**1.** 다음 (　　) 안에 알맞은 수는?

$$\frac{\sqrt{3}}{1},\ \frac{\sqrt{5}}{4},\ \frac{\sqrt{7}}{9},\ (\quad),\ \frac{\sqrt{11}}{25}$$

① $\frac{\sqrt{7}}{12}$　② $\frac{\sqrt{3}}{12}$　③ $\frac{3}{16}$　④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$　⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며, 분자는 $\sqrt{+2}$의 규칙으로 나타난다.
따라서 (　) 안에 들어갈 수의 분자는 $\sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$이다.
분모는 $+1$이 된 수의 제곱의 규칙으로 나타난다.
따라서 (　) 안에 들어갈 수의 분모는 $(3+1)^2 = 16$이므로 (　) 안에 들어갈 수는 $\frac{3}{16}$

**2.** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 $n$항까지의 합 $S_n$이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, $a_{20}$의 값은?

① 38  ② 39  ③ 41  ④ 42  ⑤ 43

해설

$a_{20} = S_{20} - S_{19}$
$S_{20} = 20^2 + 40 - 1 = 439,$
$S_{19} = 19^2 + 38 - 1 = 398$
$\therefore\ a_{20} = 439 - 398 = 41$

**3.** 세 수 $-7+2x,\ 5+x,\ 5-4x$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $x$의 값은?

① $-4$ ② $-3$ ③ $-2$ ④ $-1$ ⑤ $1$

해설

$-7+2x,\ 5+x,\ 5-4x$가 등차수열을 이루면 $5+x$가 등차중항이므로

$2(5+x)=-7+2x+5-4x$

$4x=-12$

$\therefore\ x=-3$

**4.** $a$, $-6$, $b$, $-12$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $1$ ④ $2$ ⑤ $3$

해설

$b$는 $-6$과 $-12$의 등차중항이므로

$b=\frac{-6+(-12)}{2}=-9$

따라서 이 수열은 공차가 $-3$인 등차수열이다.

$a+(-3)=-6$에서 $a=-3$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-9}{-3}=3$

**5.** 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$a_n$ 의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$ 라 하면

$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$

$\therefore 4a + 48d = 32$

$a + 12d = 8$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

**6.** 제 3 항이 12 이고 제 6 항이 $-96$ 인 등비수열의 일반항 $a_n$ 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$　② $(-3) \cdot 2^{n-1}$　③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$
④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$　⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = 12$
$a_6 = ar^5 = -96$
$r^3 = -8$
$\therefore r = -2$
$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$
$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

**7.** 2와 18의 등비중항을 $x$, 2와 18의 등차중항을 $y$라 할 때, $x^2+y^2$의 값은?

① 122 ② 128 ③ 136 ④ 146 ⑤ 152

해설

$x$는 2와 18의 등비중항이므로
$x^2 = 2 \times 18 = 36$
$y$는 2와 18의 등차중항이므로
$2y = 2 + 18 = 20$
$\therefore y = 10$
$\therefore x^2 + y^2 = 36 + 100 = 136$

**8.** 수열 $1,\ a,\ \frac{1}{16},\ b, \cdots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

첫째항$= 1$, 공비$= a$

$a_n = a^{n-1}$

$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm\frac{1}{4}$

$a_4 = a^3 = \pm\frac{1}{64} = b$

$\therefore \frac{\pm\frac{1}{4}}{\pm\frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16$($\because$복호동순)

**9.** 제 4 항이 $-16$, 제 7 항이 128 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 20 항까지의 합은?

① $\frac{1}{3}(2^{20}-1)$ ② $\frac{1}{3}(1-2^{20})$ ③ $\frac{1}{3}(1-2^{20})$
④ $2(1-2^{20})$ ⑤ $2(1+2^{20}))$

해설

첫째항을 $a$, 공비를 $r$ 이라 하면
$ar^3=-16,\ ar^6=128$
$r^3=-8$
$\therefore\ r=-2,\ a=2$
$S_{20}=\dfrac{2\left\{1-(-2)^{20}\right\}}{1-(-2)}$
$=\dfrac{2}{3}(1-2^{20})$

**10.** $x = \dfrac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}$ 일 때, 다음 중 $b^x$ 과 같은 것은?

① $a$ ② $b$ ③ $a^b$ ④ $b^2$ ⑤ $\log_a b$

해설

주어진 식을 밑 변환의 공식에 의해 변형하면

$$x = \frac{\dfrac{\log_b(\log_a b)}{\log_b a}}{\dfrac{\log_b b}{\log_b a}} = \log_b(\log_a b)$$

로그의 정의에 의해 $b^x = \log_a b$

**11.** 수열 9, 99, 999, 9999, $\cdots$ 의 첫째항부터 제$n$항까지의 합은?

① $\frac{1}{9}(10^n-1)-n$　　② $\frac{1}{9}(10^n-1)$

③ $\frac{8}{9}(10^n-1)-n$　　④ $\frac{10}{9}(10^n-1)$

⑤ $\frac{10}{9}(10^n-1)-n$

해설

$9=10-1,\ 99=10^2-1,\ 999=10^3-1,\ \cdots,\underbrace{99\cdots9}_{n\text{개}}=10^n-1$

이므로 구하는 합 $S_n$은

$$\begin{aligned} S_n &= 9+99+999+\cdots+\underbrace{99\cdots9}_{n\text{개}} \\ &= (10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots \\ &\quad +(10^n-1) \\ &= (10+10^2+\cdots+10^n)-n \\ &= \frac{10(10^n-1)}{10-1}-n \\ &= \frac{10}{9}(10^n-1)-n \end{aligned}$$

**12.** 다음 등식이 성립하도록 하는 $c$의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=11}^{100}(k-2)^2=\sum_{k=11}^{100}k^2-4\sum_{k=11}^{100}k+c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 360

해설

$\sum_{k=11}^{100}(k-2)^2=\sum_{k=11}^{100}(k^2-4k+4)$

$=\sum_{k=11}^{100}-4\sum_{k=11}^{100}k+\sum_{k=11}^{100}4$

$\therefore\ c=\sum_{k=11}^{100}4=4+4+\cdots+4=4\times 90=360$

**13.** 다음을 계산하여라.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

▶ 답:

▷ 정답: 1045

해설

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$
$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k-2)$
$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$
$= 3\sum_{k=1}^{10} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k$
$= 3 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}$
$= 1155 - 110$
$= 1045$

**14.** 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$, $B = \sum_{k=1}^{10} a_{2k}$라 할 때, 다음 중 이 수열의 공비 $r$을 나타내는 것은?(단, $a_1 \neq 0$, $r > 0$)

① $\frac{B}{A}$ ② $\frac{A}{B}$ ③ $\sqrt{\frac{B}{A}}$ ④ $\sqrt{\frac{A}{B}}$ ⑤ $\sqrt{AB}$

해설

$A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{19}$
$= a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}$
$B = \sum_{k=1}^{10} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20}$
$= ar + ar^3 + ar^5 + \cdots + ar^{19}$
$= r\left\{a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}\right\} = r \cdot A$

따라서 $r = \frac{B}{A}$

**15.** 수열 $1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 9,\ \cdots$ 에서 13은 제 $a$항까지 계속된다. 마지막으로 나오는 13을 제$b$항이라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 50

해설

같은 숫자끼리 괄호로 묶으면

$(1), (3,\ 3), (5,\ 5,\ 5), (7,\ 7,\ 7,\ 7), (9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9), \cdots$

이 수열의 규칙을 살펴보면 13은 제 7군에 속한다.

6군까지의 항수가 $1+2+3+4+5+6=21$이므로 제 7군의 첫째항은 제 22항이고, 끝항은 제 28항이 된다.

따라서 $a+b=22+28=50$

**16.** 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 제 20항은?

① $\frac{9}{64}$ ② $\frac{11}{64}$ ③ $\frac{9}{32}$ ④ $\frac{19}{32}$ ⑤ $\frac{21}{32}$

해설

분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

제1군　제2군　제3군

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \cdots\cdots$

제 $n$군까지의 항수는

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

따라서, 제 4군까지 항수는 15개이므로 구하는 제 20항은 제5군의 제5항이다.

한편, 제 $n$군의 제 $m$항은 $\frac{2m-1}{2^n}$ 이므로

제5군의 제5항은 $\frac{9}{2^5}=\frac{9}{32}$

**17.** $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=1,\ a_{n+9}-a_{n+2}=35$가 성립할 때, $a_{100}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 496

해설

$2a_{n+2}=a_n+a_{n+2}$를 만족하는 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 $d$라 하면

$a_{n+9}=a_{n+2}+7d$에서 $7d=35$

$\therefore\ d=5$

$\therefore\ a_{100}=1+99\cdot5=496$

**18.** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_9$의 값은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\therefore\ a_9 = 2^{9-1} = 2^8 = 256$

**19.** $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$$a_2 = a_1 + 1$$
$$a_3 = a_2 + 2$$
$$\vdots$$
$$+\underline{\ a_n = a_{n-1} + (n-1)\ }$$
$$a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1)$$
$$= -1 + \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$\therefore a_{10} = -1 + \frac{9 \cdot 10}{2}$$
$$= -1 + 45 = 44$$

**20.** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{11}$　② $\dfrac{1}{10}$　③ $\dfrac{9}{10}$　④ $\dfrac{10}{11}$　⑤ $1$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}$ 의 양변의 역수를 취하면

$\dfrac{a_n + 1}{a_{n+1}}$ $\therefore\ b_{n+1} = b_n + 1$

따라서, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 1$, 공차가 $1$ 인 등비수열이므로

$b_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n \quad \therefore\ a_n = \dfrac{1}{n}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1} = \sum_{k=1}^{10} \dfrac{1}{k(k+1)}$

$= \sum_{k=1}^{10} \left( \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \right)$

$= \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{1}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{11} = \dfrac{10}{11}$

**21.** $a>0,\ b>0$일 때, $\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}}$을 간단히 하면?

① $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}}$ ② $\sqrt[8]{\frac{a^3}{b^3}}$ ③ $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^5}}$ ④ $\sqrt[8]{\frac{b^5}{a^3}}$ ⑤ $\sqrt[8]{\frac{a^5}{b^3}}$

해설

$$\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}}$$
$$= \sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[8]{\frac{b}{a}}$$
$$= \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}} \times \frac{b^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}}$$
$$= a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}} \times b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}} = a^{-\frac{3}{8}} \times b^{\frac{3}{8}}$$
$$= \frac{b^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{3}{8}}} = \frac{\sqrt[8]{b^3}}{\sqrt[8]{a^3}} = \sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}}$$

**22.** 세 수 $A = 2^{\frac{1}{2}}, B = 3^{\frac{1}{3}}, C = 9^{\frac{1}{9}}$ 의 대소 관계는?

① $A < B < C$ ② $B < A < C$ ③ $B < C < A$

④ $C < B < A$ ⑤ $C < A < B$

해설

$A = 2^{\frac{1}{2}}$ 이면 $A^{18} = (2^{\frac{1}{2}})^{18} = 2^9 = 512$

$B = 3^{\frac{1}{3}}$ 이면 $B^{18} = (3^{\frac{1}{3}})^{18} = 3^6 = 729$

$C = 9^{\frac{1}{9}}$ 이면 $C^{18} = (9^{\frac{1}{9}})^{18} = 9^2 = 81$

$C^{18} < A^{18} < B^{18}$ 이므로

$\therefore\ C < A < B$

**23.** $P = \dfrac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2}$ 에 대하여 $\sqrt[4]{P}$ 의 값은?

① $3\sqrt[4]{9}$ ② $9\sqrt[4]{3}$ ③ $9\sqrt[4]{9}$ ④ $9\sqrt[4]{27}$ ⑤ $81$

**해설**

$$P = \frac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2} = \frac{(3^2)^3 \cdot (3^4)^{-3} \cdot 3^3}{(3^3)^{-6} \cdot (3^2)^2}$$

$$= \frac{3^6 \cdot 3^{-12} \cdot 3^3}{3^{-18} \cdot 3^4}$$

$$= \frac{3^{-3}}{3^{-14}}$$

$$= 3^{-3-(-14)} = 3^{11}$$

$$\therefore \sqrt[4]{P} = \sqrt[4]{3^{11}} = 9\sqrt[4]{3^3} = 9\sqrt[4]{27}$$

**24.** $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 $n$ 의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 0

해설

$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{-3}{n}}$ 이 자연수

$n = -1$일때, $3^3$

$n = -3$일때, $3$

$\Rightarrow 2$개

**25.** $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$일 때, $a - \frac{1}{a}$의 값은?(단, $a > 1$)

① $\frac{15}{4}$　② $5$　③ $\frac{15}{2}$　④ $15$　⑤ $1$

해설

곱셈 공식의 변형 $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$에 의하여

$$\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 - 4 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$$

$$\therefore\ a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}(\because a > 1)$$

$$\therefore a - \frac{1}{a} = \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

**26.** $x > 0$ 이고 $x^2 + x^{-2} = 7$ 일 때, $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1})$ 의 값은?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

해설

곱셈 공식을 써서 식을 변형한다.

$x^2 + x^{-2} = 7$

$(x + x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2$ 에서

$(x + x^{-1})^2 = 7 + 2 = 9$

$x + x^{-1} > 0$ 이므로 $x + x^{-1} = 3$

$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + x^{-1} + 2$ 에서

$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 3 + 2 = 5$

$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0$ 이므로 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

$\therefore (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1}) = 3\sqrt{5}$

**27.** $\log_a(-a^2+5a+6)$ 의 값이 존재하도록 하는 정수 $a$ 의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\log_a(-a^2+5a+6)$ 의 값이 존재하기 위해서는

(i) 밑 조건에 의하여

$a>0,\ a\neq 1 \cdots$ ㉠

(ii) 진수 조건에 의하여

$-a^2+5a+6>0,\ a^2-5a-6<0$

$(a+1)(a-6)<0$

$\therefore -1<a<6 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 만족하는 정수는 2, 3, 4, 5 의 4 개다.

**28.** $\log_{10}(1+1)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준식)$=\log_{10}2+\log_{10}\frac{3}{2}+\log_{10}\frac{4}{3}+\cdots+\log_{10}\frac{100}{99}$

$=\log_{10}\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)$

$=\log_{10}100=\log_{10}10^2=2\log_{10}10=2$

**29.** 다음을 간단히 하여라.

$$\log_2 \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})\ (\text{단, } x > 1)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$$
$$= \log_2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$$
$$= \log_2 \{(x+1) - (x-1)\} = \log_2 2 = 1$$

**30.** $\log_2 12 = a$ 일 때, $\log_3 6$ 을 $a$ 로 나타내면?

① $\dfrac{a-1}{a-2}$ ② $\dfrac{a}{a-2}$ ③ $\dfrac{a}{a-1}$ ④ $\dfrac{a+1}{a-1}$ ⑤ $\dfrac{a+2}{a}$

해설

$\log_2 12 = \log_2(2^2 \times 3) = 2 + \log_2 3$

즉, $2 + \log_2 3 = a$ 이므로 $\log_2 3 = a - 2$

$\therefore \ \log_3 6 = \dfrac{\log_2 6}{\log_2 3} = \dfrac{\log_2(2 \times 3)}{\log_2 3}$

$= \dfrac{1 + \log_2 3}{\log_2 3} = \dfrac{1 + (a-2)}{a-2} = \dfrac{a-1}{a-2}$

**31.** 두 양수 $A$, $\frac{1}{A}$ 의 상용로그에서 정수 부분의 합은 $a$이고, 소수 부분의 합은 $b$이다. 이때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단. $\log A$ 의 소수 부분은 0이 아니다.)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\log A = n + \alpha$($n$은 정수, $0 < \alpha < 1$)라 하면

$\log \frac{1}{A} = -\log A = -n - \alpha = (-n-1) + (1-\alpha)$ 이므로

정수 부분은 $-n-1$, 소수 부분은 $1-a$

이때, 정수 부분의 합은 $-1$ , 소수 부분의 합은 1이다.

$\therefore a^2 + b^2 = 2$

**32.** 다음 세 조건을 동시에 만족하는 두 자연수 $x, y$에 대하여 $xy$는?

> ㉠ $x$와 $y$의 상용로그의 정수 부분은 같다.
> ㉡ $x$와 $\frac{1}{y}$의 상용로그의 소수 부분은 같다.
> ㉢ $x^3y^2$의 상용로그의 정수 부분은 7이다.

① 10　② 100　③ 1000　④ 2500　⑤ 8000

해설

㉠ $\log x = n + \alpha$, (단, $n$은 정수, $0 \le \alpha < 1$)
$\log y = n + \beta (0 \le \beta < 1)$
㉡ $\log \frac{1}{y} = \log y^{-1} = -\log y$
$= -n - \beta = -n + 1 - 1 - \beta$
$= (-n - 1) + 1 - \beta$
$1 - \beta = \alpha$
$\therefore \ \alpha + \beta = 1$
㉢ $\log x^3y^2 = 3\log x + 2\log y$
$= 3(n + \alpha) + 2(n + \beta)$
$= 5n + 3\alpha + 2\beta$
정수 부분이 7이므로
소수 부분은 $3\alpha + 2\beta - 2, \ n = 1$
$\therefore \log^{xy} = \log x + \log y$
$= n + \alpha + n + \beta$
$= 2n + \alpha + \beta = 2 + 1 = 3$
$\therefore xy = 10^3 = 1000$

**33.** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 $n$항까지의 합을 $S_n$이라고 할 때, $\log_2(S_n+k)=n$이다. 이때, 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이 되게 하는 상수 $k$의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$\log_2(S_n+k)=n$에서

$S_n+k=2^n \quad \therefore\ S_n=2^n-k$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2^1-k=2-k$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-k)-(2^{n-1}-k)$

$=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1}$

따라서 수열 $a_2,\ a_3,\ a_4,\cdots$ 는 공비가 2인 등비수열이다.

(i), (ii)로부터 수열 $2-k,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$ 이 등비수열이 되어야 하므로

$2-k=1 \quad \therefore\ k=1$