

1. $\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-3}}$ 의 값은 ?

① $1 - \sqrt{2}$

② $-1 - \sqrt{2}$

③ $(1 + \sqrt{2})i$

④ $-(1 + \sqrt{2})i$

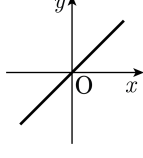
⑤ $(1 - \sqrt{2})i$

해설

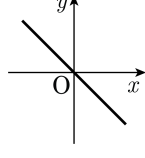
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-(3-2\sqrt{2})}} &= \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \frac{1}{i} \\ &= (\sqrt{2}+1) \times (-i) \\ &= -(1+\sqrt{2})i\end{aligned}$$

2. $(3 + 2i)z$ 가 실수가 되도록 하는 복소수 $z = x + yi$ 를 점 (x, y) 로 나타낼 때, 점 (x, y) 는 어떤 도형 위를 움직이는가? (단, x, y 는 실수)

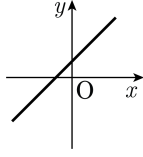
①



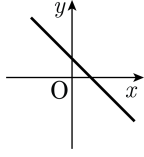
②



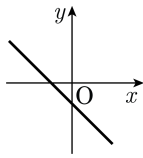
③



④



⑤



해설

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(x + yi) &= 3x + 3yi + 2xi - 2y \\ &= (3x - 2y) + (2x + 3y)i\end{aligned}$$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x + 3y = 0$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x$$

따라서 기울기가 음수이고 y절편이 0인 그래프는 ②이다.

3. 복소수 $z = (1+i)x^2 + (5+2i)x + 3(2-i)$ 에서 z 가 순허수일 때, 실수 x 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} z &= (x^2 + 5x + 6) + (x^2 + 2x - 3)i \\ &= (x+2)(x+3) + (x-1)(x+3)i \end{aligned}$$

순허수가 되려면 실수부=0, 허수부 $\neq$ 0
 $\therefore x = -2$

4. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 최댓값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$$\therefore x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$$

$$x = 1 \text{ 또는 } 2y = \pm 2$$

$$\therefore (xy \text{의 최댓값}) = 4$$

5. $(1+i)^6 - (1-i)^6$ 을 간단히 하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 16

② -16

③ $16i$

④ $-16i$

⑤ 0

해설

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i,$$

$$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$$

$$\therefore (1+i)^6 - (1-i)^6$$

$$= \{(1+i)^2\}^3 - \{(1-i)^2\}^3$$

$$= (2i)^3 - (-2i)^3$$

$$= 8i^3 + 8i^3$$

$$= 16i^3 = -16i$$

6. n 이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ i ④ $-i$ ⑤ -1

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n + \left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n \\&= i^n + (-i)^n \quad (n \text{은 홀수}) \\&= i^n - i^n = 0\end{aligned}$$

7. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1998}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

- ① 0 ② i ③ $-2i$ ④ -1 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \\ \frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{ 이므로} \\ f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) &= f(-i) + f(i) \\ &= (-i)^{1998} + (i)^{1998} \\ &= (-i)^{1996} \cdot (-i)^2 + i^{1996} \cdot i^2 = -2\end{aligned}$$

8. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② i ③ 1 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{1-i} &= i, \frac{1-i}{1+i} = -i \\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005} \\ &= i^{2005} + (-i)^{2005} \\ &= (i^4)^{501} \cdot i + ((-i)^4)^{501} \cdot (-i) \\ &= i + (-i) = 0 \end{aligned}$$

9. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 를 간단히 하면?

① $-2i$

② $2i$

③ $1+i$

④ $1-i$

⑤ i

해설

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = i, \left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -i \text{ 고 } i^4 = 1$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$$

$$= i^{2004} + (-i)^{2005}$$

$$= i^{4 \times 501} + (-i)^{4 \times 501} \times (-i)$$

$$= 1 + (-i)$$

$$= 1 - i$$

10. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{200} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{200}$ 을 간단히 하면?

① 1

② 2

③ 3

④ -2

⑤ -4

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 &= i & \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 &= -i \\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{200} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{200} &= i^{100} + (-i)^{100} \\ &= (i^4)^{25} + ((-i)^4)^{25} \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

11. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ -2

④ 3

⑤ -4

해설

$$x + y = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = 1$$

$$xy = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{1 - (-3)}{4} = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3 + y^3}{xy} \\ &= \frac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{xy} \\ &= -2\end{aligned}$$

12. a, b 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- I n 이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$ 은 실수이다.
- II $-1 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$
- III $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 이다.
- IV $0 < a < b$ 일 때, $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

- ① I, II
- ② I, III
- ③ II, III
- ④ I, IV
- ⑤ II, III, IV

해설

I. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in R$ (참)

II. $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = |a+1| - |a-2|$
 $= a+1 - (2-a)$
 $= 2a-1 \neq 3$

III. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면 $b < 0, a \geq 0$ 이다.
 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-(-b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-b)i}$
 $= \sqrt{a(-b)i} = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}$
 $\therefore \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

IV. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.
 $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$

13. 다음은 두 복소수 z_1, z_2 에 대하여 ' $z_1 \cdot z_2 = 0$ 이면 $z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$ '임을 보인 것이다.

$$\begin{aligned} z_1 &= a + bi, z_2 = c + di \quad (a, b, c, d \text{는 실수}) \text{라고 하자.} \\ z_1 z_2 &= 0 \text{이면 } (a + bi)(c + di) = 0 \\ \text{이 식의 양변에 } (a - bi)(c - di) \text{를 곱하면} \\ (\text{좌변}) &= (a + bi)(c + di)(a - bi)(c - di) \\ &= (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di) \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ (\text{우변}) &= 0 \cdot (a - bi)(c - di) = 0 \\ \therefore (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= 0 \\ \text{따라서 } a^2 + b^2 = 0 \text{ 또는 } c^2 + d^2 = 0 \text{ 이므로} \\ a = b = 0 \text{ 또는 } c = d = 0 \\ \therefore z_1 = 0 \text{ 또는 } z_2 = 0 \end{aligned}$$

다음 중 위의 과정에 이용되지 않는 성질은?

- ①

두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = y = 0$ 이다.
- ②

두 실수 x, y 에 대하여 $xy = 0$ 이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$ 이다.
- ③

두 실수 x, y 에 대하여 $x + yi = 0$ 이면 $x = y = 0$ 이다.
- ④

임의의 복소수 α 에 대하여 $0 \cdot \alpha = 0$ 이다.
- ⑤

복소수 α, β 에 대하여 $\alpha\beta = \beta\alpha$ 이다.

해설

$$\begin{aligned} z_1 &= a + bi, z_2 = c + di \quad (a, b, c, d \text{는 실수}) \text{라고 하자.} \\ z_1 z_2 &= 0 \text{이면 } (a + bi)(c + di) = 0 \\ (\text{좌변}) &= (a + bi)(c + di)(a - bi)(c - di) \cdots \text{ ⑤} \\ &= (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di) \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ (\text{우변}) &= 0 \cdot (a - bi)(c - di) = 0 \cdots \text{ ④} \\ \therefore (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= 0 \cdots \text{ ②} \\ \text{따라서 } a^2 + b^2 = 0 \text{ 또는 } c^2 + d^2 = 0 \text{ 이므로 } \cdots \text{ ①} \\ a = b = 0 \text{ 또는 } c = d = 0 \cdots \text{ ③의 역} \\ \therefore a + bi = 0 \text{ 또는 } c + di = 0 \\ \text{즉, 이 과정에서 ③의 역은 이용되었지만, ③은 이용되지 않았다.} \end{aligned}$$

14. 복소수 α, β 에 대하여 연산 $*$ 를 $\alpha * \beta = (\alpha + \beta) - \alpha\beta$ 라 하자. $z = \frac{5}{-2-i}$ 일 때, $z * \bar{z}$ 의 값은?

- ① -1 ② 1 ③ -9 ④ 9 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned} z &= -2 + i, \bar{z} = -2 - i \\ z * \bar{z} &= (z + \bar{z}) - z\bar{z} \\ &= -4 - 5 \\ &= -9 \end{aligned}$$

15. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, $(1 + 2i)z + 5(1 - \bar{z}) = 0$ 을 만족시키는 복소수 z 는?

① $1 + 3i$

② $1 - 3i$

③ $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

④ $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

⑤ $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 놓으면 $\bar{z} = a - bi$
따라서, 준식은 $(1 + 2i)(a + bi) + 5\{1 - (a - bi)i\} = 0$
 $\therefore a - 7b + 5 + (b - 3a)i = 0$
그런데, a, b 가 실수이므로
 $a - 7b + 5 = 0, b - 3a = 0$
이들을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$
 $\therefore z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

16. $x = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 \cdot \bar{x} - x \cdot \overline{x^3}$ 의 값은? (단, $\bar{x}$ 는 x 의 켤레복소수이다.)

① $13i$

② $28\sqrt{3}i$

③ $28i$

④ $56\sqrt{3}i$

⑤ $72i$

해설

$$\begin{aligned} x = 2 + \sqrt{3}i \text{ 에서 } \bar{x} = 2 - \sqrt{3}i \text{ 이므로} \\ x^3 \cdot \bar{x} - x \cdot \overline{x^3} &= x\bar{x}(x^2 - \overline{x^2}) = x\bar{x}(x + \bar{x})(x - \bar{x}) \\ &= 7 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}i = 56\sqrt{3}i \end{aligned}$$

17. $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$ 를 간단히 하면?

① $a(1-a)$

② $a(a-1)$

③ $a^2(a-1)$

④ $a^2(1-a)^2$

⑤ $-a^2(1-a)^2$

해설

$$\begin{aligned} & a > 0, a-1 < 0, 1-a > 0, -a < 0 \text{ 이므로 } \sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a} \\ &= \sqrt{a}\sqrt{-a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a} \\ &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{ai} \cdot \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-ai} \\ &= \sqrt{a^2} \sqrt{(1-a)^2 i^2} \\ &= -a(1-a) = a(a-1) \end{aligned}$$

18. 일차방정식 $a^2x + 1 = a^4 - x$ 의 해는? (단, a 는 실수)

① a

② $a + 1$

③ $a - 1$

④ $a^2 - 1$

⑤ $a^2 + 1$

해설

$$a^2x + 1 = a^4 - x \text{ 에서 } a^2x + x = a^4 - 1$$

$$(a^2 + 1)x = (a^2 - 1)(a^2 + 1)$$

$$\therefore x = a^2 - 1 (\because a^2 + 1 > 0)$$

19. 다음 보기는 방정식 $(ax - 1)a = x - 1$ 의 해에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $a = -1$ 이면 해가 없다.
- ㉡ $a = 1$ 이면 오직 하나의 해를 갖는다.
- ㉢ $a \neq \pm 1$ 이 아니면 해는 무수히 많다.

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$(ax - 1)a = x - 1$ 에서
 $(a^2 - 1)x = a - 1$
 $(a - 1)(a + 1)x = a - 1$
㉠ $a = -1$ 이면 $0 \cdot x = -2$ 이므로 해가 없다.
㉡ $a = 1$ 이면 $0 \cdot x = 0$ 이므로 해는 무수히 많다.
㉢ $a \neq \pm 1$ 이면 $x = \frac{1}{a + 1}$
따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

20. $|x+1|+|x-2|=x+3$ 을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

i) $x < -1$ 일 때,
 $-x-1-x+2=x+3$
 $\therefore x = -\frac{2}{3}$ (모순)
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,
 $x+1-x+2=x+3$
 $\therefore x = 0$
iii) $x \geq 2$ 일 때,
 $x+1+x-2=x+3$
 $\therefore x = 4$

21. 이차방정식 $|x^2 - 5| = 4x$ 의 모든 근의 합은?

① 5

② 0

③ 6

④ 10

⑤ 12

해설

i) $x^2 - 5 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt{5}$ 또는 $x \geq \sqrt{5} \dots \textcircled{\text{㉠}}$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x+1)(x-5) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } 5$$

$$\Rightarrow x = 5 (\because \textcircled{\text{㉠}})$$

ii) $x^2 - 5 < 0 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \dots \textcircled{\text{㉡}}$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x-1)(x+5) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } -5$$

$$\Rightarrow x = 1 (\because \textcircled{\text{㉡}})$$

$$\therefore \text{근의 합} : 6$$

22. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가)를 계수로 갖는 이차방정식은 (나)의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다)를 계수로 갖는 이차식 $ax^2 + bx + c$ 는 (라)의 범위에서는 반드시 (마)의 곱으로 인수분해된다.

- ① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식
- ② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식
- ③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
- ④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
- ⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

23. 다음 방정식의 해는?

$x^2 + 3|x| - 4 = 0$

- ① 0
- ② ±1
- ③ ±√2
- ④ ±√3
- ⑤ ±2

해설

(i) $x \geq 0$ 일 때 $|x| = x$ 이므로 주어진 방정식은
 $x^2 + 3x - 4 = 0, (x + 4)(x - 1) = 0$
 $\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$ 이므로 $x = -4$ 는 부적합
 $\therefore x = 1$
(ii) $x < 0$ 일 때 $|x| = -x$ 이므로 주어진 방정식은
 $x^2 - 3x - 4 = 0, (x - 4)(x + 1) = 0$
 $x = 4$ 또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -1$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$ 이므로 $x = 4$ 는 부적합
(i), (ii)에서 $x = \pm 1$

24. $0 < x < 2$ 일 때, 방정식 $2x^2 - x - 3[x] = 0$ 의 모든 해의 합은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2x^2 - x - 3[x] = 0$ 에서 $0 < x < 2$ 이므로

(i) $0 < x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로

$$2x^2 - x = 0, x(2x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로

$$2x^2 - x - 3 = 0, (x + 1)(2x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } \frac{3}{2}$$

그런데 $1 \leq x < 2$ 이므로 $x = \frac{3}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

25. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 두 근이 3, b 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$ 이 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 근이므로
 $9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore a = 7$
이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$
그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$
 $\therefore b = 4 \quad \therefore ab = 28$

26. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이 되도록 유리수 p, q 를 정할 때, $p + q$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ 1

⑤ 2

해설

$x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이고
 p, q 가 유리수이면 남은 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.
두 근의 합 $-p = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$
 $\therefore p = -4$
두 근의 곱 $q = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$
 $\therefore p + q = -4 + 1 = -3$

27. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x + 3 = 0 \text{ 에서 근과 계수의 관계에 의해} \\ &\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3 \\ &(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta) \\ &= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta \\ &= (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta \\ &= 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9 \end{aligned}$$

28. 0 이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$	㉡ $x^2 + bx + a = 0$
㉢ $ax^2 + x + b = 0$	㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉣ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0, D = a^2 - 4b$

$b \leq \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2, a^2 \geq 4b^2$ 일 때만 실근 존재

29. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, a, b, c, p, q 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

보기

- ㉠ 판별식은 $b^2 - 4ac$ 이다.
- ㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.
- ㉢ $a < 0, c < 0$ 이면 허근만 갖는다.
- ㉣ $a > 0, c < 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.
- ㉥ 한 근이 $p + qi$ 이면 다른 한 근은 $q - pi$ 이다.

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

- ㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능 (참)
- ㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)
- ㉢ $b^2 - 4ac$ 에서 $ac > 0$ 이다.
하지만 $b^2 < 4ac$ 인 경우만 허근을 가짐 (거짓)
- ㉣ 판별식 $b^2 - 4ac$ 에서 $ac < 0$ 이므로 $b^2 - 4ac > 0$ (참)
- ㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)
- ㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p + qi$ 이면 $p - qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

30. x 에 관한 이차방정식 $(m^2 - 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 m 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$(m^2 - 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3 = 0$$

(i) 이차방정식이므로 $m^2 - 1 \neq 0$

$$\therefore m \neq 1, -1$$

(ii) 중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$$\frac{D}{4} = (m - 1)^2 - 3(m^2 - 1) = 0$$

$$m^2 - 2m + 1 - 3m^2 + 3 = 0$$

$$m^2 + m - 2 = 0$$

$$(m + 2)(m - 1) = 0$$

$$\therefore m = 1, -2$$

$\therefore$ (i) 과 (ii) 에서 $m = -2$ 일 때만 중근을 갖는다.

31. 이차방정식 $x^2 - 2ax - 3a = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 a 의 값과 그 때의 중근을 구한 것은?

① $a = -3, x = -3$

② $a = -3, x = 0$

③ $a = 0, x = -3$

④ $a = 3, x = 0$

⑤ $a = 3, x = 3$

해설

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (-3a) = 0$$

$$a^2 + 3a = 0, a(a + 3) = 0$$

$$a = -3 \text{ 또는 } 0$$

$$(i) a = -3 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 0$$

$$\therefore x = -3 (\text{중근})$$

$$(ii) a = 0 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 = 0$$

$$\therefore x = 0$$

32. x 에 대한 두 이차방정식
 $x^2 - 2\sqrt{b}x + (2a + 1) = 0 \cdots \textcircled{A}$
 $x^2 - 2ax - b = 0 \cdots \textcircled{B}$ 가 있다. $\textcircled{A}$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, $\textcircled{B}$ 의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)
- ① 서로 다른 두 실근을 가진다.
② 중근을 가진다.
③ 서로 다른 두 허근을 가진다.
④ 판별할 수 없다.
⑤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

$\textcircled{A}$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = b - (2a + 1) > 0 \therefore b > 2a + 1$
 $\textcircled{B}$ 의 판별식을 D' 이라 하면
 $\frac{D'}{4} = a^2 + b > a^2 + 2a + 1$
 $\qquad = (a + 1)^2 \geq 0$
 $\therefore \frac{D'}{4} > 0$
따라서, $\textcircled{B}$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

33. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0 \\ \therefore x &= 2, y = 4 \\ \therefore x + y &= 6 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= 0 \text{이 실근을 가지므로} \\ D/4 &= 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0 \\ y^2 - 8y + 16 &\leq 0 \\ (y - 4)^2 &\leq 0, y = 4 \\ \text{준식에 대입하면 } x &= 2 \\ \text{따라서 } x + y &= 6 \end{aligned}$$

34. x 에 대한 이차방정식 $x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$ 이 허근을 가질 때,
실수 k 의 값의 범위는?

① $k < 0$

② $k > 0$

③ $0 < k < \frac{1}{4}$

④ $k \leq 0$

⑤ $k \geq 0$

해설

$$x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0 \text{ 이}$$

허근을 가져야 하므로

x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$kx^2 - kx + \frac{1}{4}(k+1) = 0$$

$$D = (-k)^2 - 4k \cdot \frac{1}{4}(k+1) < 0$$

$$= k^2 - k^2 - k = -k < 0 \quad \therefore k > 0$$

$$\therefore k > 0$$

35. 0이 아닌 두 실수 a, b 가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 를 만족할 때, 다음 [보기]의 x 에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$
- ㉡ $x^2 - ax - b = 0$
- ㉢ $x^2 + 2(a + b)x + (a^2 + b^2) = 0$

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로 $a < 0, b < 0$
㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$ 에서
 $D = b^2 - 4a > 0$
㉡ $x^2 - ax - b = 0$ 에서
 $D = a^2 + 4b$ 는 음수, 양수를 판별할 수 없다.
㉢ $x^2 + 2(a + b)x + (a^2 + b^2) = 0$ 에서
 $\frac{D}{4} = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

36. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 갖고, 동시에 $x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4} = 4 + 6k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 가질 조건은

$$D = 25 + 8k \geq 0$$

$$\therefore k \geq -\frac{25}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -\frac{25}{8} \leq k < -\frac{2}{3}$$

따라서, 정수 $k = -3, -2, -1$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 3개

37. x 에 대한 이차방정식 $4x^2 + 2(2k + m)x + k^2 - k + 2n = 0$ 이 임의의 실수 k 에 대하여 항상 중근을 가질 때, 실수 m, n 에 대하여 $m + n$ 의 값을 구하면?

- ① 3 ② $\frac{7}{8}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{7}{8}$ ⑤ $-\frac{5}{8}$

해설

판별식이 0이어야 한다.

$$D' = (2k + m)^2 - 4(k^2 - k + 2n) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 4km + 4k - 8n = 0$$

$$\Rightarrow 4k(m + 1) + m^2 - 8n = 0$$

임의의 k 에 대해 성립하려면

$$m + 1 = 0, \quad m^2 - 8n = 0$$

$$\Rightarrow m = -1, \quad n = \frac{1}{8}, \quad m + n = -\frac{7}{8}$$

38. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(k + a)x + (k^2 + 4k - 2b) = 0$ 이 k 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a - b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중근을 갖으려면 판별식이 0이어야 한다.

$$D' = (k + a)^2 - (k^2 + 4k - 2b) = 0$$

$$(2a - 4)k + a^2 + 2b = 0$$

모든 k 에 대해서 성립하려면,

$$2a - 4 = 0 \text{ 이고 } a^2 + 2b = 0$$

$$\therefore a = 2, \quad b = -2$$

$$\therefore a - b = 4$$

39. x 에 대한 이차식 $a(1-x^2) - 2bx + c(1+x^2)$ 이 완전제곱식일 때, a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?
- ① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형
 - ② b 를 빗변으로 하는 직각삼각형
 - ③ c 를 빗변으로 하는 직각삼각형
 - ④ 예각삼각형
 - ⑤ 정삼각형

해설

$a(1-x^2) - 2bx + c(1+x^2)$ 을 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(c-a)x^2 - 2bx + a+c$

위의 식이 완전제곱식이 되려면

$c-a \neq 0$ 이고, $\frac{D}{4} = 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = b^2 - (c-a)(c+a) = 0$$

$$b^2 - (c^2 - a^2) = 0, \quad b^2 - c^2 + a^2 = 0$$

$$\therefore c^2 = b^2 + a^2$$

따라서 c 를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

40. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근의 합은 2이다.
- ② 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근의 차는 4이다.
- ③ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근의 곱은 5이다.
- ④ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
- ⑤ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은 -6 이다.

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 에서

두근의 합 : $-\frac{b}{a}$

두근의 곱 : $\frac{c}{a}$

두근의 차 : $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$

$\therefore$ ② (두근의 차) = $4i$

41. 이차방정식 $x^2 + 4x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{-4\alpha-2} + \sqrt{-4\beta-2}$ 의 값은?

① -5

② -4

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -4, \alpha\beta = 2 \\ (\sqrt{-4\alpha-2} + \sqrt{-4\beta-2})^2 \\ &= -4(\alpha + \beta) + 2\sqrt{16\alpha\beta + 8(\alpha + \beta) + 4} - 4 \\ &= 16 + 2\sqrt{4} - 4 = 16 \\ \therefore \sqrt{-4\alpha-2} + \sqrt{-4\beta-2} &= 4 \quad (\because \text{준식} > 0) \end{aligned}$$

42. x 에 대한 2차 방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 한근이 $1 + \sqrt{5}$ 일 때, a 의 값은?

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

다른 한 근을 α 라 하면

두 근의 곱은 $(1 + \sqrt{5})\alpha = 4$

따라서 $\alpha = -1 + \sqrt{5}$

$\therefore$ 두 근의 합은 $(1 + \sqrt{5}) + (-1 + \sqrt{5}) = a$

$\therefore a = 2\sqrt{5}$

43. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, 실수 m 의 값은?

① $\pm 2\sqrt{2}$

② $\pm 2\sqrt{3}$

③ $\pm 2\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{6}$

⑤ $\pm 2\sqrt{7}$

해설

두 근을 α , $\alpha + 2$ 라고 하면,
근과 계수와의 관계에서
 $\alpha + (\alpha + 2) = m \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha(\alpha + 2) = 4 \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 에서 $\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0$
 $\therefore \alpha = -1 \pm \sqrt{5}$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $m = 2(-1 \pm \sqrt{5}) + 2 = \pm 2\sqrt{5}$

44. 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이고, 이차방정식 $x^2 - (2a - 1)x + 6 = 0$ 의 두 근이 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 9 ④ 13 ⑤ 25

해설

$x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b$$

$x^2 - (2a - 1)x + 6 = 0$ 의 두 근이 a, b 이므로

근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} a + b = 2a - 1 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ ab = 6 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $b = a - 1$ 이것을 ㉡에 대입하면

$$a(a - 1) = 6, a^2 - a - 6 = 0, (a + 2)(a - 3) = 0 \text{에서}$$

$$a = -2 \text{ 또는 } a = 3$$

$$\therefore (a, b) = (-2, -3), (3, 2)$$

어느 경우에도 $a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$ 이다.

45. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하시오.

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과계수와의 관계로부터
 $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -1$

2와 -1을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 - (2 - 1)x + 2 \cdot (-1) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + b = 0$$

$$\therefore a = -1, b = -2$$

46. 다음 중 인수분해를 바르게 한 것을 고르면?

① $x^2 + 4x + 1 = (x - 2 - \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$

② $x^2 - 2x + 5 = (x - 1 + 2i)(x + 1 + 2i)$

③ $x^2 + 4 = (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $2x^2 + 4x - 5 = \left(x - \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}\right)\left(x - \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2 - 6x + 1 = 3\left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$

해설

근의 공식을 통해 나온 해를 바탕으로 인수분해 한다

① $x^2 + 4x + 1 = (x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})$

② $x^2 - 2x + 5 = (x - 1 - \sqrt{6})(x - 1 + \sqrt{6})$

③ $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$

④ $2x^2 + 4x - 5$

$= 2\left(x - \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}\right)\left(x - \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2 - 6x + 1$

$= 3\left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$

47. 서현이와 주현이가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 을 함께 풀었다. 그런데 서현이는 a 를 잘못 보고 풀어서 두 근 1, 3을 얻었고, 주현이는 b 를 잘못 보고 풀어서 두 근 $-1, -4$ 를 얻었다. 이 때, 처음 이차방정식은?

① $x^2-5x+3=0$

② $x^2+5x+3=0$

③ $x^2+5x+13=0$

④ $x^2+5x-13=0$

⑤ $x^2+5x+15=0$

해설

서현이가 잘못 본 일차항의 계수 a 를 a' ,
주현이가 잘못 본 상수항 b 를 b' 이라 하자.
 $x^2+a'x+b=0$ 의 두 근이 1, 3이므로
 $b=1\times 3=3$
 $x^2+ax+b'=0$ 의 두 근이 $-1, -4$ 이므로
 $-a=(-1)+(-4)=-5$
 $\therefore a=5$
따라서 처음의 이차방정식은 $x^2+5x+3=0$

48. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 - i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?

- ① -20 ② -12 ③ 5 ④ 12 ⑤ 20

해설

한 근이 $2 - i$ 이면 다른 한 근은 $2 + i$

두 근의 합 : $4 = -a$

두 근의 곱 : $5 = b$

$\therefore ab = -20$

49. 이차방정식 $x^2 - 2ax + 4 = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 크다. 이 때, 실수 a 의 값의 범위를 정하면?

- ① $2 \leq a < \frac{5}{2}$
- ② $2 \leq a \leq \frac{5}{2}$
- ③ $2 < a < \frac{5}{2}$
- ④ $2 \leq a < 3$
- ⑤ $2 < a < 3$

해설

$f(x) = x^2 - 2ax + 4$ 라고 하면

(i) $f(1) > 0 \Rightarrow a < \frac{5}{2}$

(ii) 두근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - 4 \geq 0$$

$a \leq -2$ 또는 $a \geq 2$

(iii) 그래프의 축이 $x = 1$ 의 오른쪽에 있어야하므로

$a > 1$

(i), (ii), (iii)에 의해 $2 \leq a < \frac{5}{2}$

50. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (m+3)x + (m+6) = 0$ 의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 m 의 값의 범위에 속하는 정수를 구하면 ?

① -6

② -5

③ -4

④ -3

⑤ -2

해설

(i) (두근의 합) $-m-3 > 0$

$m < -3$

(ii) (두근의 곱) $m+6 > 0$

$m > -6$

(iii) $D = (m+3)^2 - 4(m+6) \geq 0$

$m^2 + 2m - 15 \geq 0$

$(m-3)(m+5) \geq 0$

$m \leq -5$ 또는 $m \geq 3$

(i), (ii), (iii)에서 $-6 < m \leq -5$

$\therefore m = -5$