1. 등차수열 2, 5, 8, 11, $\cdots$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구하면?

① $n(3n+2)$ ② $\frac{1}{2}n(3n+1)$ ③ $\frac{1}{3}n(n+3)$

④ $n(2n-1)$ ⑤ $\frac{1}{2}n(n+1)$

해설

$a=2,\ d=5-2=3$이므로

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)\cdot d\}}{2}$ 에 대입하면

$$=\frac{n\{2\cdot 2+(n-1)\cdot 3\}}{2}$$

$$=\frac{n(4+3n-2)}{2}$$

$$=\frac{n(3n+1)}{2}$$

2. 다음 등비수열의 일반항 a_n은?

$16,\ -8,\ 4,\ -2, \cdots\cdots$

① $8(-2)^n$ ② $16(-2)^{n-1}$ ③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16이고 공비가 $-\frac{1}{2}$이므로 $a_n = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a+b+c+d$의 값은?(단, a, b, c, d는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$$a+b+c+d=9+6+4+36=55$$

4. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $a_n = \frac{n}{3}$, $b_n = 2^n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k)$ 의 값은?

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

해설

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = \sum_{k=1}^{5} \frac{k}{3} + \sum_{k=1}^{5} 2^k$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67$$

5. $\sqrt[3]{a\sqrt{a} \times \dfrac{a}{\sqrt[4]{a}}}$를 간단히 하면?

① $\sqrt[4]{a^3}$ ② $\sqrt[6]{a^5}$ ③ $\sqrt[13]{a^5}$ ④ $\sqrt[7]{a^8}$ ⑤ $\sqrt{a^5}$

해설

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$$
$$= \sqrt[3]{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$$
$$= \left(a^{1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$$

6. $x > y > 0$일 때, $\dfrac{x^y y^x}{y^y x^x}$를 간단히 하면?

① $(x-y)^{\frac{y}{x}}$ ② $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{x-y}$ ③ 1

④ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{y-x}$ ⑤ $(x-y)^{\frac{x}{y}}$

해설

$$x^{y-x} \cdot y^{x-y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$$

7. $a = 5 \times 729^x$ 일 때, 27^x을 a에 관한 식으로 나타내면?

① $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$　② $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$　③ $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

④ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$　⑤ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

해설

$$a = 5 \times 729^x = 5 \times (3^6)^x = 5 \times 3^{6x}$$

$$\frac{a}{5} = 3^{6x} = (3^{3x})^2$$

$$\therefore\ 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ 27^x = 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

8. $\frac{1}{2}\log_2 3 + 5\log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6}$의 값은?

① 0　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$　　④ 2　　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$\frac{1}{2}\log_2 3 + 5\log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6}$$
$$= \log_2 \sqrt{3} + \log_2 4\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6}$$
$$= \log_2 \frac{\sqrt{3} \times 4\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$
$$= \log_2 4$$
$$= 2$$

9. $3^{\log_3 \frac{4}{7} + \log_3 7}$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

$$3^{\log_3 \frac{4}{7} + \log_3 7} = 3^{\log_3 4} = 4$$

10. $\log_8 3 = p,\ \log_3 5 = q$일 때, $\log_{10} 5$를 $p,\ q$로 나타내면?

① pq　② $\frac{p-q}{3}$　③ $\frac{2pq}{p+q}$

④ $\frac{3pq}{1+3pq}$　⑤ $\sqrt{p^2+q^2}$

해설

$$\log_8 3 = \log_{2^3} 3 = \frac{1}{3}\log_2 3 = p$$

$$\therefore \log_2 3 = 3p$$

$$\log_{10} 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 10} = \frac{\log_3 5}{\log_3 5 + \log_3 2} = \frac{q}{q + \frac{1}{3p}}$$

$$= \frac{3pq}{3pq+1}$$

11. 등차수열을 이루는 세 수에 대하여 세 수의 합이 15이고, 제곱의 합은 91일 때, 세 수의 곱은?

① 85 ② 90 ③ 95 ④ 100 ⑤ 105

해설

세 수를 $5-d,\ 5,\ 5+d$라 할 수 있다.

$(5-d)^2+5^2+(5+d)^2=91$

$75+2d^2=91$

$2d^2=16$

$d=\pm 2\sqrt{2}$

(i) $d=2\sqrt{2}$일 때

세수 : $5-2\sqrt{2},\ 5,\ 5+2\sqrt{2}$

$\therefore (5-2\sqrt{2})\times 5\times(5+2\sqrt{2})$

$=(25-8)\times 5=17\times 5=85$

(ii) $d=-2\sqrt{2}$일 때

세 수 : $5+2\sqrt{2},\ 5,\ 5-2\sqrt{2}$

$\therefore (5+2\sqrt{2})\times 5\times(5-2\sqrt{2})$

$=(25-8)\times 5=85$

$\therefore 85$

12. 두 수 $\frac{1}{7}$과 $\frac{1}{3}$의 사이에 세 개의 수 x, y, z를 넣어 다섯 개의 수 $\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 이 순서로 조화수열을 이루도록 할 때, $60(x+y+z)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 조화수열을 이루려면 7, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, 3이 등차수열을 이루어야 하므로

$$\frac{1}{x}=6,\ \frac{1}{y}=5,\ \frac{1}{z}=4$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{5},\ z=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ 60(x+y+z)=60\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=60\cdot\frac{37}{60}=37$$

13. $a_1 = 1$, $a_{10} = 37$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 200

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10} - a_1 = a_1 + 9d - a_1 = 9d = 36 \quad \therefore d = 4$

이때, $a_{n+1} - a_n = d = 4$이므로

$(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$

$= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{100} - a_{99})$

$= 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 50 = 200$

14. 50과 100 사이의 자연수 중 3의 배수의 총합은?

① 1176 ② 1200 ③ 1225 ④ 1275 ⑤ 1300

해설

50 ~ 100사이의 3의 배수는
51에서 시작하여 99로 끝나는
공차가 3인 등차수열이므로

$$\frac{(33-17+1)(51+99)}{2}$$

$$= \frac{17 \cdot 150}{2} = 1275$$

15. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 6,\ a_5 = -2$일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d라 하면

$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore\ d = -2$

$\therefore\ a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$

이때, $a_n \geq 0$에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}| = a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$

$= 2 \cdot \dfrac{4(6+0)}{2} - \dfrac{20(6-32)}{2} (\because\ a_4 = 0,\ a_{20} = -32)$

$= 24 + 260 = 284$

16. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = 2n^2 - 25$으로 표시되는 수열 $\{a_n\}$의 음수인 항의 합은?

① -75　　② -76　　③ -77　　④ -78　　⑤ -79

해설

(i) $n \geq 2$일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - 25n) - \left\{2(n-1)^2 - 25(n-1)\right\} \\ &= 4n - 27 \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$일 때

$a_1 = S_1$ 이므로 $a_1 = -23$

(i), (ii)에서 $a_n = 4n - 27 \ (n \geq 1)$

한편, $a_n = 4n - 27 < 0$에서 $n < \dfrac{27}{4} = 6.75$

따라서 첫째항부터 제 6항까지가 음수인 항이므로 음수인 항의 합은

$$S_6 = \frac{6}{2}\left\{2 \times (-23) + (6-1) \times 4\right\} = -78$$

17. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여 $\dfrac{S_{3n}}{S_n}=7$일 때, $\dfrac{S_{2n}}{S_n}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a_1이라고 하면

$$\frac{S_{3n}}{S_n}=\frac{\dfrac{a_1(r^{3n}-1)}{r-1}}{\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}}=7,\ \frac{r^{3n}-1}{r^n-1}=7$$

$$\frac{(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r^n-1}=7,\ r^{2n}+r^n+1=7$$

$$(r^n)^2+r^n-6=0,\ (r^n+3)(r^n-2)=0$$

$$\therefore\ r^n=2(\because\ r>1)$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{\dfrac{a_1(r^{2n}-1)}{r-1}}{\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}}=\frac{r^{2n}-1}{r^n-1}$$

$$\frac{(r^n-1)(r^n+1)}{r^n-1}=r^n+1=3$$

18. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = S_n$이라 할 때, $a_1 = 1$, $S_n = a_{n+1} + n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$에서 a_{11}의 값은?

① $1 - 2^7$ ② $1 - 2^8$ ③ $1 - 2^9$

④ $1 - 2^{10}$ ⑤ $1 - 2^{11}$

해설

$S_n = a_{n+1} + n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = a_n + (n-1)(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면 $a_n = a_{n+1} - a_n + 1$

$\therefore\ a_{n+1} = 2a_n - 1(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$

양변에 -1을 더하여 정리하면 $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$

즉, 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $a_2 - 1$, 공비가 2인 등비수열 이므로

$a_n - 1 = (a_2 - 1) \cdot 2^{n-2}(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

$S_1 = a_2 + 1$이고, $S_1 = a_1 = 1$이므로 $a_2 = 0$

따라서, $a_n = 1 - 2^{n-2}(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$이므로

$a_{11} = 1 - 2^9$

19. 수열 $3,\ 33,\ 333,\ 3333,\ \cdots$ 의 일반항 a_n을 구하여라.

① $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$ ② $a_n = \frac{2}{3}(10^n - 1)$

③ $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 2)$ ④ $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 2)$

⑤ $a_n = \frac{2}{3}(10^n - 2)$

해설

수열 $9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ \cdots$ 에서

$9 = 10^1 - 1,\ 99 = 10^2 - 1,\ 999 = 10^3 - 1,\ 9999 = 10^4 - 1, \cdots$

따라서 이 수열의 일반항은 $10^n - 1$이다.

수열 $3,\ 33,\ 333,\ 3333,\ \cdots$ 의 각 항은

$3 = 9 \times \frac{1}{3},\ 33 = 99 \times \frac{1}{3},\ 333 = 999 \times \frac{1}{3},\ \cdots$ 이므로

주어진 수열의 일반항은 $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$이다.

20. $1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1$의 값은?

① 1310 ② 1320 ③ 1330 ④ 1340 ⑤ 1350

해설

$$1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1$$
$$= 1 \cdot (20-1) + 2 \cdot (20-2) + 3 \cdot (20-3) + \cdots + 19 \cdot (20-19)$$
$$= \sum_{k=1}^{19} k(20-k) = \sum_{k=1}^{19} (20k - k^2)$$
$$= 20 \times \frac{19 \cdot 20}{2} - \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6}$$
$$= 190(20-13) = 1330$$

21. $a_n = 2n^2 + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 인 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 250

해설

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= \left\{2(n+1)^2 + (n+1)\right\} - (2n^2 + n) \\ &= 4n + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} b_k &= \sum_{k=1}^{10} (4k+3) \\ &= 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 3 \cdot 10 \\ &= 250 \end{aligned}$$

22. 오른쪽 그림과 같이 수를 배열할 때 위에서 10 번째 행, 왼쪽에서 7번째 열의 수는?

1	2	4	7	11	$\cdots$
3	5	8	12		
6	9	13			
10	14				
15					
$\vdots$					

① 130 ② 138 ③ 142

④ 152 ⑤ 146

해설

각 행의 첫 번째 수로 만들어지는 수열을 $\{a_n\}$이라 하면

$$\{a_n\} : 1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad 15, \quad \cdots$$

$$\vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$$

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \cdots$$

$$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{n^2+n}{2}$$

각 행을 이루는 수열들을 살펴보면 모두 계차수열을 이루고, 제 10행은 각 항의 계차가 10, 11, 12, $\cdots$ 인 계차수열을 이룬다.

따라서 제10행의 첫 번째 수는

$$a_{10} = \frac{10^2+10}{2} = 55 \text{이고}$$

제10행의 7번째 열의 수는

$$55 + (10+11+12+13+14+15)$$

$$= 55 + \frac{6(10)+15)}{2} = 130$$

23. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 일 때, $30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$$
$$= a_{30} + (a_{30} - a_1) + (a_{30} - a_2) + \cdots + (a_{30} - a_{29})$$
$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \cdots + 30 \times \frac{1}{30} = 30$$

24. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의될 때, a_{10}의 값은?

$$a_1 = 4,\ a_2 = 6,\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

① $4\left(\frac{3}{2}\right)^8$ ② $4\left(\frac{3}{2}\right)^9$ ③ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$
④ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$ ⑤ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

해설

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$에서 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, $a_1 = 4$이고 공비 r은 $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{3}{2}$이므로

$$a_n = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{10} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^9$$

25. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + n^2(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$ 를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_1 = a_1 + 1^2 \\ & a_3 = a_2 + 2^2 \\ & a_4 = a_3 + 3^2 \\ & \quad\vdots \\ +) & a_{10} = a_9 + 9^2 \\ \hline \end{array}$$

$$a_{10} = a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2)$$

$$= 5 + \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6}$$

$$= 290$$

26. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$ 이 성립함을

수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{(가)}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{(가)}$$

$$=\boxed{(나)}$$

따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+1}$

② (가) : $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\frac{k+2}{2k+1}$

③ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k}{2k+3}$

④ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

⑤ (가) : $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

양변에 $\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$를 더하면

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$$

$$=\boxed{\frac{k+1}{2k+3}}$$

따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

27. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

> (i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
> (ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $2^k > k^2$
> 양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
> $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 -$ ㉡ > 0 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
> 따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n = 1,\ k^2$　　② $n = 1,\ (k+1)^2$

③ $n = 5,\ (k-1)^2$　　④ $n = 5,\ k^2$

⑤ $n = 5,\ (k+1)^2$

해설

(i) $n = 5$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
$k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore$ ㉠ $n = 5$, ㉡ $(k+1)^2$

28. 세 수 $\sqrt[3]{3^2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$ 중 가장 큰 수를 M, 가장 작은 수를 m이라 할 때, $\dfrac{M}{m}$의 값은?

① $2^{\frac{1}{12}}$ ② $3^{\frac{1}{6}}$ ③ $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

④ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$ ⑤ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

해설

$$\sqrt[3]{3^2\sqrt{2}} = 3^{\frac{2}{3}}2^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{4}{6}}2^{\frac{1}{6}} = (3^4\times 2)^{\frac{1}{6}} = 162^{\frac{1}{6}}$$
$$\sqrt{2}\sqrt[3]{3} = 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{6}}(3^2)^{\frac{1}{6}} = 72^{\frac{1}{6}}$$
$$\sqrt[3]{2}\sqrt{3} = 2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{6}}(3^3)^{\frac{1}{6}} = 108^{\frac{1}{6}}$$
$$\therefore \frac{M}{m} = \left(\frac{3^4\times 2}{2^3\times 3^2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

29. $\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 3 = 0.4771$을 이용하여 $\log_{10} 1.5$의 값을 계산하면?

① 0.0880 ② 0.0885 ③ 0.1660

④ 0.1761 ⑤ 0.1777

해설

$\log_{10} 1.5 = \log_{10}(3 \times 5 \div 10)$

$= \log 3 + (1 - \log 2) - 1$

$= 0.1761$

30. 다음 상용로그표를 이용하여 $\sqrt[6]{5}$의 값을 계산하면?

<상용로그표>

수	0	1	2	…	9	비례부분 1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1.2	.0792	.0828	.0864	…	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	.1139	.1173	.1206	…	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
⋮	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
2.0	.3010	.3032	.3054	…	.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	.3222	.3243	.3263	…	.3404	2	4	6	8	10	13	14	16	18

① 1.296 ② 1.302 ③ 1.308 ④ 1.313 ⑤ 1.321

해설

$$\log \sqrt[6]{5} = \frac{1}{6}\log 5 = \frac{1}{6}(1-\log 2)$$

$$= \frac{1}{6}(1-0.3010) = 0.1165$$

상용로그표에서 비례부분을 이용하여 계산하면

$\log 1.30 = 0.1139$

$\underline{\qquad 8 \leftarrow \qquad 26}$

$\log 1.308 = 0.1165$

$\therefore \sqrt[6]{5} = 1.308$

31. $\log x$의 정수 부분은 3이고, $\log x$, $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. $\log \sqrt{x}$의 정수 부분을 n, 소수 부분을 α라 할 때 $n+8\alpha$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\log x = 3+\beta\ (0 \le \beta < 1)$

$\log \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\log x = 1 + \frac{\beta}{3}$

$\therefore\ \beta + \frac{\beta}{3} = 1$

$\therefore\ \beta = \frac{3}{4}$

$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2}(3+\alpha) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

$n = 2,\ \alpha = \frac{1}{4}$

$n + 8\alpha = 2 + 2 = 4$

32. $[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots+[\log 20]$ 의 값은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$1 \le k < 10$ 일 때, $[\log_{10} k]=0$

$10 \le k < 100$ 일 때, $[\log_{10} k]=1$

$\therefore 0 \times 9 + 1 \times 11 = 11$

33. $\sum_{k=1}^{100} [\log_3 n]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

(i) $n = 1,\ 2$ 일 때, $0 \le \log_3 n < 1$이므로 $[\log_3 n] = 0$
(ii) $3 \le n < 9$ 일 때, $1 \le \log_3 n < 2$이므로 $[\log_3 n] = 1$
(iii) $9 \le n < 27$ 일 때, $2 \le \log_3 n < 3$이므로 $[\log_3 n] = 2$
(iv) $27 \le n < 81$ 일 때, $3 \le \log_3 n < 4$이므로 $[\log_3 n] = 3$
(v) $81 \le n < 100$ 일 때, $4 \le \log_3 n < 5$이므로 $[\log_3 n] = 4$
(i) ~ (v)로부터
$\sum_{k=1}^{100} [\log_3 n] = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 54 + 4 \cdot 20 = 284$