1. 등차수열 2, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{100}, 305 에서 공차는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

등차수열 2, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{100}, 305 에서 공차를 d로 놓으면
305는 제 102항이므로
$305 = 2 + (102 - 1)d$
$\therefore\ d = \dfrac{303}{101} = 3$

2. 첫째항이 3, 공차가 4, 항의 수가 10인 등차수열의 합 S_{10}을 구하면?

① 150 ② 170 ③ 190 ④ 210 ⑤ 230

해설

$a=3,\ d=4,\ n=10$이므로

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$에 대입하면

$S_{10}=\dfrac{10\{2\cdot 3+(10-1)\cdot 4\}}{2}=210$

3. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$의 값은?

① 110 ② 120 ③ 122 ④ 132 ⑤ 140

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$
$= \sum_{k=1}^{10}(a_k^3+3a_k^2+3a_k+1) - \sum_{k=1}^{10}(a_k^3-3a_k^2+3a_k-1)$
$= \sum_{k=1}^{10}(6a_k^2+2) = 6\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2$
$= 6\times 20 + 2\times 10 = 140$

4. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$　　㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = 25^{\sqrt{2}}$

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$

① ㉢　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2^2 = 4$(참)

㉡$(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = (5 \times 5)^{\sqrt{2}} = 25^{\sqrt{2}}$(참)

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (3^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$(참)

5. $\sqrt[4]{4+\sqrt{15}}\times\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\sqrt[4]{8}$ 을 간단히 하면?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

해설

$\sqrt[4]{4+\sqrt{15}}\times\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\sqrt[4]{8}$

$=\sqrt{\sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}}}\times\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\sqrt[4]{8}$

$=\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{2}}}\times\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\sqrt[4]{8}$

$=\frac{\sqrt{5-3}}{\sqrt[4]{2}}\times\sqrt[4]{8}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt[4]{\frac{8}{2}}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt[4]{4}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

$=2$

6. $\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}}$ 을 $\sqrt{2^k}$ 의 꼴로 나타낼 때, 상수 k 의 값은?

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{11}{12}$ ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ 을 이용하여 주어진 수를 변형하고 지수법칙으로 계산한다.

$\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}} = (2^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$

$= (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{5}{4} \times \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{12}}$

$2^{\frac{5}{12}} = (2^{\frac{1}{2}})^k$ 이므로 $\frac{5}{12} = \frac{1}{2}k$

$\therefore\ k = \frac{5}{6}$

7. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 2^x 라고 할 때, x 의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} 8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} &= 2^4 \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^5 \end{aligned}$$

$\therefore x = 5$

8. $2^{2\log_2 2+\log_2 5-\frac{1}{2}\log_2 4}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 10

해설

$2\log_2 2+\log_2 5-\dfrac{1}{2}\log_2 4=\log_2 4+\log_2 5-\log_2 2$

$=\log_2 \dfrac{4\times 5}{2}=\log_2 10$

$\therefore 2^{2\log_2 2+\log_2 5-\frac{1}{2}\log_2 4}=2^{\log_2 10}=10$

9. 다음 중 계산 결과가 다른 하나는?

① $9^{\log_9 4}$ ② $\log_{\sqrt{5}} 25$

③ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$ ④ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

⑤ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16$

해설

① $9^{\log_9 4} = 4$

② $\log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \frac{2}{1} \log_5 5 = 4$

③ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{2^{-1}} 2^{-4} = \frac{-4}{-1} \log_2 2 = 4$

④ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = \frac{4}{-1} \log_3 3 = -4$

⑤ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16$

$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 5}$

$= \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 2} = \log_2 16 = \log_2 2^4$

$= 4 \log_2 2 = 4$

10. $\log 3.14 = 0.4969$ 일 때, $\log 3140^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

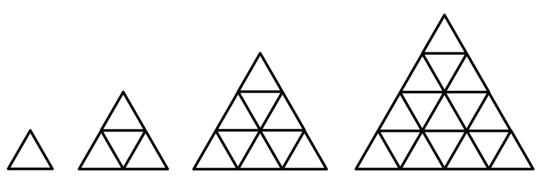
▶ 답:

▷ 정답 : 34, 0.969

해설

$\log 3140^{10} = 10 \log 3140$
$= 10 \log(3.14 \times 1000)$
$= 10(\log 3.14 + \log 1000)$
$= 10(0.4969 + 3)$
$= 10 \times 3.4969 = 34.969$

11. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, $\cdots$ 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



① 30개　② 32개　③ 34개　④ 36개　⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = 9$

$\vdots$

$\therefore a_n = n^2$

$\therefore a_6 = 36$

12. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$가 성립할 때, $a_1 : a_4$는?(단, $a_1 \neq 0$이다.)

① 1 : 2　② 1 : 3　③ 2 : 3　④ 2 : 5　⑤ 3 : 5

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4)$
$= (a_1 + a_1 + d) : (a_1 + 2d + a_1 + 3d) = 1 : 2$
$2a_1 + 5d = 4a_1 + 2d \quad \therefore\ 2a_1 = 3d$
$\therefore\ a_1 : a_4 = a_1 : (a_1 + 3d) = a_1 : 3a_1 = 1 : 3$

13. 등차수열 $-3,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ 21$ 에 대하여 $x_4 + x_5$ 의 값은?

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

주어진 등차수열의 공차를 d 라고 하면 21 은 제 9 항이므로
$21 = -3 + 8d \quad \therefore\ d = 3$
따라서, 주어진 수열은 첫째항이 -3, 공차가 3 인 등차수열이고,
$x_4,\ x_5$ 은 각각 제 5 항, 제 6 항이므로
$x_4 = -3 + (5-1)\cdot 3 = 9$
$x_5 = -3 + (6-1)\cdot 3 = 12$
따라서 $x_4 + x_5$ 은 21 이다.

14. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가질 때, 두 수 α, β의 조화중항을 p, q로 나타내면?

① $\frac{q}{p}$ ② $\frac{2q}{p}$ ③ $\frac{q}{2p}$ ④ $\frac{p}{q}$ ⑤ $\frac{2p}{q}$

해설

구하는 조화중항을 k라 하면

$k = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta = p$, $\alpha\times\beta = q$

$\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \frac{2q}{p}$

15. 두 수 $\frac{45}{4}$, $\frac{99}{4}$ 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 $(n+2)$개의 수가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 그 합이 180이다. 이때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

구하는 합을 S_{n+2}라고 하면

$$S_{n+2} = \frac{(n+2)\left(\frac{45}{4}+\frac{99}{4}\right)}{2} = 180$$

$18(n+2) = 180$, $n+2 = 90$ $\therefore$ $n = 8$

16. 부피가 8 이고 겉넓이가 28 인 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 이 직육면체의 모서리의 길이의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, ar, ar^2 이라 하면

(부피)$= a \cdot ar \cdot ar^2 = (ar)^3 = 8$

$\therefore\ ar = 2 \cdots$ ㉠

(겉넓이)$= 2(a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + ar^2 \cdot a)$

$= 2\left\{a \cdot ar + (ar)^2 \cdot r + (ar)^2\right\}$

$= 2(2a + 4r + 2^2)$

$= 4a + 8r + 8 = 28$

$\therefore\ a + 2r = 5\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1,\ r = 2$ 또는 $a = 4,\ r = \frac{1}{2}$

따라서 (가로의 길이, 세로의 길이, 높이)가 $(1,\ 2,\ 4)$ 또는 $(4,\ 2,\ 1)$ 이므로 이 직육면체의 모서리의 길이의 합은 $4(1 + 2 + 4) = 28$

17. 첫째항부터 제5항까지의 합이 30, 첫째항부터 제10항까지의 합이 90인 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은?

① 210　② 220　③ 230　④ 240　⑤ 250

해설

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_5=30,\ S_{10}=90$이므로

$S_5=\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}=30$ ……㉠

$S_{10}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}=90$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $30(r^5+1)=90$ $\therefore r^5=2$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15}는

$S_{15}=\dfrac{a(r^{15}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^5-1)(r^{10}+r^5+1)}{r-1}$

$=30(2^2+2+1)=210$

18. 방정식 $x^3 - 1 = 0$의 두 허근을 α, β라고 할 때, $\sum_{k=1}^{3}(\alpha^k + \beta^k)$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$에서 두 허근 α, β는
$x^2 + x + 1 = 0$의 근이므로
$\alpha + \beta = -1,\ \alpha\beta = 1,\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -1$
$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{3}(\alpha^k + \beta^k) = (\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^3 + \beta^3)$
$= (-1) + (-1) + 2 = 0$

19. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$일 때, $\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{f(2x+1)}$의 값은?

① 8 ② $\sqrt{99}-1$ ③ 9

④ $\sqrt{99}+1$ ⑤ 10

해설

$f(2x+1)=\sqrt{2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-1}}$

$=\sqrt{2x+1+\sqrt{4x^2+4x}}$

$=\sqrt{(x+1)+x+2\sqrt{(x+1)\cdot x}}$

$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

$\frac{1}{f(2x+1)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}$

$=\sqrt{100}-1$

$=10-1=9$

20. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 3n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{24}$　② $\frac{1}{48}$　③ $\frac{5}{16}$　④ $\frac{5}{24}$　⑤ $\frac{5}{48}$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 + 3n - \left\{(n-1)^2 + 3(n-1)\right\} = 2n + 2(n \geq 2)$

$a_1 = 1 + 3 = 2 + 2 = 4$ 이므로, $a_n = 2n + 2(n \geq 1)$

$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k+2)(2k+4)}$

$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= \frac{1}{4} \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right)\right\}$

$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) = \frac{5}{24}$

21. 수열 $3,\ 4,\ 6,\ 10,\ 18,\ 34,\ 66, \cdots$ 의 일반항 a_n 은?

① $2^{n-2}+2$ ② $2^{n-1}-1$ ③ $2^{n-1}+2$

④ $2^{n+1}-2$ ⑤ $2^{n+1}+2$

해설

주어진 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 3,\ \ 4,\ \ 6,\ \ 10,\ \ 18,\ \ 34,\ \ 66, \cdots$

$\bigvee \ \bigvee \ \bigvee \ \bigvee \ \bigvee \ \bigvee$

$\{a_n\} : \ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32, \cdots$

즉, 수열$\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 3 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 3 + \frac{1 \cdot (2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= 2^{n-1}+2 \end{aligned}$$

22. $a_1 = 1,\ 4a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 일반항 a_n 을 구하면?

① $\dfrac{1}{n}$ ② $\dfrac{1}{2n-1}$ ③ $\dfrac{1}{3n-2}$

④ $\dfrac{1}{4n-3}$ ⑤ $\dfrac{1}{5n-4}$

해설

$4a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}$ 의 양변을 $a_n a_{n+1}$ 로 나누면

$4 = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 4 인 등차수열이므로

$\dfrac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$

$\therefore a_n = \dfrac{1}{4n-3}$

23. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의될 때, a_{10}의 값은?

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

① $2 \cdot 3^8$ ② $2 \cdot 3^9$ ③ $2 \cdot 3^{10}$

④ $2 \cdot 3^{11}$ ⑤ $2 \cdot 3^{12}$

해설

$a_{n+1} = 3a_n$에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$이므로 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots, 9$를 대입하여 곱하면

$\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \frac{a_5}{a_4} \times \frac{a_6}{a_5} \times \frac{a_7}{a_6} \times \frac{a_8}{a_7} \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9} = 3^9$

$\frac{a_{10}}{a_1} = 3^9$

$\therefore\ a_{10} = a_1 \cdot 3^9 = 2 \cdot 3^9$

24. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2n - 1\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$일 때, 일반항 a_n은 $a_n = pn^2 + qn + r$이다. 이때, $p,\ q,\ r$의 합 $p+q+r$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$a_{n+1} - a_n = 2n-1$의 양변에 $n = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2 - a_1 = 1 \\ & a_3 - a_2 = 3 \\ & \quad \vdots \\ +) & \underline{a_n - a_{n-1} = 2n-3} \\ & a_n - a_1 = 1 + 3 + \cdots + (2n-3) \end{array}$$

$$= \frac{(n-1)\{1+(2n-3)\}}{2} = n^2 - 2n + 1$$

$\therefore a_n = n^2 - 2n + 1 + a_1 = n^2 - 2n + 3$

$\therefore p + q + r = 1 + (-2) + 3 = 2$

해설

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_n = a_{n+1} - a_n = 2n - 1$

따라서 $n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) \\ &= 2 + 2\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) \\ &= n^2 - 2n + 3 \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

이때, $a_1 = 2$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 일반항은

$a_n = n^2 - 2n + 3$

$\therefore p + q + r = 1 + (-2) + 3 = 2$

25. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3a_n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{20}의 값은?

① $2 \cdot 3^{19} - 1$　② $2 \cdot 3^{19} + 1$　③ $2 \cdot 3^{20} - 1$
④ $2 \cdot 3^{20} + 1$　⑤ $2 \cdot 3^{21} - 1$

해설

$a_{n+1} - \alpha = (a_n - \alpha)$꼴로 변형한다.
$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형하면
$a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha$에서
$-2\alpha = 2 \ \therefore \alpha = -1$
즉, $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$
따라서 수열 $\{a_n + 1\}$은
첫째항이 $a_1 + 1 = 5 + 1 = 6$이고 공비가 3인 등비수열이므로
$a_n + 1 = 6 \cdot 3^{n-1}$
$\therefore a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 1$
$\therefore a_{20} = 6 \cdot 3^{19} - 1 = 2 \cdot 3^{20} - 1$

26. $\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$를 $2^{\frac{q}{p}}$ 로 나타낼 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 53

해설

$$\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{4\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4\times 2}}}$$
$$= \sqrt{4\sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2\cdot\sqrt[12]{2^5}}$$
$$= \sqrt{\sqrt[12]{2^{24}\times 2^5}} = \sqrt[24]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{24}}$$

따라서 $P=29$, $q=24$이므로 $p+q=53$

27. $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = 2$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$x^3 + x^{-3}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^2$

$x - 2 + x^{-1} = 4$

$x + x^{-1} = 6$

$(x + x^{-1})^3 = x^3 + 3(x + x^{-1}) + x^{-3} = 216$

$x^3 + x^{-3} = 216 - 18 = 198$

28. $\log_5 250 = n + \alpha$(n은 정수, $0 \leq a < 1$)라고 할 때, $n \times 25^{\alpha}$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$125 < 250 < 625$ 이므로
$\log_5 5^3 < \log_5 250 < \log_5 5^4$
$\log_5 250$ 의 정수부분은 $n = 3$ 이고
소수부분은 $\alpha = \log_5 250 - \log_5 125 = \log_5 \dfrac{250}{125} = \log_5 2$
따라서 $25^{\alpha} = 25^{\log_5 2} = 4$ 이므로 25^{α} 의 값과 정수부분 n 의 곱은
$3 \times 4 = 12$ 이다.

29. 세 수 $3\log_3 3$, $\log_2 3$, $2\log_2 4$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $2\log_2 4 < 3\log_3 3 < \log_2 3$　　② $\log_2 3 < 2\log_2 4 < 3\log_3 3$

③ $\log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$　　④ $3\log_3 3 < 2\log_2 4 < \log_2 3$

⑤ $3\log_3 3 < \log_2 3 < 2\log_2 4$

해설

$3\log_3 3 = 3$

$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4$　$\therefore$ $1 < \log_2 3 < 2$

$2\log_2 4 = 4$

$\therefore$ $\log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$

30. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.123}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.6966

해설

상용로그표에서 $\log 1.23 = 0.0899$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.123} = \frac{1}{3}\log 0.123 = \frac{1}{3}\log 1.23 \times 10^{-1}$$
$$= \frac{1}{3}(\log 1.23 - 1) = \frac{1}{3}(0.0899 - 1)$$
$$= -0.3034 = -1 + 0.6966$$

따라서 $\log \sqrt[3]{0.123}$ 의 소수 부분은 0.6966 이다.

31. $x > 0, y > 0$인 실수 x, y가 아래 두 조건을 만족할 때 , 다음 물음에 답하여라.

> ㉠ $\log x$와 $\log 99$의 정수 부분은 같다.
>
> ㉡ $\log y$와 $\log 1001$의 정수 부분은 같다.

$\log x$의 소수 부분과 $\log y$의 소수 부분이 같을 때, $x : y$를 간단한 정수비로 나타내면?

① $1 : 2$　② $1 : 3$　③ $1 : 10$

④ $1 : 100$　⑤ $10 : 1$

해설

$\log 99$의 정수 부분은 1이고, $\log 1001$의 정수 부분은 3이므로 $\log x$와 $\log y$는 다음과 같다.

$\log x = 1 + \alpha, \log y = 3 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$

$\therefore \log y - \log x = 2$

$\log \frac{y}{x} = 2, \ \frac{y}{x} = 100, \ y = 100x$

$\therefore \ x : y = 1 : 100$

32. $a_n = \log \dfrac{n}{n+1}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{99} a_k$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a_n = \log \dfrac{n}{n+1} = \log n - \log(n+1)$ 이므로
$\sum_{k=1}^{99} a_k = \sum_{k=1}^{99} \{\log k - \log(k+1)\}$
$= (\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) + \cdots + (\log 99 - \log 100)$
$= \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2$

33. 어느 도시의 최근 인구 증가율은 연평균 4% 라고 한다. 이 도시의 인구가 이러한 추세로 증가한다면 10 년 후의 이 도시의 인구는 현재의 k 배이다. 이때, $100k$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 1.04 = 0.017, \log 1.48 = 0.17$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 148

해설

일정한 비율로 증가하거나 감소한 후의 양을 지수의 식으로 나타낸다.
현재 이 도시의 인구의 수를 A 라 하면 10 년 후의 이 도시의 인구의 수는 kA 이다.
$A(1+0.04)^{10} = kA, 1.04^{10} = k$
이 식의 양변에 상용로그를 취하면
$\log 1.04^{10} = \log k$
이 때, $10\log 1.04 = 10 \times 0.017$ 이므로
$\log k = 0.17 \quad \therefore\ k = 1.48$
$\therefore\ 100k = 148$