$

⑤ 2

해설

1, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$ 의 공차를 p 라 하면 $1 + 11p = 10 \Rightarrow$

$$p = \frac{9}{11}$$

1, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$ 의 공차를 q 라 하면 $1 + 21q = 10 \Rightarrow$

$$q = \frac{9}{21}$$

$$\frac{a_{10} - a_1}{b_{10} - b_1} = \frac{9p}{9q} = \frac{p}{q} = \frac{\frac{9}{11}}{\frac{9}{21}} = \frac{21}{11}$$

6. 1부터 9까지 번호가 적힌 9개의 공이 있다. 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로, 대각선 방향에 놓여 있는 공에 적힌 수들의 합이 각각 15가 되도록 3×3 격자판 위에 빈칸 없이 공을 배열하였다. 위와 같은 방법으로 5부터 40까지 번호가 적힌 36개의 공을 가로, 세로, 대각선 방향에 놓여있는 공에 적힌 수들의 합이 각각 m 이 되도록 $n \times n$ 격자판 위에 빈 칸 없이 모두 배열할 때, $m = n$ 의 값은?

4	9	2
3	5	7
8	1	6

① 137

② 139

③ 141

④ 143

⑤ 145

해설

5부터 40까지 모두 36개 이므로 $n = 6$

$$m = \frac{5 + 6 + \cdots + 40}{6} = 135$$

$$\therefore m + n = 141$$

7. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = x - 3$, $a_2 = x$, $a_3 = x + 6$ 이 성립할 때, a_5 의 값은?

① 16

② 24

③ 32

④ 48

⑤ 52

해설

x 는 $x - 3$ 과 $x + 6$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = (x - 3)(x + 6) = x^2 + 3x - 18$$

$$3x = 18 \therefore x = 6$$

즉, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$$

8. 5개의 수 1, x , y , z , 16이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 세 실수 x , y , z 에 대하여 $x+y+z$ 의 값이 될 수 있는 것을 모두 구하여 더하면?

① -10

② -8

③ 8

④ 10

⑤ 18

해설

y 는 1과 16의 등비중항이므로 $y^2 = 16 \therefore y = \pm 4$

(i) $y = 4$ 일 때, x 는 1과 4의 등비중항이므로

$$x^2 = 4 \therefore x = \pm 2$$

이때, $x = 2$ 이면 공비가 2가 되므로 $z = 8$

또, $x = -2$ 이면 공비가 -2 가 되므로 $z = -8$

(ii) $y = -4$ 일 때, x 는 1과 -4 의 등차중항이므로 $x^2 = -4$

이것을 만족하는 실수 x 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $x = 2$, $y = 4$, $z = 8$ 또는 $x = -2$, $y = 4$, $z = -8$

이므로

$$x + y + z = 14 \text{ 또는 } x + y + z = -6$$

따라서 $x+y+z$ 의 값이 될 수 있는 것을 모두 더하면 $14+(-6) = 8$

9. 두 수열

$$\{a_n\} = 6, a_2, a_3, 48, \dots$$

$$\{b_n\} = 6, b_2, b_3, 48, \dots \text{에 대하여}$$

$\{a_n\}$ 은 등비수열, $\{b_n\}$ 은 등차수열일 때, $a_{10} - 10b_{10}$ 의 값은?(단, 공비는 실수이다.)

- ① 1752 ② 1843 ③ 1950 ④ 2250 ⑤ 2356

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 $a_4 = 48$ 이므로

$$6r^3 = 48, r^3 = 8 \quad \therefore r = 2 (\because r \text{은 실수})$$

$$a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$$

수열 $\{b_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $b_4 = 48$ 이므로

$$6 + 3d = 48, 3d = 42 \quad \therefore d = 14$$

$$b_n = 6 + (n-1) \cdot 14 = 14n - 8$$

$$\therefore a_{10} - 10b_{10} = 6 \times 2^9 - 10(14 \cdot 10 - 8)$$

$$= 3072 - 1320 = 1752$$

10. 8, a , b 가 이 순서로 등차수열을 이루고, a , b , 36이 이 순서로 등비수열을 이루도록 하는 양수 a , b 의 값을 정할 때, a , b 의 최대공약수는?

① 1

② 3

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

a 는 8과 b 의 등차중항이므로

$$2a = 8 + b \cdots \textcircled{㉠}$$

b 는 a 와 36의 등비중항이므로

$$b^2 = 36a \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $a = \frac{1}{2}(8 + b)$ 이므로 ㉡에 대입하면

$$b^2 = 18(8 + b), \quad b^2 - 18b - 144 = 0$$

$$(b - 24)(b + 6) = 0$$

$$\therefore b = 24 \text{ 또는 } b = -6$$

그런데 b 는 양수이므로 $b = 24$

$$\therefore a = \frac{1}{2}(8 + 24) = 16$$

16과 24의 최대공약수는 8이다.

11. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2 \cdot 3^n + k$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이 되기 위한 상수 k 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$S_n = 2 \cdot 3^n + k \text{에서}$$

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 3 + k = 6 + k$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (2 \cdot 3^n + k) - (2 \cdot 3^{n-1} + k)$$

$$= 2 \cdot 3^{n-1}(3 - 1)$$

$$= 4 \cdot 3^{n-1}$$

따라서 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 이 등비수열이 되려면

$$\frac{a_2}{a_1} = 3 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } a_2 = 4 \cdot 3^{2-1} = 12 \text{이므로 } \frac{12}{6+k} = 3$$

$$\therefore k = -2$$

12. $\sum_{k=1}^4 (k^3 - k^2)$ 의 값은?

① 50

② 60

③ 70

④ 80

⑤ 90

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 (k^3 - k^2) \\ &= \sum_{k=1}^4 k^3 - \sum_{k=1}^4 k^2 \\ &= \left(\frac{4 \cdot 5}{2} \right)^2 - \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} \\ &= 100 - 30 = 70 \end{aligned}$$

13. 두 수열 a_n, b_n 에 대하여 $a_n = n^3 + 3n^2 + 2n$, $b_n = n^2 + n$ 일 때,
 $\sum_{i=1}^4 (\sum_{j=1}^3 a_i b_j)$ 의 값은?

① 4000

② 4100

③ 4200

④ 4300

⑤ 4400

해설

$$a_n = n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$$

$$b_n = n^2 + n = n(n+1)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^4 (\sum_{j=1}^3 a_i b_j) = \sum_{i=1}^4 a_i (\sum_{j=1}^3 b_j)$$

$$= (\sum_{i=1}^4 a_i) \times (\sum_{j=1}^3 b_j)$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^4 i(i+1)(i+2) \right\} \times \sum_{j=1}^3 j(j+1)$$

$$= \sum_{i=1}^4 (i^3 + 3i^2 + 2i) \times \sum_{j=1}^3 (j^2 + j)$$

$$= \left\{ \left(\frac{4 \cdot 5}{2} \right)^2 + 3 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} + 2 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} \right\}$$

$$\times \left(\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} + \frac{3 \cdot 4}{2} \right)$$

$$= 210 \times 20 = 4200$$

14. 수열 $1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$

③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (2k^2 - k)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1) \{2(2n+1) - 3\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

15. $\sum_{k=1}^{15} \log_2 \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ 의 값은?

① $\log_2 3$

② $\log_2 15$

③ $\log_2 30$

④ 3

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} \log_2 \left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{15} \log_2 \frac{k+1}{k} \\&= \sum_{k=1}^{15} \{\log_2(k+1) - \log_2 k\} \\&= (\log_2 2 - \log_2 1) + (\log_2 3 - \log_2 2) + \cdots \\&\quad + (\log_2 16 - \log_2 15) \\&= \log_2 16 - \log_2 1 = \log_2 2^4 = 4\end{aligned}$$

16. 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ 을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S = \frac{n(1-x^n)}{2}$

② $S = \frac{1-x^n}{2}$

③ $S = \frac{1-x^n}{2} - \frac{2x^n}{x}$

④ $S = \frac{1-x^n}{1+x} - \frac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로
양변에 x 를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -) xS &= \quad x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x^n \end{aligned}$$

$$= \frac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$$

$$\therefore S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

17. 다음과 같은 군수열에 대하여 제1군에서 제10군 까지의 합은?

제1군 제2군 제3군 제4군
(1), (1, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 4)...

① 200

② 210

③ 220

④ 230

⑤ 240

해설

제 n 군의 합을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서, 제 1군에서 제 10군까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k(k+1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= 220\end{aligned}$$

18. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$ 이고 $a_{n+1} = 2a_n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값은?

① 1022

② 1024

③ 2021

④ 2046

⑤ 2082

해설

$$a_{n+1} = 2a_n + 2 \text{에서 } a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$$

이때, $a_n + 2 = b_n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = 2b_n, \quad b_1 = a_1 + 2 = 4$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 4이고, 공비가 2인 등비수열이므로

$$b_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

따라서 $a_n = b_n - 2 = 2^{n+1} - 2$ 이므로

$$a_{10} = 2^{11} - 2 = 2048 - 2 = 2046$$

19. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2 + 2n$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉠]에 알맞은 것은?

(i) $n = 1$ 일 때,

(좌변) = 3, (우변) = $1^2 + 2 \cdot 1 = 3$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 식이 성립한다고 가정하면

$$3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = k^2 + 2k \cdots \cdots \textcircled{1} \text{이다.}$$

①의 양변에 $2k + 3$ 를 더하면

$$3 + 5 + \cdots + (2k + 1) + (2k + 3) = k^2 + 2k + (2k + 3) = (k + 1)^2 + 2(k + 1)$$

이므로 [㉠] 일 때에도 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $n = -k + 1$

② $n = -k + 2$

③ $n = k + 1$

④ $n = k + 2$

⑤ $n = 2k + 1$

해설

㉠의 양변에 $2k + 3$ 를 더하면

$$\begin{aligned} & 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) + (2k + 3) \\ &= k^2 + 2k + (2k + 3) = (k + 1)^2 + 2(k + 1) \end{aligned}$$

이므로 $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

20. $10^{0.31} = 2$, $10^{1.04} = 11$ 로 계산할 때, $10^a = 275$ 를 만족하는 a 의 값은?

① 2.34

② 2.38

③ 2.42

④ 2.46

⑤ 2.50

해설

$$5 = \frac{10}{2} = \frac{10}{10^{0.31}} = 10^{1-0.31} = 10^{0.69} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} 275 &= 5^2 \times 11 = (10^{0.69})^2 \times 10^{1.04} \\ &= 10^{1.38} \times 10^{1.04} = 10^{2.42} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2.42$$

21. $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$ 일 때, $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $\sqrt{2} - 1$

④ $2\sqrt{2} - 1$

⑤ $2\sqrt{2} - 2$

해설

$$a^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면,

$$\begin{aligned}\frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} &= \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) + 1} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

22. $36^a = 8$, $6^b = 4$ 일 때, $2^{\frac{1}{2a-b}}$ 의 값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$6^{2a} \div 6^b = 2, \quad 6^{2a-b} = 2$$

$$2^{\frac{1}{2a-b}} = (6^{2a-b})^{\frac{1}{2a-b}} = 6$$

23. 지진이 발생할 때, 지진의 세기를 진도라 하며 보통 리히터수로 나타낸다. 지질학자 C.F.Richer는 강도가 I 인 지진의 진도 R 을 다음과 같이 정의하였다.

$$R = \log \frac{I}{I_0} \text{ (단, } I_0 \text{ 는 표준지진의 강도)}$$

리히터수로 진도 6.8인 지진의 강도는 리히터 수로 진도 4.8인 지진의 강도의 몇배인가?

- ① 1.4 배 ② 2 배 ③ $\sqrt{10}$ 배
④ 10 배 ⑤ 100 배

해설

진도가 4.8, 6.8 일 때의 지진의 강도를 각각 I_1 , I_2 라 하면

$$4.8 = \log \frac{I_1}{I_0}, \quad 6.8 = \log \frac{I_2}{I_0} \text{ 이므로}$$

$$\therefore \log \frac{I_2}{I_1} = \frac{10^{6.8}}{10^{4.8}} = 100(\text{배})$$

24. $\log_{x-3}(-x^2 + 6x - 8)$ 의 값이 존재하기 위한 실수 x 의 범위는?

① $-1 < x < 3$

② $0 > x$

③ $2 < x < 5$

④ $3 < x < 4$

⑤ $5 < x < 7$

해설

밑의 조건에서 $x - 3 > 0, x - 3 \neq 1$

따라서 $x > 3, x \neq 4 \cdots \textcircled{\Gamma}$

진수의 조건에서 $-x^2 + 6x - 8 > 0$

$$x^2 - 6x + 8 < 0$$

$$(x - 2)(x - 4) < 0$$

따라서 $2 < x < 4 \cdots \textcircled{\text{L}}$

$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\text{L}}$ 의 공통범위를 구하면 $3 < x < 4$

25. 양의 실수 x 에 대하여 $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$ 라 하자. $f(\sqrt{a}) = p$, $f(\sqrt{b}) = q$ 일 때, $f(ab)$ 의 값을 p, q 로 나타내면?

① $2(p+q)$

② $2p$

③ $2q$

④ $2(p-q)$

⑤ $-2p-2q$

해설

$$f(x) = \log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_2 x \text{ 이므로}$$

$$f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \log_2 a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \log_2 a = p$$

$$f(\sqrt{b}) = \frac{1}{2} \log_2 b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \log_2 b = q$$

$$\begin{aligned} \therefore f(ab) &= \log_2 \sqrt{ab} = \log_2 \sqrt{a} + \log_2 \sqrt{b} \\ &= \frac{1}{2} \log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 b = 2(p+q) \end{aligned}$$

26. $2^x = a$, $2^y = b$ 일 때, $\log_{2ab} a^3 b^2$ 을 x , y 로 나타내면?

① $\frac{3x + 2y}{1 + x + y}$

② $\frac{2x + 3y}{2 + x + y}$

③ $\frac{2 + x + y}{3x + 2y}$

④ $\frac{x^2 y^2}{4xy}$

⑤ $\frac{4xy}{x^3 y^2}$

해설

$2^x = a$, $2^y = b$ 이므로

$$\log_{2ab} a^3 b^3 = \log_{2 \cdot 2^x \cdot 2^y} (2^x)^3 \cdot (2^y)^2$$

$$= \log_{2^{1+x+y}} 2^{3x+2y}$$

$$= \frac{3x + 2y}{1 + x + y} \log_2 2 = \frac{3x + 2y}{1 + x + y}$$

27. $\log_{10} 2 = 0.301$ 일 때,

$\frac{10(\log_{10} 0.8 - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} 0.7 + \log_{10} 7 - \log_{10} 49}$ 의 값은?

① 3.01

② 6.02

③ 6.99

④ 9.03

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} & \frac{10(\log_{10} 0.8 - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} 0.7 + \log_{10} 7 - \log_{10} 49} \\ &= \frac{10(\log_{10} \frac{8}{10} - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} \frac{7}{10} + \log_{10} 7 - \log_{10} 49} \\ &= \frac{10 \log_{10} (\frac{8}{10} \times \frac{1}{32} \times 8)}{\log_{10} (\frac{7}{10} \times 7 \times \frac{1}{49})} \\ &= \frac{10 \log_{10} \frac{2}{10}}{\log_{10} \frac{1}{10}} = \frac{10(\log_{10} 2 - 1)}{\log_{10} 10^{-1}} \\ &= \frac{10(0.301 - 1)}{-1} = 6.99 \end{aligned}$$

28. 양수 A 의 상용로그의 정수 부분이 2일 때, 등식 $\log \frac{A}{2} = 2 \log 2 \sqrt{2} + \log n$ 을 만족하는 자연수 n 의 개수는?

① 56

② 57

③ 58

④ 59

⑤ 60

해설

$$\log \frac{A}{2} = 2 \log 2 \sqrt{2} + \log n \text{에서}$$

$$\log A - \log 2 = 2 \log 2 \sqrt{2} + \log n$$

$$\log A = \log 2 + 2 \log 2 \sqrt{2} + \log n = \log 2 + \log 8 + \log n = \log 16n$$

$$A = 16n$$

그런데, 양수 A 의 상용로그의 정수 부분이 2이므로

$$2 \leq \log A < 3, 10^2 \leq A < 10^3$$

$$\therefore 100 \leq 16n < 1000$$

$$6.25 \leq n < 62.5$$

따라서 자연수 n 의 개수는 $62 - 6 = 56$ 이다.

29. 네 수 1, a , b , c 는 이 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$ 를 만족시킨다. 공비 r 의 값은? (단, $r > 1$)

① 2

② $\frac{5}{2}$

③ 3

④ $\frac{7}{2}$

⑤ 4

해설

$a = r$, $b = r^2$, $c = r^3$ 이므로

$$\log_8 c = \log_{2^3} r^3 = \log_2 r$$

$$\log_a b = \log_r r^2 = 2$$

따라서, $\log_8 c = \log_a b$ 에서

$$\log_2 r = 2$$

$$\therefore r = 2^2 = 4$$

30. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의될 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2014}$ 를 10으로 나눈 나머지는?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$n = 1, 2, 3, \dots, 2013$ 을
차례대로 대입하여 변끼리 곱한다.

$$\begin{aligned} a_n &= n \times (n-1) \times \dots \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \end{aligned}$$

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6,$$

$$a_4 = 24, a_5 = 120, a_6 = 6a_5,$$

$$a_7 = 7a_6, \dots$$

따라서, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2014}$ 을 10으로
나눈 나머지는 3이다.

31. $a_1 = 1, a_2 = 10$ 이고

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \sqrt[3]{\frac{a_{n+1}}{a_n}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$\log a_3 = \frac{q}{p}$ 이다. 이때, 서로소인 두 자연수 p, q 의 합 $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \sqrt[3]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log a_{n+2} - \log a_{n+1} = \frac{1}{3}(\log a_{n+1} - \log a_n)$$

이때, $\log a_{n+1} - \log a_n = b_n$ 이라 놓으면

$$b_1 = \log a_2 - \log a_1 = \log 10 - \log 1 = 1 \text{ 이고,}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n \text{ 이므로 } b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

또한, 수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{\log a_n\}$ 의 계차수열이므로

$$\log a_n = \log a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\log a_{k+1} - \log a_k)$$

$$= \log 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

$$\therefore \log a_3 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore p + q = 7$$

32. $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$ 일 때, 2^{25} 의 최고 자리의 숫자를 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log 2^{25}$ 의 가수를 이용하면 최고 자리의 숫자를 구할 수 있다.

$$\log 2^{25} = 25 \log 2 = 25 \times 0.3010 = 7.5250 \text{ 이므로}$$

$\log 2^{25}$ 의 가수는 0.5250이다.

$\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771, \log 4 = 2 \log 2 = 0.6020$ 이므로

$$\log 3 < 0.5250 < \log 4$$

$$\therefore 7 + \log 3 < 7.5250 < 7 + \log 4$$

$$\log(3 \times 10^7) < \log 2^{25} < \log(4 \times 10^7)$$

따라서 $3 \times 10^7 < 2^{25} < 4 \times 10^7$ 이므로

2^{25} 의 최고 자리의 숫자는 3이다.

33. 실수 a 에 대하여 $[a]$ 는 a 보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다. 다음 조건을 동시에 만족하는 모든 실수 x 의 값의 곱을 M 이라 할 때, $\log_{10} M^4$ 의 값을 구하여라.

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad [\log_{10} x] = 1$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \quad \log_{10} x - \log_{10} \frac{1}{x^3} = [\log_{10} x] - \left[\log_{10} \frac{1}{x^3} \right]$$

▶ 답 :

▶ 정답 : 22

해설

조건 ㉠에서 $[\log_{10} x] = 1$ 이므로 $\log_{10} x$ 의 지표는 1이다.

$$\therefore 1 \leq \log_{10} x < 2$$

조건 ㉡에서 $\log_{10} x - [\log_{10} x] = \log_{10} \frac{1}{x^3} - \left[\log_{10} \frac{1}{x^3} \right]$ 이므로

$\log_{10} x$ 와 $\log_{10} \frac{1}{x^3}$ 의 가수가 같다

즉, $\log_{10} x + 3 \log_{10} x = (\text{정수})$

$$\therefore 4 \log_{10} x = (\text{정수})$$

$$\textcircled{\text{㉠}} \text{에서 } 4 \leq 4 \log_{10} x < 8$$

$$4 \log_{10} x = 1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}$$

$$\therefore x = 10, 10^{\frac{5}{4}}, 10^{\frac{6}{4}}, 10^{\frac{7}{4}}$$

따라서, x 의 값을 모두 곱하면

$$M = 10^{1 + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4}} = 10^{\frac{11}{2}}$$

$$\therefore \log_{10} M^4 = 22$$