1. 제3항이 11, 제9항이 29인 등차수열의 20번째 항은?

① 60 ② 62 ③ 64 ④ 66 ⑤ 68

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3 = a + 2d = 11 \cdots$ ㉠

$a_9 = a + 8d = 29 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = 5,\ d = 3$

따라서 첫째항이 5, 공차가 3이므로 일반항 a_n은

$a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$

따라서 20번째 항은 $3 \times 20 + 2 = 62$

2. 세 수 $5-2x$, $4-x$, $6+3x$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$5-2x$, $4-x$, $6+3x$가 등차수열을 이루면 $4-x$가 등차중항이므로

$$4-x=\frac{(5-2x)+(6+3x)}{2}$$

$$2(4-x)=5-2x+6+3x$$

$$8-2x=11+x$$

$$-3x=3 \quad \therefore \ x=-1$$

3. 수열 $-3,\ a,\ b,\ c,\ 13$이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$a-(-3)=d$
$b-a=d$
$c-b=d$
$13-c=d$
좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리
더하면 $13-(-3)=4d \quad \therefore d=4$
$\therefore a=-3+4=1$
$b=1+4=5$
$c=5+4=9$
$\therefore a+b+c=15$

4. 각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 : a_3 = 4 : 9$이고, $a_2 = 4$일 때, a_5의 값은?

① $\frac{11}{2}$ ② 7 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{27}{2}$

해설

공비를 r이라고 하면

$a_1 : a_3 = a_1 : a_1 r^2 = 1 : r^2$이므로

$1 : r^2 = 4 : 9$에서

$r^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore \ r = \frac{3}{2}$

$a_2 = a_1 r = 4$에서 $\frac{3}{2} a_1 = 4 \quad \therefore \ a_1 = \frac{8}{3}$

$\therefore \ a_5 = a_1 r^4 = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{27}{2}$

5. 다음 식의 값은?

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)-\sum_{k=4}^{10}(k^2+k)$$

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

해설

(준 식)$=\sum_{k=1}^{3}(k^2+k)=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)=20$

6. $\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 470

해설

$\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2\right) - \sum_{k=1}^{10} k^2$
$= \sum_{k=1}^{15} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k^2$
$= \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 470$

7. $\sum_{k=3}^{10} k(k+2)$ 의 값은?

① 460 ② 468 ③ 478 ④ 480 ⑤ 484

해설

$\sum_{k=1}^{10} k(k+2) = \sum_{k=1}^{10} k(k+2) - \sum_{k=1}^{2} k(k+2)$
$= \sum_{k=1}^{10}(k^2+2k) - \sum_{k=1}^{2}(k^2+2k)$
$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2\sum_{k=1}^{10} k - (3+8)$
$= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 11$
$= 385 + 110 - 11$
$= 484$

8. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 29　② 31　③ 33　④ 35　⑤ 37

해설

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3$이므로
a_n은 초항이 4, 공차가 3인 등차수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 4 + (n-1)\cdot 3 \\ &= 4 + 3n - 3 \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$

$\therefore a_{10} = 31$

9. $a_1 = 1,\ a_2 = 3$ 이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① $9\log_3 2$　　② $10\log_3 2$　　③ $11\log_3 2$

④ 9　　⑤ 10

해설

$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

$a_1 = 1,\ r = \dfrac{a_2}{a_1} = 3$ 이므로

$a_{10} = 1 \cdot 3^{10-1} = 3^9$

$\therefore\ \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9\log_3 3 = 9$

10. $x > 0$, $x \neq 1$일 때, $\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[8]{x^k}$을 만족하는 자연수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2}\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$

11. $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{4}\times\sqrt[6]{6}=2^a\times3^b$ 일 때 $a+b$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

해설

$2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{\frac{1}{4}}\times(2\times3)^{\frac{1}{6}}$

$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$

$=2^{\frac{7}{6}}\times3^{\frac{1}{2}}$

$a=\frac{7}{6},\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{7+3}{6}=\frac{5}{3}$

12. $x = 2$ 일 때, $(x^x)^{x^x}$ 는?

① 16 ② 64 ③ 256

④ 1024 ⑤ 65536

해설

$(2^2)^{2^2} = (2^2)^4 = 2^{16}$

$2^{10} = 1024,\ 2^6 = 64$ 이므로

$\therefore\ 2^{16} = 1024 \times 64 = 65536$

13. $a = 4^3$ 일 때, 8^9 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

① a^2 ② $a^{\frac{5}{2}}$ ③ a^3 ④ $a^{\frac{7}{2}}$ ⑤ $a^{\frac{9}{2}}$

해설

$a = 4^3 = (2^2)^3 = 2^6 \quad \therefore\ 2 = a^{\frac{1}{6}}$

$8^9 = (2^3)^9 = 2^{27} = (a^{\frac{1}{6}})^{27} = a^{\frac{27}{6}} = a^{\frac{9}{2}}$

14. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$이 정의되기 위한 실수 x의 값의 범위를 구하면?

① $3 < x < 4$　　② $5 < x < 7$　　③ $-1 < x < 3$

④ $x > 0$　　⑤ $2 < x < 5$

해설

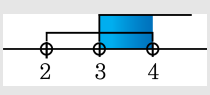
$x-3 \neq 1,\ x-3 > 0,$

$-x^2+6x-8 > 0$이므로

$x \neq 4,\ x > 3$

$x^2-6x+8 < 0$

$2 < x < 4$



$\therefore 3 < x < 4$

15. $\log(x-1)(x-2) = \log(x-1) + \log(x-2)$ 일 때, $|x-1| + |x-2|$를 간단히 하면?

① 3
② $2x$
③ $2-3x$ 또는 $3x-2$
④ $3-2x$
⑤ $2x-3$

해설

$x-1>0,\ x-2>0$이므로
$|x-1| + |x-2| = x-1+x-2 = 2x-3$

16. 10과 26 사이에 세 수 b_1, b_2, b_3를 넣었더니 10, b_1, b_2, b_3, 26의 순서로 등차수열을 이루었다. 이때, b_2의 값은?

① 18　　② 19　　③ 20　　④ 21　　⑤ 22

해설

10, b_1, b_2, b_3, 26이 순서대로 등차수열을 이루므로 10, b_2, 26도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$\therefore\ 10 + 26 = 2b_2 \quad \therefore\ b_2 = 18$

17. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_4 + a_7 + a_{10} = 11$, $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 20$ 일 때, a_{50}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$a_n = a + (n-1)d$라고 하면

$a_4 + a_7 + a_{10} = 3a + 18d = 11$

$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 5a + 35d = 20$

$\therefore\ a = \frac{5}{3},\ d = \frac{1}{3}$

$\therefore\ a_{50} = 18$

18. 세 수 a, 8, b가 이 순서대로 등비수열을 이루고 $a+b=17$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

세 수 a, 8, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $ab=8^2=64$
또, 조건에서 $a+b=17$이므로
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=17^2-2\cdot 64=161$

19. 수열 $a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$ 의 합은? (단, $r \neq 0$)

① $\dfrac{2a+4r^n}{r}$

② $\dfrac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{r}$

③ $\dfrac{a(1+r)+(1+r)^n}{r}$

④ $\dfrac{a(1+r)\left\{(1+r)^{2n}-1\right\}}{r}$

⑤ $\dfrac{a(1+r)-r^n+2}{r}$

해설

첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$, 항수가 n 인 등비수열의 합이므로 $1+r \neq 1$ 즉, $r \neq 0$ 일 때,

$$S=\frac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{(1+r)-1}$$

$$=\frac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{r}$$

20. $a_1 = 1$이고, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 m이 짝수일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{m-1} = 85$, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots a_m = 170$이다. 이때, $r + m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$m = 2k$(k는 자연수) 라고 하자.

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$은 공비가 r^2인 등비수열이므로

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$

$= \dfrac{a_1(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = \dfrac{r^{2k} - 1}{r^2 - 1} = 85 \cdots$ ㉠

$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k}$

$= \dfrac{a_2(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = 170 \cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r = 2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2^{2k} - 1}{3} = 85,\ 2^{2k} = 256 = 2^8$

따라서 $2k = m = 8$

$r + m = 10$

21. 1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 할 때, $\frac{S}{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 132

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 이므로
1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 하면
$(1+2+3+\cdots+10)^2 = (1^2+2^2+\cdots+10^2)+2S$

$$2S = \left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2 - \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 2640$$

$\therefore S = 1320$

$\therefore \frac{S}{10} = 132$

22. 수열의 합 $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$ 의 값은?

① $\frac{n(n-3)}{(n+1)(n+2)}$
② $\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$
③ $\frac{n(n+6)}{3(n+1)(n+2)}$
④ $\frac{2n(n+3)}{(n+1)(n+3)}$
⑤ $\frac{n(n+1)}{4(n+1)(n+2)}$

해설

$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 이므로

(준식)$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}$

$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \cdots$

$+ \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$

23. 수열 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, $\cdots$ 에서 첫째항부터 제 100항까지의 합은?

① 930 ② 945 ③ 950 ④ 955 ⑤ 960

해설

(1), (2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), $\cdots$ 와 같이 같은 수끼리 묶으면 군수열이 만들어지고, 제 n군의 항수는 n이므로 100번째 항은

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} < 100$

에서 $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$이므로 제 14군의 9항이다.

그리고 제 n군까지의 합을 구해 보면

$1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \cdots n \times n$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

첫째항부터 제 100항까지의 합 S_{100}은 제 13군까지의 합에 14를 9개 더한 값이 된다.

$\therefore S_{100} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 14 \cdot 9 = 945$

24. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$을 만족할 때, 일반항 a_n을 구하면?

① 2^{n-1} ② 3^{n-1} ③ 4^{n-1} ④ 5^{n-1} ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$에서
$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
$a_{n+1} - a_n = b_n$으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$
이때, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 3인 등비수열이고,
$b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$이므로
$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이므로
$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$
$= 1 + \dfrac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$

25. $a_1 = 3,\ a_2 = \frac{3}{7},\ \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n < \frac{1}{50}$을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$은 등차수열을 이룬다. 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 공차를 d라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항 $\frac{1}{a_n}$은

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1)\cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$

$\therefore\ a_n = \frac{3}{6n-5}$

$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50}$에서 $n \geq 25.\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 26이다.