1. 수열 $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ \cdots$ 의 11 번째 항은?

① -13 ② -10 ③ 11 ④ -11 ⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 자연수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 11 번째 항은 11 이다.

2. 수열 $\log 3, \log 9, \log 27, \cdots$ 의 제 101 항은?

① $10 \log 3$ ② $99 \log 3$ ③ $100 \log 3$

④ $101 \log 3$ ⑤ $102 \log 3$

해설

$a_1 = \log 3$

$a_2 = \log 9 = 2 \log 3$

$a_3 = \log 27 = 3 \log 3$

$\vdots$

$a_n = n \log 3$

$\therefore a_{101} = 101 \log 3$

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_6 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$, $a_6 + a_7 = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ 일 때, a_6의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \pm 1$(복호동순), $a_5 + a_7 = 2a_6$이므로

$(a_5 + a_6) + (a_6 + a_7) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)$에서

$4a_6 = 2\sqrt{3} \quad \therefore \ a_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. 등차수열 10, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{99}, -390에서 공차는?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$b_1 = 10$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_2$, $\cdots$,

$b_{100} = a_{99}$, $b_{101} = -390$

$\therefore\ b_{101} = 10 + (101-1)\cdot d = -390$

$100d = -400$

$\therefore\ d = -4$

5. 첫째항이 -43, 공차가 7인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 8항 ② 제 9항 ③ 제 10항

④ 제 11항 ⑤ 제 12항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = -43 + (n-1) \times 7 = 7n - 50$

이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은

$7n - 50 > 0, \; 7n > 50$

$\therefore \; n > \dfrac{50}{7} = 7.14\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제8항이다.

6. 제 3항이 6이고 제 7항이 96인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_3 = ar^2 = 6 \cdots\cdots ㉠$

$a_7 = ar^6 = 96 \cdots\cdots ㉡$

㉡ $\div$ ㉠에서 $r^4 = 16$

$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2 \ (\because r > 0)$

㉠에 대입하면 $a = \frac{3}{2}$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2이므로 곱은 3

7. 세 수 $a,\ a+2,\ 2a+1$이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a의 값은? (단, $a>0$)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

세 수 $a,\ a+2,\ 2a+1$이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$(a+2)^2 = a(2a+1)$

$a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$\therefore\ a=4(\because a>0)$

8. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n + 2$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$
이므로

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2)$

$= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9)$

$= 16$

9. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{7}{8}}$ ㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2$

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = 9$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}}$

$\therefore$ 참

㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$ $\therefore$ 거짓

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = (3^{\sqrt{2}})^2 = 3^{2\sqrt{2}}$ $\therefore$ 거짓

10. $5^a = 2,\ 5^b = 3$이라 할 때, $\log_6 72$를 a와 b의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\dfrac{a+b}{a-b}$ ② $\dfrac{2a+b}{b-a}$ ③ $\dfrac{2a-b}{a+b}$

④ $\dfrac{2a+b}{a+b}$ ⑤ $\dfrac{3a+2b}{a+b}$

해설

$a = \log_5 2,\ \ b = \log_5 3$

$$\log_6 72 = \frac{3\log_5 2 + 2\log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{3a+2b}{a+b}$$

11. 첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$$S_{10} = a_{11}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2}$$

$$a_{11} = a + 10d$$

$$\frac{10(2a+9d)}{2} = 10a + 45d$$

$$10a + 45d = a + 10d$$

$$9a = -35d$$

$a = 35$이므로 $d = -9$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = \frac{10(70-81)}{2} = \frac{-110}{2} = -55$$

12. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sum_{k=1}^{6}(-1)^k k = -1+2-3+4-5+6$

② $\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{63}{64}$

③ $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$

④ $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{9}{10}$

⑤ $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1$

해설

② $\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \dfrac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{63}{64}$

④ $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$= 1-\frac{1}{11} = \frac{10}{11}$

13. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21$ 의 값은?

① 2200 ② 2640 ③ 2860 ④ 3020 ⑤ 3080

해설

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21 = \sum_{k=1}^{20} k(k+1)$

$= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k = \dfrac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \dfrac{20 \cdot 21}{2}$

$= 2870 + 210 = 3080$

14. n개의 수 $1 \cdot 2n,\ 2 \cdot (2n-1),\ 3 \cdot (2n-2), \cdots,\ n(n+1)$의 합은?

① $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$ ② $\dfrac{n(n+1)^2}{2}$

③ $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$ ④ $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{3}$

⑤ $n(n+1)(2n+1)$

해설

주어진 수열의 제 k항은

$k\left\{2n-(k-1)\right\} = k(2n-k+1)$

$= -k^2 + (2n+1)k$

이므로 구하는 합은

$\sum_{k=1}^{n} k\left\{2n-(k-1)\right\}$

$= -\sum_{k=1}^{n} k^2 + (2n+1)\sum_{k=1}^{n} k$

$= -\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1) \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

15. 100차 방정식 $x^{100}-5x-2=0$의 근을 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{100}이라 할 때, $\sum_{k=1}^{100} x_k^{100}$의 값은?

① 100　② 125　③ 200　④ 225　⑤ 325

해설

$x^{100}=5x+2$에서 x에 모든 근을 대입해 보면

$x_k^{100}=5x_k+2$

또한 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 100차 방정식의 모든 근의 합은 0이므로 $\sum_{k=1}^{100} x_k$의 값은 0이다.

따라서

$\sum_{k=1}^{100} x_k^{100}=\sum_{k=1}^{100}(5x_k+2)$

$=5\sum_{k=1}^{100} x_k+\sum_{k=1}^{100} 2=200$

16. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ 의 값은?

① $\sqrt{n-1}-1$　② $\sqrt{n+1}-1$　③ $\sqrt{n+1}$

④ $\sqrt{n+1}+1$　⑤ $\sqrt{2n+1}+1$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

따라서

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$= \sqrt{n+1}-1$

17. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족할 때, $S_5 = a_1 + a_2 + \cdots + a_5$의 값은?

① 31　② 63　③ 127　④ 255　⑤ 511

해설

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{2}{1} = 2$

이므로 1이고, 공비는 2이다.

$$\therefore\ S_5 = \frac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 31$$

18. 수열 $\{a_n\}$이 $\log_3 a_n - 2\log_3 a_{n+1} + \log_3 a_{n+2} = 0(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족하고, $a_1 = 1,\ a_2 = 3$일 때, $\log_3 a_{10}$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 6　　④ 9　　⑤ 18

해설

$\log_3 a_n - 2\log_3 a_{n+1} + \log_3 a_{n+2} = 0(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에서

$2\log_3 a_{n+1} = \log_3 a_n + \log_3 a_{n+2}$

$\log_3 a_{n+1}^2 = \log_3 a_n a_{n+2}$

$\therefore\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고,

$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{3}{1} = 3$이므로 첫째항은 1이고, 공비는 3이다.

즉, $a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$이므로 $a_{10} = 3^9$

$\therefore\ \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9$

19. 두 수열 a_n, b_n 에 대하여 $b_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$ 이 성립한다. $b_n = 3^{n(n+1)}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{100} \dfrac{1}{\log_3 a_k \cdot \log_3 a_{k+1}}$ 의 값은?

① $\dfrac{5}{33}$ ② $\dfrac{25}{99}$ ③ $\dfrac{15}{101}$ ④ $\dfrac{25}{101}$ ⑤ $\dfrac{35}{101}$

해설

$b_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$ 이므로

$$a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{3^{n(n+1)}}{3^{(n-1)n}} = 3^{2n}$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\log_3 a_k \cdot \log_3 a_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\log_3 3^{2k} \cdot \log_3 3^{2k+2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2k \cdot 2(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{101}\right)$$

20. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$이 성립함을 증명한 것이다. □안에 알맞은 것은?

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{}=(k+1)^2$이므로
$n=k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $2k+1$ ② $2k-1$ ③ $2k$
④ $k+1$ ⑤ $k-1$

해설

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}=(k+1)^2$이므로
$n=k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

21. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $4^n \le 2^{n-1}(1+3^n)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 4$, (우변)$= 2^{1-1}(1+3) = 4$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n = k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
> 양변에 4를 곱하면
> $4^{k+1} \le \boxed{\quad (가) \quad}(1+3^k)$
> $= 2^k(2+2\cdot 3^k)$
> $= 2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{\quad (나) \quad}$
> 따라서, $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

해설

(ii) $n = k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
$4^{k+1} \le \boxed{2^{k+1}}(1+3^k)$
$= 2^k(2+2\cdot 3^k)$
$= 2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{2^k(1+3^{k+1})}$
따라서, $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

22. 임의의 실수 x의 네제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(x)$라 할 때, $f(2^{-2})+f(-2^2)+f(2^0)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2^{-2}=\dfrac{1}{4}>0,\ -2^2=-4<0,\ 2^0=1>0$이고 4는 짝수이므로

$f(2^{-2})+f(-2^2)+f(2^0)$

$=2+0+2$

4

23. $a>0$이고 $m,\ n,\ p$가 2이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

② $\sqrt[2p]{a^{mp}}=\sqrt{a^m}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m\cdot(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt{a^{mn}}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}}=a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$$(\sqrt[n]{a})^m\cdot(\sqrt[m]{a})^n=a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}}=a^{\frac{m^2+n^2}{mn}}$$

24. $\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}\right)^3$ 을 계산하면?

① 12　② 15　③ 18　④ 21　⑤ 24

해설

$(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)=(\sqrt[3]{3})^3-1=2$ 이므로

$\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\sqrt[3]{3}-1$

$(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)=(\sqrt[3]{3})^3+1=4$ 이므로

$\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}=\sqrt[3]{3}+1$

$\therefore\ \left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}\right)^3$

$=(\sqrt[3]{3}-1+\sqrt[3]{3}+1)^3=(2\cdot\sqrt[3]{3})^3=24$

25. $a = \log_4(3 - \sqrt{8})$ 일 때, $2^a + 2^{-a}$ 의 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}+1$ ③ $2\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{3}+1$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

로그의 정의에 의하여

$4^a = 3 - 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2^{2a} = 3 - 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2^a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2^a = \sqrt{2} - 1$

$$2^{-a} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$\Leftrightarrow 2^{-a} = \sqrt{2} + 1$

$2^a + 2^{-a} = 2\sqrt{2}$

26. 보기 중 유리수인 것은 모두 몇 개인가?

$\sqrt{10}^{\log_{10} 4}$, $\sqrt{10^{\frac{1}{2}}}$, 2^{-10}, $10^{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt{2}^{-\log_2 4}$, $(\log_2 16)^{\frac{1}{2}}$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

Q를 유리수의 집합이라 하자.

$$\sqrt{10}^{\log_{10} 4} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_{10} 2} = 10^{\log_{10} 2} = 2 \in Q$$

$$\sqrt{10^{\frac{1}{2}}} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{4}} \notin Q$$

$$2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} \in Q$$

$$10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \notin Q$$

$$\sqrt{2^{-\log_2 4}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_2 \frac{1}{2}} = 2^{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \in Q$$

$$(\log_2 16)^{\frac{1}{2}} = (\log_2 2^4)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2 \in Q$$

따라서, 유리수인 것은 4개다.

27. $\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$ 의 소수부분을 x라 할 때, 2^{x+1} 의 값을 구하면?

① $\sqrt{3}+1$ ② $\sqrt{5}+1$ ③ $\sqrt{6}+1$

④ $\sqrt{7}+1$ ⑤ $2\sqrt{2}+1$

해설

$\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$

$= \log_2 \sqrt{7+2\sqrt{6}}$

$= \log_2(\sqrt{6}+1)$

$= \log_2(3.\times\times\times)$

$= 1.\times\times\times$

따라서, $x = \log_2(\sqrt{6}+1) - 1$

$2^{x+1} = 2^{\log_2(\sqrt{6}+1)} = \sqrt{6}+1$

28. 5^{40} 을 $a \times 10^n (1 < a < 10, n$ 은 정수) 의 꼴로 나타낼 때, $\log a$ 의 소수 부분을 다음 상용로그표를 이용하여 구한것은?

수	0	1	2	3
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284
2.2	0.3234	0.3444	0.3464	0.3483
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674
2.4	0.3802	0.3820	0.3888	0.3856

① 0.064 ② 0.18 ③ 0.408 ④ 0.84 ⑤ 0.96

해설

$5^{40} = a \times 10^n$ 에서 양변에 상용로그를 취하면

$\log 5^{40} = \log(a \times 10^{40}) = n + \log a \cdots$ ㉠

$1 < a < 10$ 이므로 $0 < \log a < 1$ 이다.

$$\begin{aligned}\log 5^{40} &= 40 \log 5 = 40 \times (1 - \log 2) \\ &= 40 \times 0.6990 \\ &= 27.96\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서 $n = 27, \log a = 0.96$

따라서 $\log a$ 의 소수 부분은 0.96 이다.

29. $\log 0.008$ 의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y라 할 때, $x+10^y$ 의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$\log 0.008 = \log 8 - \log 1000$

$= \log 8 - 3 = -3 + \log 8$

따라서 $x = -3$ 이고, $y = \log 8$ 이므로

$x + 10^y = -3 + 10^{\log 8} = -3 + 8 = 5$

30. 상용로그 $\log x$의 정수 부분은 3이고, $\log x$와 $\log x^2$의 소수 부분의 합은 1이다. 이때, $\log x^3$의 값은?

① 9 또는 10　　② 10 또는 11　　③ 11 또는 12

④ 12 또는 13　　⑤ 13 또는 14

해설

$\log x = 3 + \alpha (0 \le \alpha < 1)$로 놓으면

$\log x^2 = 2\log x = 6 + 2\alpha (0 \le 2\alpha < 2)$이므로

(i) $0 \le \alpha < \dfrac{1}{2}$일 때,

$\log x^2$의 소수 부분은 2α이므로

$$\alpha + 2\alpha = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$$

(ii) $\dfrac{1}{2} \le \alpha < 1$일 때,

$\log x^2$의 소수 부분은 $2\alpha - 1$이므로

$$\alpha + (2\alpha - 1) = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{2}{3}$$

(i),(ii)에서 $\alpha = \dfrac{1}{3}$ 또는 $\alpha = \dfrac{2}{3}$이므로

$\log x^3 = 3\log x = 9 + 3\alpha$의 값은 10또는 11이다.

31. 상용로그 $\log A$의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $2x^2+3x+k=0$의 두 근이고, 상용로그 $\log B$의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $3x^2-4kx-3=0$의 두 근일 때, $\frac{A}{B}$의 값은? (단, k는 상수)

① $10^{-\frac{5}{6}}$　② $10^{-\frac{1}{6}}$　③ $10^{\frac{5}{6}}$　④ $10^{\frac{7}{6}}$　⑤ $10^{\frac{11}{6}}$

해설

$\log A = n + \alpha$(n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)라 하면
n과 α는 이차방정식 $2x^2+3x+k=0$의 두 근이므로
근과 계수의 관계에 의하여

$$n+\alpha = -\frac{3}{2},\ n\alpha = \frac{k}{2}$$

$n+\alpha = -2+\frac{1}{2}$이므로 $n=-2,\ \alpha=\frac{1}{2}$

$$\therefore k = 2n\alpha = 2\cdot(-2)\cdot\frac{1}{2} = -2$$

따라서 이차방정식 $3x^2+8x-3=0$에서

$(x+3)(3x-1)=0\quad \therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

$$\therefore \log B = -3+\frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$\therefore A = 10^{-\frac{3}{2}},\ B = 10^{-\frac{8}{3}}$$

$$\therefore \frac{A}{B} = 10^{-\frac{3}{2}+\frac{8}{3}} = 10^{\frac{7}{6}}$$

32. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 알맞은 수를 나열한 것은?

$\log 5$, (가), (나), (다), $\log 80$, $\cdots$

① 1, $\log 20$, $\log 40$

② $\log 15$, $\log 20$, $\log 40$

③ $\log 20$, $\log 40$, $\log 50$

④ $\log 27$, $\log 45$, $\log 50$

⑤ $\log 27$, $\log 45$, $\log 52$

해설

주어진 수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 제 n항을 a_n이라고 하면
첫째항이 $\log 5$, 제 5항이 $\log 80$이므로

$a = \log 5 \cdots$ ㉠

$a_5 = \log 80$에서 $a + 4d = \log 80 \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4d = \log 80 - \log 5 = \log \frac{80}{5}$$

$$= \log 16 = 4 \log 2$$

$$\therefore \ d = \log 2$$

$$\therefore \ a_2 = a + d = \log 5 + \log 2 = \log 10$$

$$a_3 = a_2 + d = \log 10 + \log 2 = \log 20$$

$$a_4 = a_3 + d = \log 20 + \log 2 = \log 40$$

33. 소리를 발생하는 음원의 음향 파워레벨(L)의 단위를 데시벨(dB)이라 하며 그 크기가 다음과 같다.

$L = 10\log\frac{W}{10^{-12}}$ (단 W는 음원의 음향파워이고 단위는 와트$/m^2$)

음향 파워가 10^{-8}(와트$/m^2$)인 음원의 음향파워레벨은 몇 데시벨인지 구하면?

① 8 ② 12 ③ 26 ④ 40 ⑤ 64

해설

주어진 식에 음향 파워가 10^{-8}(와트$/m^2$)를 대입하면

$$\begin{aligned} L &= 10\log\frac{10^{-8}}{10^{-12}} \\ &= 10\log\frac{1}{10^{-4}} \\ &= 10\times 4 = 40dB \end{aligned}$$