**1.** $\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-3}}$ 의 값은 ?

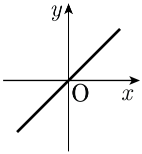
① $1-\sqrt{2}$　　② $-1-\sqrt{2}$　　③ $(1+\sqrt{2})i$

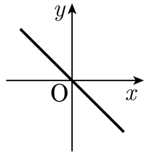
④ $-(1+\sqrt{2})i$　　⑤ $(1-\sqrt{2})i$

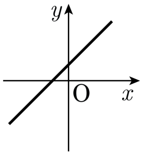
해설

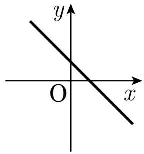
$$\frac{1}{\sqrt{-(3-2\sqrt{2})}}=\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\times\frac{1}{i}$$
$$=(\sqrt{2}+1)\times(-i)$$
$$=-(1+\sqrt{2})i$$

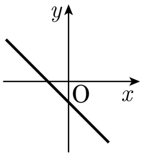
**2.** $(3+2i)z$가 실수가 되도록 하는 복소수 $z=x+yi$를 점 $(x,\ y)$로 나타낼 때, 점 $(x,\ y)$는 어떤 도형 위를 움직이는가? (단, $x,\ y$는 실수)

①



②



③



④



⑤



해설

$$(3+2i)(x+yi) = 3x+3yi+2xi-2y$$
$$= (3x-2y)+(2x+3y)i$$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x+3y=0$

$\therefore\ y=-\dfrac{2}{3}x$

따라서 기울기가 음수이고 $y$절편이 0인 그래프는 ②이다.

**3.** 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$ 에서 $z$가 순허수일 때, 실수 $x$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ )

① $-3$ ② $-2$ ③ $-1$ ④ $0$ ⑤ $1$

해설

$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$

$\quad=(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$

순허수가 되려면 실수부$=0$ , 허수부$\neq 0$

$\therefore\ x=-2$

**4.** 등식 $(x^2-3x+1)+(y^2-1)i=-1+3i$을 만족하는 실수 $x$, $y$에 대하여 $xy$의 최댓값은?

① $-4$ ② $-2$ ③ $-1$ ④ $2$ ⑤ $4$

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$\therefore\ x^2-3x+1=-1\quad y^2-1=3$

$x=1$ 또는 $2y=\pm2$

$\therefore\ (xy$의 최댓값$)=\ 4$

**5.** $(1+i)^6-(1-i)^6$ 을 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ )

① 16　② $-16$　③ $16i$　④ $-16i$　⑤ 0

해설

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i,$

$(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

$\therefore\ (1+i)^6-(1-i)^6$

$=\{(1+i)^2\}^3-\{(1-i)^2\}^3$

$=(2i)^3-(-2i)^3$

$=8i^3+8i^3$

$=16i^3=-16i$

**6.** $n$이 홀수일 때, $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$의 값은?

① 0　　② 1　　③ $i$　　④ $-i$　　⑤ $-1$

**해설**

$$(\text{준 식})=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n$$

$$=i^n+(-i)^n(n\text{은 홀수})$$

$$=i^n-i^n=0$$

**7.** $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1998}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① $0$ ② $i$ ③ $-2i$ ④ $-1$ ⑤ $-2$

**해설**

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$ 이므로

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$
$$=f(-i)+f(i)$$
$$=(-i)^{1998}+(i)^{1998}$$
$$=(-i)^{1996}\cdot(-i)^2+i^{1996}\cdot i^2=-2$$

**8.** $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2005}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 의 값을 구하면?

① 0　　② $i$　　③ 1　　④ $1+i$　　⑤ $1-i$

**해설**

$\dfrac{1+i}{1-i}=i,\ \dfrac{1-i}{1+i}=-i$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$$
$$=i^{2005}+(-i)^{2005}$$
$$=(i^4)^{501}\cdot i+((-i)^4)^{501}\cdot(-i)$$
$$=i+(-i)=0$$

**9.** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 를 간단히 하면?

① $-2i$ ② $2i$ ③ $1+i$ ④ $1-i$ ⑤ $i$

해설

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=i, \left(\frac{1-i}{1+i}\right)=-i$ 이고 $i^4=1$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$$
$$=i^{2004}+(-i)^{2005}$$
$$=i^{4\times501}+(-i)^{4\times501}\times(-i)$$
$$=1+(-i)$$
$$=1-i$$

**10.** $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{200}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{200}$ 을 간단히 하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ -2　　⑤ -4

**해설**

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}=i \quad \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}=-i$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{200}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{200}=i^{100}+(-i)^{100}$$

$$=(i^4)^{25}+\left((-i)^4\right)^{25}$$

$$=1+1=2$$

**11.** $x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, y = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ 의 값을 구하면?

① 0  ② 1  ③ -2  ④ 3  ⑤ -4

해설

$$x + y = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = 1$$

$$xy = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{1-(-3)}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3+y^3}{xy} \\ &= \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{xy} \\ &= -2 \end{aligned}$$

**12.** $a$, $b$ 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ $n$이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$은 실수이다.

Ⅱ $-1 < a < 1$일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$

Ⅲ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이다.

Ⅳ $0 < a < b$일 때, $\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ

④ Ⅰ, Ⅳ ⑤ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in R$ (참)

Ⅱ. $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = |a+1| - |a-2|$

$= a + 1 - (2-a)$

$= 2a - 1 \neq 3$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $b < 0,\ a \geq 0$ 이다.

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{-(-b)} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{(-b)}i$$

$$= \sqrt{a(-b)}i = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}$$

$\therefore\ \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

Ⅳ. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.

$$\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = |\sqrt{a}-\sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

**13.** 다음은 두 복소수 $z_1$, $z_2$에 대하여 '$z_1 \cdot z_2 = 0$이면 $z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$'임을 보인 것이다.

> $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ($a$, $b$, $c$, $d$는 실수) 라고 하자.
> $z_1 z_2 = 0$이면 $(a+bi)(c+di) = 0$
> 이 식의 양변에 $(a-bi)(c-di)$를 곱하면
> (좌변) $= (a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di)$
> $= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$
> $= (a^2+b^2)(c^2+d^2)$
> (우변) $= 0 \cdot (a-bi)(c-di) = 0$
> $\therefore\ (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 0$
> 따라서 $a^2+b^2 = 0$ 또는 $c^2+d^2 = 0$이므로
> $a = b = 0$ 또는 $c = d = 0$
> $\therefore\ z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$

다음 중 위의 과정에 이용되지 않는 성질은?

① 두 실수 $x$, $y$에 대하여 $x^2 + y^2 = 0$이면 $x = y = 0$이다.

② 두 실수 $x$, $y$에 대하여 $xy = 0$이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$이다.

③ 두 실수 $x$, $y$에 대하여 $x + yi = 0$이면 $x = y = 0$이다.

④ 임의의 복소수 $\alpha$에 대하여 $0 \cdot \alpha = 0$이다.

⑤ 복소수 $\alpha$, $\beta$에 대하여 $\alpha\beta = \beta\alpha$이다.

**해설**

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ($a$, $b$, $c$, $d$는 실수)라고 하자.
$z_1 z_2 = 0$이면 $(a+bi)(c+di) = 0$
(좌변) $= (a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di) \cdots$ ⑤
$= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$
$= (a^2+b^2)(c^2+d^2)$
(우변) $= 0 \cdot (a-bi)(c-di) = 0 \cdots$ ④
$\therefore\ (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 0 \cdots$ ②
따라서 $a^2+b^2 = 0$ 또는 $c^2+d^2 = 0$ 이므로 $\cdots$ ①
$a = b = 0$ 또는 $c = d = 0 \cdots$ ③의 역
$\therefore\ a + bi = 0$ 또는 $c + di = 0$
즉, 이 과정에서 ③의 역은 이용되었지만, ③은 이용되지 않았다.

**14.** 복소수 $\alpha$, $\beta$ 에 대하여 연산 $*$ 를 $\alpha * \beta = (\alpha+\beta) - \alpha\beta$ 라 하자. $z = \dfrac{5}{-2-i}$ 일 때, $z * \bar{z}$ 의 값은?

① $-1$ ② $1$ ③ $-9$ ④ $9$ ⑤ $0$

해설

$z = -2 + i$ , $\bar{z} = -2 - i$

$$\begin{aligned} z * \bar{z} &= (z + \bar{z}) - z\bar{z} \\ &= -4 - 5 \\ &= -9 \end{aligned}$$

**15.** 복소수 $z$의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때, $(1+2i)z+5(1-\bar{z}i)=0$을 만족시키는 복소수 $z$는?

① $1+3i$ ② $1-3i$ ③ $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$
④ $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i$ ⑤ $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i$

해설

$z=a+bi$ ($a$, $b$ 는 실수)라 놓으면 $\bar{z}=a-bi$
따라서, 준식은 $(1+2i)(a+bi)+5\{1-(a-bi)i\}=0$
$\therefore\ a-7b+5+(b-3a)i=0$
그런데, $a$, $b$가 실수이므로
$a-7b+5=0$, $b-3a=0$
이들을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{4}$
$\therefore\ z=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i$

**16.** $x = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 \cdot \overline{x} - x \cdot \overline{x^3}$ 의 값은? (단, $\overline{x}$ 는 $x$ 의 켤레복소수이다.)

① $13i$　② $28\sqrt{3}i$　③ $28i$

④ $56\sqrt{3}i$　⑤ $72i$

해설

$x = 2 + \sqrt{3}i$ 에서 $\overline{x} = 2 - \sqrt{3}i$ 이므로

$$x^3 \cdot \overline{x} - x \cdot \overline{x^3} = x\overline{x}(x^2 - \overline{x^2}) = x\overline{x}(x + \overline{x})(x - \overline{x})$$
$$= 7 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}i = 56\sqrt{3}i$$

**17.** $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$ 를 간단히 하면?

① $a(1-a)$ ② $a(a-1)$ ③ $a^2(a-1)$

④ $a^2(1-a)^2$ ⑤ $-a^2(1-a)^2$

해설

$a > 0$ , $a-1 < 0$ , $1-a > 0$ , $-a < 0$ 이므로 $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$

$= \sqrt{a}\sqrt{-a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}$

$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}i \cdot \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-a}i$

$= \sqrt{a^2}\sqrt{(1-a)^2}i^2$

$= -a(1-a) = a(a-1)$

**18.** 일차방정식 $a^2x+1=a^4-x$의 해는? (단, $a$ 는 실수)

① $a$　② $a+1$　③ $a-1$

④ $a^2-1$　⑤ $a^2+1$

해설

$a^2x+1=a^4-x$ 에서 $a^2x+x=a^4-1$

$(a^2+1)x=(a^2-1)(a^2+1)$

$\therefore x=a^2-1(\because a^2+1>0)$

**19.** 다음 보기는 방정식 $(ax-1)a = x-1$ 의 해에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면?

**보기**

㉠ $a = -1$ 이면 해가 없다.

㉡ $a = 1$ 이면 오직 하나의 해를 갖는다.

㉢ $a \neq \pm 1$ 이 아니면 해는 무수히 많다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

**해설**

$(ax-1)a = x-1$ 에서

$(a^2-1)x = a-1$

$(a-1)(a+1)x = a-1$

㉠ $a = -1$ 이면 $0 \cdot x = -2$ 이므로 해가 없다.

㉡ $a = 1$ 이면 $0 \cdot x = 0$ 이므로 해는 무수히 많다.

㉢ $a \neq \pm 1$ 이면 $x = \dfrac{1}{a+1}$

따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

**20.** $|x+1|+|x-2|=x+3$을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

i ) $x<-1$일 때,

$-x-1-x+2=x+3$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (모순)

ii ) $-1\le x<2$일 때,

$x+1-x+2=x+3$

$\therefore\ x=0$

iii) $x\ge 2$일 때,

$x+1+x-2=x+3$

$\therefore\ x=4$

**21.** 이차방정식 $|x^2-5|=4x$ 의 모든 근의 합은?

① 5　　② 0　　③ 6　　④ 10　　⑤ 12

해설

i ) $x^2-5\geq 0 \Rightarrow x\leq -\sqrt{5}$ 또는 $x\geq \sqrt{5}$ $\cdots$ ㉠

$x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$

$x=-1$ 또는 $5$

$\Rightarrow \quad x=5$ ($\because$ ㉠)

ii ) $x^2-5<0 \Rightarrow -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ $\cdots$ ㉡

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x=1$ 또는 $-5$

$\Rightarrow \quad x=1$ ($\because$ ㉡)

$\therefore$ 근의 합 : 6

**22.** 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

| |
|---|
| (가) 를 계수로 갖는 이차방정식은 (나) 의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다) 를 계수로 갖는 이차식 $ax^2 + bx + c$ 는 (라) 의 범위에서는 반드시 (마) 의 곱으로 인수분해된다. |

① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식

② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식

③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

**23.** 다음 방정식의 해는?

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

① 0　② ±1　③ $\pm\sqrt{2}$　④ $\pm\sqrt{3}$　⑤ ±2

해설

(ⅰ) $x \ge 0$일 때 $|x| = x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$
$\therefore x = -4$또는 $x = 1$
이 때, $x \ge 0$이므로 $x = -4$는 부적합
$\therefore x = 1$
(ⅱ) $x < 0$일 때 $|x| = -x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -1$
$\therefore x = 1$또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$이므로 $x = 4$는 부적합
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = \pm 1$

**24.** $0 < x < 2$일 때, 방정식 $2x^2 - x - 3[x] = 0$의 모든 해의 합은?(단, $[x]$는 $x$를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2x^2 - x - 3[x] = 0$에서 $0 < x < 2$이므로

(ⅰ) $0 < x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$2x^2 - x = 0,\ x(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = 0$ 또는 $x = \dfrac{1}{2}$

그런데 $0 < x < 1$이므로 $x = \dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$2x^2 - x - 3 = 0,\ (x+1)(2x-3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $\dfrac{3}{2}$

그런데 $1 \le x < 2$이므로 $x = \dfrac{3}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2$

**25.** 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 3, $b$일 때, $ab$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로

$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore \ a = 7$

이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$

그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$

$\therefore \ b = 4 \quad \therefore \ ab = 28$

**26.** $x$에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 $p$, $q$를 정할 때, $p+q$의 값은?

① $-4$  ② $-3$  ③ $-2$  ④ $1$  ⑤ $2$

해설

$x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고
$p$, $q$가 유리수이면 남은 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
두 근의 합 $-p=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$
$\therefore p=-4$
두 근의 곱 $q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
$\therefore p+q=-4+1=-3$

**27.** $x^2-2x+3=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot 2+12=9$

**28.** 0 이 아닌 두 실수 $a, b$에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 <u>모두</u> 고른 것은?

**보 기**

㉠ $x^2 + ax + b = 0$　　㉡ $x^2 + bx + a = 0$

㉢ $ax^2 + x + b = 0$　　㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉣　③ ㉡, ㉢　④ ㉡, ㉣　⑤ ㉢, ㉣

**해설**

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \le \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \ge 4b^2$ 일 때만 실근 존재

**29.** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, $a$, $b$, $c$, $p$, $q$ 는 실수, $i=\sqrt{-1}$ )

**보기**

㉠ 판별식은 $b^2-4ac$ 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0$, $c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0$, $c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

**해설**

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 $a, b, c$ 가 실수이므로 판별식 사용 가능(참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ $b^2-4ac$ 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐(거짓)

㉣ 판별식 $b^2-4ac$ 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

**30.** $x$에 관한 이차방정식$(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$이 중근을 갖도록 하는 $m$의 값은?

① $-2$　② $-1$　③ $0$　④ $1$　⑤ $2$

해설

$(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$

( i ) 이차방정식이므로 $m^2-1\neq 0$

$\therefore\ m\neq 1,-1$

( ii ) 중근을 가지려면 판별식 $D=0$

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2-3(m^2-1)=0$$

$m^2-2m+1-3m^2+3=0$

$m^2+m-2=0$

$(m+2)(m-1)=0$

$\therefore\ m=1,-2$

$\therefore$( i )과 ( ii )에서 $m=-2$일 때만 중근을 갖는다.

**31.** 이차방정식 $x^2-2ax-3a=0$이 중근을 갖도록 하는 $a$의 값과 그 때의 중근을 구한 것은?

① $a=-3,\ x=-3$　　② $a=-3,\ x=0$

③ $a=0,\ x=-3$　　④ $a=3,\ x=0$

⑤ $a=3,\ x=3$

해설

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(-3a)=0$

$a^2+3a=0,\ a(a+3)=0$

$a=-3$ 또는 $0$

( i ) $a=-3$일 때,

$x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$

$\therefore x=-3$(중근)

( ii ) $a=0$일 때,

$x^2=0$

$\therefore x=0$

**32.** $x$ 에 대한 두 이차방정식
$x^2-2\sqrt{b}x+(2a+1)=0 \cdots$ ㉠
$x^2-2ax-b=0 \cdots$ ㉡가 있다. ㉠이 서로 다른 두 실근을 가질 때, ㉡의 근을 판별하면? (단, $a, b$ 는 실수이고, $b \geq 0$ )

① 서로 다른 두 실근을 가진다.

② 중근을 가진다.

③ 서로 다른 두 허근을 가진다.

④ 판별할 수 없다.

⑤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

㉠의 판별식을 $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4}=b-(2a+1)>0 \therefore\ b>2a+1$$

㉡의 판별식을 $D'$ 이라 하면

$$\frac{D'}{4}=a^2+b>a^2+2a+1$$
$$=(a+1)^2 \geq 0$$
$$\therefore\ \frac{D'}{4}>0$$

따라서, ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

**33.** 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

**34.** $x$에 대한 이차방정식 $x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$이 허근을 가질 때, 실수 $k$의 값의 범위는?

① $k < 0$　　② $k > 0$　　③ $0 < k < \frac{1}{4}$

④ $k \leq 0$　　⑤ $k \geq 0$

해설

$x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$이

허근을 가져야 하므로

$x$에 대한 내림차순으로 정리하면

$kx^2 - kx + \frac{1}{4}(k+1) = 0$

$D = (-k)^2 - 4k \cdot \frac{1}{4}(k+1) < 0$

$= k^2 - k^2 - k = -k < 0 \quad \therefore k > 0$

$\therefore k > 0$

**35.** 0이 아닌 두 실수 $a$, $b$가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 $x$에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0,\ b < 0$

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서

$D = b^2 - 4a > 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$에서

$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$에서

$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

**36.** 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 $k$의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4}=4+6k<0$$

$$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots㉠$$

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$$D=25+8k\geq 0$$

$$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}\quad\cdots\cdots㉡$$

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 $k$의 개수는 3개

**37.** $x$에 대한 이차방정식 $4x^2 + 2(2k + m)x + k^2 - k + 2n = 0$이 임의의 실수 $k$에 대하여 항상 중근을 가질 때, 실수 $m$, $n$에 대하여 $m + n$의 값을 구하면?

① $3$ ② $\frac{7}{8}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{7}{8}$ ⑤ $-\frac{5}{8}$

해설

판별식이 0이어야 한다.

$D' = (2k + m)^2 - 4(k^2 - k + 2n) = 0$

$\Rightarrow \quad m^2 + 4km + 4k - 8n = 0$

$\Rightarrow \quad 4k(m + 1) + m^2 - 8n = 0$

임의의 $k$에 대해 성립하려면

$m + 1 = 0, \quad m^2 - 8n = 0$

$\Rightarrow \ m = -1, \ n = \frac{1}{8}, \ m + n = -\frac{7}{8}$

**38.** $x$에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+a)x+(k^2+4k-2b)=0$이 $k$값에 관계없이 중근을 가질 때, $a-b$의 값은? (단, $a, b$는 상수)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

중근을 갖으려면 판별식이 0이어야 한다.

$D' = (k+a)^2-(k^2+4k-2b)=0$

$(2a-4)k+a^2+2b=0$

모든 $k$에 대해서 성립하려면,

$2a-4=0$이고 $a^2+2b=0$

$\therefore\ a=2, \quad b=-2$

$\therefore\ a-b=4$

**39.** $x$에 대한 이차식 $a(1-x^2)-2bx+c(1+x^2)$이 완전제곱식일 때, $a$, $b$, $c$를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a$를 빗변으로 하는 직각삼각형

② $b$를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ $c$를 빗변으로 하는 직각삼각형

④ 예각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$a(1-x^2)-2bx+c(1+x^2)$을 $x$에 대한 내림차순으로 정리하면

$(c-a)x^2-2bx+a+c$

위의 식이 완전제곱식이 되려면

$c-a \neq 0$이고, $\dfrac{D}{4}=0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=b^2-(c-a)(c+a)=0$$

$$b^2-(c^2-a^2)=0, \quad b^2-c^2+a^2=0$$

$$\therefore c^2=b^2+a^2$$

따라서 $c$를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

**40.** 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 합은 2이다.

② 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 차는 4이다.

③ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 곱은 5이다.

④ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은 $-6$이다.

해설

$ax^2+bx+c=0$에서

두근의 합 : $-\dfrac{b}{a}$

두근의 곱 : $\dfrac{c}{a}$

두근의 차 : $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

$\therefore$ ② (두근의 차)$=4i$

**41.** 이차방정식 $x^2+4x+2=0$의 두 근을 $\alpha,\beta$라 할 때, $\sqrt{-4\alpha-2}+\sqrt{-4\beta-2}$의 값은?

① $-5$ ② $-4$ ③ $3$ ④ $4$ ⑤ $5$

해설

$\alpha+\beta=-4$ , $\alpha\beta=2$

$(\sqrt{-4\alpha-2}+\sqrt{-4\beta-2})^2$

$=-4(\alpha+\beta)+2\sqrt{16\alpha\beta+8(\alpha+\beta)+4}-4$

$=16+2\sqrt{4}-4=16$

$\therefore\ \sqrt{-4\alpha-2}+\sqrt{-4\beta-2}=4$ ($\because$ 준식$>0$)

**42.** $x$에 대한 2차 방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$의 한근이 $1 + \sqrt{5}$일 때, $a$의 값은?

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $2$ ④ $-2$ ⑤ $0$

해설

다른 한 근을 $\alpha$라 하면
두 근의 곱은 $(1 + \sqrt{5})\alpha = 4$
따라서 $\alpha = -1 + \sqrt{5}$
$\therefore$두 근의 합은 $(1 + \sqrt{5}) + (-1 + \sqrt{5}) = a$
$\therefore a = 2\sqrt{5}$

**43.** 이차방정식 $x^2-mx+4=0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 $m$의 값은?

① $\pm 2\sqrt{2}$ ② $\pm 2\sqrt{3}$ ③ $\pm 2\sqrt{5}$ ④ $\pm 2\sqrt{6}$ ⑤ $\pm 2\sqrt{7}$

해설

두 근을 $\alpha$, $\alpha+2$라고 하면,
근과 계수와의 관계에서
$\alpha+(\alpha+2)=m \quad \cdots\cdots ㉠$
$\alpha(\alpha+2)=4 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉡에서 $\alpha^2+2\alpha-4=0$
$\therefore \ \alpha=-1\pm\sqrt{5}$
이것을 ㉠에 대입하면
$m=2(-1\pm\sqrt{5})+2=\pm 2\sqrt{5}$

**44.** 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$의 두 근이 $\alpha, \beta$이고, 이차방정식 $x^2 - (2a-1)x + 6 = 0$의 두 근이 $\alpha+\beta, \alpha\beta$일 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 4　② 5　③ 9　④ 13　⑤ 25

해설

$x^2 - ax + b = 0$의 두 근이 $\alpha, \beta$이므로
$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b$
$x^2 - (2a-1)x + 6 = 0$의 두 근이 $a, b$이므로
근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} a + b = 2a - 1 & \cdots\cdots ㉠ \\ ab = 6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $b = a - 1$이것을 ㉡에 대입하면
$a(a-1) = 6, a^2 - a - 6 = 0, (a+2)(a-3) = 0$에서
$a = -2$ 또는 $a = 3$
$\therefore (a, b) = (-2, -3), (3, 2)$
어느 경우에도 $a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$이다.

**45.** 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 $\alpha,\beta$라 한다. $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$을 두 근으로 하고, $x^2$의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$일 때, $a-b$의 값을 구하시오.

① $-1$ ② $1$ ③ $2$ ④ $3$ ⑤ $5$

**해설**

$x^2-2x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\beta$이므로 근과계수와의 관계로부터
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$
$2$와 $-1$을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(2-1)x+2\cdot(-1)=0$
$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x^2+ax+b=0$
$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

**46.** 다음 중 인수분해를 바르게 한 것을 고르면?

① $x^2+4x+1=(x-2-\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$

② $x^2-2x+5=(x-1+2i)(x+1+2i)$

③ $x^2+4=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $2x^2+4x-5=\left(x-\dfrac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2-6x+1=3\left(x-\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$

**해설**

근의 공식을 통해 나온 해를 바탕으로 인수분해 한다

① $x^2+4x+1=(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})$

② $x^2-2x+5=(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})$

③ $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$

④ $2x^2+4x-5$

$=2\left(x-\dfrac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2-6x+1$

$=3\left(x-\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$

**47.** 서현이와 주현이가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 함께 풀었다. 그런데 서현이는 $a$를 잘못 보고 풀어서 두 근 1, 3을 얻었고, 주현이는 $b$를 잘못 보고 풀어서 두 근 $-1$, $-4$를 얻었다. 이 때, 처음 이차방정식은?

① $x^2-5x+3=0$
② $x^2+5x+3=0$
③ $x^2+5x+13=0$
④ $x^2+5x-13=0$
⑤ $x^2+5x+15=0$

**해설**

서현이가 잘못 본 일차항의 계수 $a$를 $a'$,
주현이가 잘못 본 상수항 $b$를 $b'$ 이라 하자.
$x^2+a'x+b=0$의 두 근이 1, 3이므로
$b=1\times3=3$
$x^2+ax+b'=0$의 두 근이 $-1$, $-4$이므로
$-a=(-1)+(-4)=-5$
$\therefore\ a=5$
따라서 처음의 이차방정식은 $x^2+5x+3=0$

**48.** 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-i$일 때, 두 실수 $a$, $b$의 곱 $ab$의 값을 구하면?

① $-20$ ② $-12$ ③ $5$ ④ $12$ ⑤ $20$

해설

한 근이 $2-i$이면 다른 한 근은 $2+i$
두 근의 합 : $4=-a$
두 근의 곱 : $5=b$
$\therefore\ ab=-20$

**49.** 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 두 근이 모두 1보다 크다. 이 때, 실수 $a$의 값의 범위를 정하면?

① $2 \le a < \frac{5}{2}$ ② $2 \le a \le \frac{5}{2}$ ③ $2 < a < \frac{5}{2}$

④ $2 \le a < 3$ ⑤ $2 < a < 3$

해설

$f(x)=x^2-2ax+4$라고 하면

( i ) $f(1)>0 \Rightarrow a<\frac{5}{2}$

( ii ) 두근을 가지므로

$\frac{D}{4}=a^2-4 \ge 0$

$a \le -2$ 또는 $a \ge 2$

(iii) 그래프의 축이 $x=1$의 오른쪽에 있어야하므로

$a>1$

( i ), ( ii ), (iii)에 의해 $2 \le a < \frac{5}{2}$

**50.** $x$에 대한 이차방정식 $x^2+(m+3)x+(m+6)=0$의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 $m$의 값의 범위에 속하는 정수를 구하면 ?

① $-6$ ② $-5$ ③ $-4$ ④ $-3$ ⑤ $-2$

해설

( i ) (두근의 합) $-m-3>0$

$m<-3$

( ii ) (두근의 곱) $m+6>0$

$m>-6$

(iii) $D=(m+3)^2-4(m+6)\geq 0$

$m^2+2m-15\geq 0$

$(m-3)(m+5)\geq 0$

$m\leq -5$ 또는 $m\geq 3$

( i ), ( ii ), (iii)에서 $-6<m\leq -5$

$\therefore m=-5$