

1. 다음 ()안에 알맞은 수는?

$$\frac{\sqrt{3}}{1}, \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{7}}{9}, (\quad), \frac{\sqrt{11}}{25}$$

① $\frac{\sqrt{7}}{12}$

② $\frac{\sqrt{3}}{12}$

③ $\frac{3}{16}$

④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$

⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며, 분자는 $\sqrt{+2}$ 의 규칙으로 나타난다.
따라서 ()안에 들어갈 수의 분자는 $\sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$ 이다.
분모는 +1이 된 수의 제곱의 규칙으로 나타난다.

따라서 ()안에 들어갈 수의 분모는 $(3+1)^2 = 16$ 이므로 ()

안에 들어갈 수는 $\frac{3}{16}$

2. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{20} 의 값은?

① 38

② 39

③ 41

④ 42

⑤ 43

해설

$$a_{20} = S_{20} - S_{19}$$

$$S_{20} = 20^2 + 40 - 1 = 439,$$

$$S_{19} = 19^2 + 38 - 1 = 398$$

$$\therefore a_{20} = 439 - 398 = 41$$

3. 세 수 $-7 + 2x$, $5 + x$, $5 - 4x$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 1

해설

$-7 + 2x$, $5 + x$, $5 - 4x$ 가 등차수열을 이루면 $5 + x$ 가 등차중항
이므로

$$2(5 + x) = -7 + 2x + 5 - 4x$$

$$4x = -12$$

$$\therefore x = -3$$

4. $a, -6, b, -12$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

b 는 -6 과 -12 의 등차중항이므로

$$b = \frac{-6 + (-12)}{2} = -9$$

따라서 이 수열은 공차가 -3 인 등차수열이다.

$$a + (-3) = -6 \text{에서 } a = -3$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-9}{-3} = 3$$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$$

$$\therefore 4a + 48d = 32$$

$$a + 12d = 8$$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

6. 제 3항이 12이고 제 6항이 -96인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$

② $(-3) \cdot 2^{n-1}$

③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$

⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$$a_3 = ar^2 = 12$$

$$a_6 = ar^5 = -96$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r = -2$$

$$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

7. 2와 18의 등비중항을 x , 2와 18의 등차중항을 y 라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은?

① 122

② 128

③ 136

④ 146

⑤ 152

해설

x 는 2와 18의 등비중항이므로

$$x^2 = 2 \times 18 = 36$$

y 는 2와 18의 등차중항이므로

$$2y = 2 + 18 = 20$$

$$\therefore y = 10$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 36 + 100 = 136$$

8. 수열 $1, a, \frac{1}{16}, b, \dots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

첫째항 = 1, 공비 = a

$$a_n = a^{n-1}$$

$$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm \frac{1}{4}$$

$$a_4 = a^3 = \pm \frac{1}{64} = b$$

$$\therefore \frac{\pm \frac{1}{4}}{\pm \frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16 (\because \text{복호동순})$$

9. 제 4항이 -16 , 제 7항이 128 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① $\frac{1}{3}(2^{20} - 1)$

② $\frac{1}{3}(1 - 2^{20})$

③ $\frac{1}{3}(1 - 2^{20})$

④ $2(1 - 2^{20})$

⑤ $2(1 + 2^{20})$

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar^3 = -16, ar^6 = 128$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r = -2, a = 2$$

$$S_{20} = \frac{2 \{1 - (-2)^{20}\}}{1 - (-2)}$$

$$= \frac{2}{3}(1 - 2^{20})$$

10. $x = \frac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}$ 일 때, 다음 중 b^x 과 같은 것은?

① a

② b

③ a^b

④ b^2

⑤ $\log_a b$

해설

주어진 식을 밑 변환의 공식에 의해 변형하면

$$x = \frac{\frac{\log_b(\log_a b)}{\log_b a}}{\log_b b} = \log_b(\log_a b)$$

로그의 정의에 의해 $b^x = \log_a b$

11. 수열 9, 99, 999, 9999, ... 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{9}(10^n - 1) - n$

② $\frac{1}{9}(10^n - 1)$

③ $\frac{8}{9}(10^n - 1) - n$

④ $\frac{10}{9}(10^n - 1)$

⑤ $\frac{10}{9}(10^n - 1) - n$

해설

$$9 = 10 - 1, 99 = 10^2 - 1, 999 = 10^3 - 1, \dots, \underbrace{99 \cdots 9}_{n\text{개}} = 10^n - 1$$

이므로 구하는 합 S_n 은

$$\begin{aligned} S_n &= 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99 \cdots 9}_{n\text{개}} \\ &= (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \cdots \\ &\quad + (10^n - 1) \\ &= (10 + 10^2 + \cdots + 10^n) - n \\ &= \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \\ &= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n \end{aligned}$$

12. 다음 등식이 성립하도록 하는 c 의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=11}^{100} (k-2)^2 = \sum_{k=11}^{100} k^2 - 4 \sum_{k=11}^{100} k + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 360

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=11}^{100} (k-2)^2 &= \sum_{k=11}^{100} (k^2 - 4k + 4) \\ &= \sum_{k=11}^{100} k^2 - 4 \sum_{k=11}^{100} k + \sum_{k=11}^{100} 4 \\ \therefore c &= \sum_{k=11}^{100} 4 = 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 90 = 360\end{aligned}$$

13. 다음을 계산하여라.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k$$

$$= 3 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}$$

$$= 1155 - 110$$

$$= 1045$$

14. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$, $B = \sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 라 할 때, 다음 중 이 수열의 공비 r 을 나타내는 것은?(단, $a_1 \neq 0$, $r > 0$)

- ① $\frac{B}{A}$ ② $\frac{A}{B}$ ③ $\sqrt{\frac{B}{A}}$ ④ $\sqrt{\frac{A}{B}}$ ⑤ $\sqrt{AB}$

해설

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{19} \\ &= a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} \\ &= ar + ar^3 + ar^5 + \cdots + ar^{19} \\ &= r \{a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}\} = r \cdot A \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } r = \frac{B}{A}$$

15. 수열 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 9, ... 에서 13은 제 a 항까지 계속된다. 마지막으로 나오는 13을 제 b 항이라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

같은 숫자끼리 괄호로 묶으면

(1), (3, 3), (5, 5, 5), (7, 7, 7, 7), (9, 9, 9, 9, 9), ...

이 수열의 규칙을 살펴보면 13은 제 7군에 속한다.

6군까지의 항수가 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ 이므로 제 7군의 첫째항은 제 22항이고, 끝항은 제 28항이 된다.

따라서 $a + b = 22 + 28 = 50$

16. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 에서 제 20 항은?

① $\frac{9}{64}$

② $\frac{11}{64}$

③ $\frac{9}{32}$

④ $\frac{19}{32}$

⑤ $\frac{21}{32}$

해설

분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

제1군 제2군 제3군

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \dots$$

제 n 군까지의 항수는

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

따라서, 제 4군까지 항수는 15 개이므로 구하는 제 20 항은 제5군의 제5항이다.

한편, 제 n 군의 제 m 항은 $\frac{2m-1}{2^n}$ 이므로

$$\text{제5군의 제5항은 } \frac{9}{2^5} = \frac{9}{32}$$

17. $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 1$, $a_{n+9} - a_{n+2} = 35$ 가 성립할 때, a_{100} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 496

해설

$2a_{n+2} = a_n + a_{n+2}$ 를 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로
공차를 d 라 하면

$$a_{n+9} = a_{n+2} + 7d \text{ 에서 } 7d = 35$$

$$\therefore d = 5$$

$$\therefore a_{100} = 1 + 99 \cdot 5 = 496$$

18. $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_9 의 값은?

① 32

② 64

③ 128

④ 256

⑤ 512

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_9 = 2^{9-1} = 2^8 = 256$$

19. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 44

해설

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ + & \left| \begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ a_n = a_1 + 1 + \dots + (n-1) \\ = -1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{10} &= -1 + \frac{9 \cdot 10}{2} \\ &= -1 + 45 = 44 \end{aligned}$$

20. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{11}$

② $\frac{1}{10}$

③ $\frac{9}{10}$

④ $\frac{10}{11}$

⑤ 1

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$ 의 양변의 역수를 취하면

$$\frac{a_n + 1}{a_{n+1}} \therefore b_{n+1} = b_n + 1$$

따라서, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$, 공차가 1인 등비수열이므로

$$b_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n \therefore a_n = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

21. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}}$

② $\sqrt[8]{\frac{a^3}{b^3}}$

③ $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^5}}$

④ $\sqrt[8]{\frac{b^5}{a^3}}$

⑤ $\sqrt[8]{\frac{a^5}{b^3}}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[8]{\frac{b}{a}} \\ &= \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}} \times \frac{b^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}} \\ &= a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}} \times b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}} = a^{-\frac{3}{8}} \times b^{\frac{3}{8}} \\ &= \frac{b^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{3}{8}}} = \frac{\sqrt[8]{b^3}}{\sqrt[8]{a^3}} = \sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}} \end{aligned}$$

22. 세 수 $A = 2^{\frac{1}{2}}, B = 3^{\frac{1}{3}}, C = 9^{\frac{1}{9}}$ 의 대소 관계는?

① $A < B < C$

② $B < A < C$

③ $B < C < A$

④ $C < B < A$

⑤ $C < A < B$

해설

$$A = 2^{\frac{1}{2}} \text{ 이면 } A^{18} = (2^{\frac{1}{2}})^{18} = 2^9 = 512$$

$$B = 3^{\frac{1}{3}} \text{ 이면 } B^{18} = (3^{\frac{1}{3}})^{18} = 3^6 = 729$$

$$C = 9^{\frac{1}{9}} \text{ 이면 } C^{18} = (9^{\frac{1}{9}})^{18} = 9^2 = 81$$

$$C^{18} < A^{18} < B^{18} \text{ 이므로}$$

$$\therefore C < A < B$$

23. $P = \frac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2}$ 에 대하여 $\sqrt[4]{P}$ 의 값은?

① $3\sqrt[4]{9}$

② $9\sqrt[4]{3}$

③ $9\sqrt[4]{9}$

④ $9\sqrt[4]{27}$

⑤ 81

해설

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2} = \frac{(3^2)^3 \cdot (3^4)^{-3} \cdot 3^3}{(3^3)^{-6} \cdot (3^2)^2} \\
 &= \frac{3^6 \cdot 3^{-12} \cdot 3^3}{3^{-18} \cdot 3^4} \\
 &= \frac{3^{-3}}{3^{-14}} \\
 &= 3^{-3-(-14)} = 3^{11} \\
 \therefore \sqrt[4]{P} &= \sqrt[4]{3^{11}} = 9\sqrt[4]{3^3} = 9\sqrt[4]{27}
 \end{aligned}$$

24. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 0

해설

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{-3}{n}} \text{ 이 자연수}$$

$$n = -1 \text{ 일 때, } 3^3$$

$$n = -3 \text{ 일 때, } 3$$

$\Rightarrow 2$ 개

25. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$ 일 때, $a - \frac{1}{a}$ 의 값은? (단, $a > 1$)

① $\frac{15}{4}$

② 5

③ $\frac{15}{2}$

④ 15

⑤ 1

해설

곱셈 공식의 변형 $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$ 에 의하여

$$\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 - 4 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$$

$$\therefore a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} (\because a > 1)$$

$$\therefore a - \frac{1}{a} = \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

26. $x > 0$ 이고 $x^2 + x^{-2} = 7$ 일 때, $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1})$ 의 값은?

① $\sqrt{7}$

② $2\sqrt{5}$

③ $3\sqrt{5}$

④ $3\sqrt{7}$

⑤ $7\sqrt{3}$

해설

곱셈 공식을 써서 식을 변형한다.

$$x^2 + x^{-2} = 7$$

$$(x + x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2 \text{에서}$$

$$(x + x^{-1})^2 = 7 + 2 = 9$$

$$x + x^{-1} > 0 \text{이므로 } x + x^{-1} = 3$$

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + x^{-1} + 2 \text{에서}$$

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 3 + 2 = 5$$

$$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{이므로 } x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1}) = 3\sqrt{5}$$

27. $\log_a(-a^2 + 5a + 6)$ 의 값이 존재하도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\log_a(-a^2 + 5a + 6)$ 의 값이 존재하기 위해서는

(i) 밑 조건에 의하여

$$a > 0, a \neq 1 \cdots \textcircled{\Gamma}$$

(ii) 진수 조건에 의하여

$$-a^2 + 5a + 6 > 0, a^2 - 5a - 6 < 0$$

$$(a + 1)(a - 6) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 6 \cdots \textcircled{\text{L}}$$

$\textcircled{\Gamma}$, $\textcircled{\text{L}}$ 을 만족하는 정수는 2, 3, 4, 5의 4개다.

28. $\log_{10}(1+1) + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{99}\right)$
의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \log_{10} 2 + \log_{10} \frac{3}{2} + \log_{10} \frac{4}{3} + \cdots + \log_{10} \frac{100}{99} \\&= \log_{10} \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{100}{99} \right) \\&= \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2\end{aligned}$$

29. 다음을 간단히 하여라.

$$\log_2 \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \quad (\text{단, } x > 1)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & \log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \\ &= \log_2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \\ &= \log_2 \{(x+1) - (x-1)\} = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

30. $\log_2 12 = a$ 일 때, $\log_3 6$ 을 a 로 나타내면?

① $\frac{a-1}{a-2}$

② $\frac{a}{a-2}$

③ $\frac{a}{a-1}$

④ $\frac{a+1}{a-1}$

⑤ $\frac{a+2}{a}$

해설

$$\log_2 12 = \log_2(2^2 \times 3) = 2 + \log_2 3$$

$$\text{즉, } 2 + \log_2 3 = a \text{ 이므로 } \log_2 3 = a - 2$$

$$\therefore \log_3 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 3} = \frac{\log_2(2 \times 3)}{\log_2 3}$$

$$= \frac{1 + \log_2 3}{\log_2 3} = \frac{1 + (a - 2)}{a - 2} = \frac{a - 1}{a - 2}$$

31. 두 양수 $A, \frac{1}{A}$ 의 상용로그에서 정수 부분의 합은 a 이고, 소수 부분의 합은 b 이다. 이때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단. $\log A$ 의 소수 부분은 0이 아니다.)

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 < \alpha < 1$)라 하면

$$\log \frac{1}{A} = -\log A = -n - \alpha = (-n - 1) + (1 - \alpha) \text{ 이므로}$$

정수 부분은 $-n - 1$, 소수 부분은 $1 - \alpha$

이때, 정수 부분의 합은 -1 , 소수 부분의 합은 1 이다.

$$\therefore a^2 + b^2 = 2$$

32. 다음 세 조건을 동시에 만족하는 두 자연수 x, y 에 대하여 xy 는?

- ㉠ x 와 y 의 상용로그의 정수 부분은 같다.
 ㉡ x 와 $\frac{1}{y}$ 의 상용로그의 소수 부분은 같다.
 ㉢ x^3y^2 의 상용로그의 정수 부분은 7이다.

① 10

② 100

③ 1000

④ 2500

⑤ 8000

해설

㉠ $\log x = n + \alpha$, (단, n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)

$\log y = n + \beta$ ($0 \leq \beta < 1$)

㉡ $\log \frac{1}{y} = \log y^{-1} = -\log y$

$= -n - \beta = -n + 1 - 1 - \beta$

$= (-n - 1) + 1 - \beta$

$1 - \beta = \alpha$

$\therefore \alpha + \beta = 1$

㉢ $\log x^3y^2 = 3\log x + 2\log y$

$= 3(n + \alpha) + 2(n + \beta)$

$= 5n + 3\alpha + 2\beta$

정수 부분이 7이므로

소수 부분은 $3\alpha + 2\beta - 2$, $n = 1$

$\therefore \log^{xy} = \log x + \log y$

$= n + \alpha + n + \beta$

$= 2n + \alpha + \beta = 2 + 1 = 3$

$\therefore xy = 10^3 = 1000$

33. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 할 때, $\log_2(S_n + k) = n$ 이다. 이때, 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이 되게 하는 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log_2(S_n + k) = n$ 에서

$$S_n + k = 2^n \quad \therefore S_n = 2^n - k$$

(i) $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2^1 - k = 2 - k$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - k) - (2^{n-1} - k)$$

$$= 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2 - 1) = 2^{n-1}$$

따라서 수열 $a_2, a_3, a_4, \dots$ 는 공비가 2인 등비수열이다.

(i), (ii)로부터 수열 $2 - k, 2^1, 2^2, 2^3, \dots$ 이 등비수열이 되어야 하므로

$$2 - k = 1 \quad \therefore k = 1$$