

1. $5^a = 2$, $5^b = 3$ 이라 할 때, $\log_6 72$ 를 a 와 b 의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{a+b}{a-b}$
④ $\frac{2a+b}{a+b}$

② $\frac{2a+b}{b-a}$
⑤ $\frac{3a+2b}{a+b}$

③ $\frac{2a-b}{a+b}$

해설

$$a = \log_5 2, b = \log_5 3$$

$$\log_6 72 = \frac{3 \log_5 2 + 2 \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{3a + 2b}{a + b}$$

2. 다음 중 계산 결과가 다른 하나는?

① $9^{\log_9 4}$

② $\log \sqrt{5} 25$

③ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$

④ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

⑤ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16$

해설

① $9^{\log_9 4} = 4$

② $\log \sqrt{5} 25 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = 4$

③ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{2^{-1}} 2^{-4} = \frac{-4}{-1} \log_2 2 = 4$

④ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = \frac{4}{-1} \log_3 3 = -4$

⑤ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16$
 $= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 5}$
 $= \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 2} = \log_2 16 = \log_2 2^4$
 $= 4 \log_2 2 = 4$

3. a, x, y 가 양의 실수이고 $A = \log_a \frac{x^2}{y^3}$, $B = \log_a \frac{y^2}{x^3}$ 일 때, $3A + 2B$ 와 같은 것은? (단, $a \neq 1$)

① $\log_a \frac{1}{x^5}$

② $\log_a \frac{1}{y^5}$

③ $\log_a \frac{1}{xy}$

④ $\log_a \frac{x^5}{y^5}$

⑤ $\log_a \frac{x^5}{y^7}$

해설

$$\begin{aligned} 3A + 2B &= 3(2 \log_a x - 3 \log_a y) + 2(2 \log_a y - 3 \log_a x) \\ &= -5 \log_a y = \log_a \frac{1}{y^5} \end{aligned}$$

4. $\frac{1}{2} \log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$ 일 때, $a + 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$$

$$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$$

5. $\log_2 \sqrt{7 + \sqrt{24}}$ 의 소수 부분을 x 라 할때, 2^{x+1} 의 값을 구하면?

- ① $\sqrt{3} + 1$ ② $\sqrt{5} + 1$ ③ $\sqrt{6} + 1$
④ $\sqrt{7} + 1$ ⑤ $2\sqrt{2} + 1$

해설

$$\begin{aligned} & \log_2 \sqrt{7 + \sqrt{24}} \\ &= \log_2 \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} \\ &= \log_2 (\sqrt{6} + 1) \\ &= \log_2 (3 \times \times \times) \\ &= 1. \times \times \times \\ & \text{따라서, } x = \log_2 (\sqrt{6} + 1) - 1 \\ & 2^{x+1} = 2^{\log_2 (\sqrt{6} + 1)} = \sqrt{6} + 1 \end{aligned}$$

6. $\log_5 250 = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$) 라고 할 때, $n \times 25^\alpha$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$125 < 250 < 625$ 이므로

$\log_5 5^3 < \log_5 250 < \log_5 5^4$

$\log_5 250$ 의 정수부분은 $n = 3$ 이고

소수부분은 $\alpha = \log_5 250 - \log_5 125 = \log_5 \frac{250}{125} = \log_5 2$

따라서 $25^\alpha = 25^{\log_5 2} = 4$ 이므로 25^α 의 값과 정수부분 n 의 곱은 $3 \times 4 = 12$ 이다.

7. $\log_2 14$ 의 소수부분을 $a(0 \leq a < 1)$ 이라 할 때, 2^{a+2} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\log_2 14 = 1 + \log_2 7$$

$$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$$

$$2 < \log_2 n < 3$$

$$\text{정수 부분 : } 1 + 2 = 3$$

$$\text{소수 부분 : } \log_2 14 - 3 = \log_2 \frac{14}{8} = a$$

$$a + 2 = a + \log_2 4$$

$$= \log_2 \frac{14}{8} \cdot 4 = \log_2 \frac{14}{2} = \log_2 7$$

$$2^{a+2} = 2^{\log_2 7} = 7$$

8. $m = \log_a \alpha$, $n = \log_a \beta$ 일 때, $a^{\frac{m-n}{2}}$ 을 α , β 에 관한 식으로 나타내면?
(단, $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$)

① $\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{2}}$

② $\frac{\alpha - \beta}{2}$

③ $\alpha^2 - \beta^2$

④ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

⑤ $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

해설

$m = \log_a \alpha$, $n = \log_a \beta$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$a^m = \alpha, a^n = \beta$$

$$\therefore a^{\frac{m-n}{2}} = \sqrt{a^{m-n}} = \sqrt{\frac{a^m}{a^n}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

9. $\log_2 3 = a$, $\log_3 7 = b$ 일 때, $\log_{36} 42$ 를 a , b 로 나타내면?

- ① $\frac{1+a+ab}{1+a}$ ② $\frac{1+a+2ab}{1+a}$ ③ $\frac{1+2a+ab}{2+a}$
④ $\frac{1+a+ab}{2(1+a)}$ ⑤ $\frac{2+a+2ab}{2(1+a)}$

해설

로그의 밑을 3으로 통일시키면

$$\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{a}, \log_3 7 = b$$

$$\log_{36} 42 = \frac{\log_3 42}{\log_3 36} = \frac{\log_3 (2 \times 3 \times 7)}{\log_3 (2^2 \times 3^2)}$$

$$= \frac{\log_3 2 + 1 + \log_3 7}{2 \log_3 2 + 2}$$

$$\frac{\frac{1}{a} + 1 + b}{2 \cdot \frac{1}{a} + 2} = \frac{1+a+ab}{2(1+a)}$$

10. $10^a = 2$, $10^b = 3$ 일 때, $\log_{15} 10$ 을 a, b 로 나타내면?

① $\frac{1}{a+b+1}$

② $\frac{1}{a-b+1}$

③ $\frac{1}{a+b-1}$

④ $\frac{1}{b-a+1}$

⑤ $\frac{1}{b-a-1}$

해설

$10^a = 2$, $10^b = 3$ 에서 $a = \log_{10} 2$, $b = \log_{10} 3$

$$\log_{15} 10 = \frac{1}{\log_{10} 15}$$

한편, $\log_{10} 15 = \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2}$

$$= \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2 = b - a + 1$$

$$\therefore \log_{15} 10 = \frac{1}{b-a+1}$$

11. $2^a = 20^b = 10^{10}$ 일 때, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{4}$

③ $-\frac{1}{6}$

④ $-\frac{1}{8}$

⑤ $-\frac{1}{10}$

해설

$$a = \frac{10}{\log 2}, \quad b = \frac{10}{1 + \log_2}$$

$$\therefore \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{\log 2}{10} - \frac{1 + \log 2}{10} = -\frac{1}{10}$$

12. $2^x = a$, $2^y = b$ 일 때, $\log_{2ab} a^3 b^2$ 을 x , y 로 나타내면?

- ① $\frac{3x+2y}{1+x+y}$ ② $\frac{2x+3y}{2+x+y}$ ③ $\frac{2+x+y}{3x+2y}$
④ $\frac{x^2 y^2}{4xy}$ ⑤ $\frac{4xy}{x^3 y^2}$

해설

$$\begin{aligned} 2^x = a, 2^y = b \text{ 이므로} \\ \log_{2ab} a^3 b^3 &= \log_{2 \cdot 2^x \cdot 2^y} (2^x)^3 \cdot (2^y)^2 \\ &= \log_{2^{1+x+y}} 2^{3x+2y} \\ &= \frac{3x+2y}{1+x+y} \log_2 2 = \frac{3x+2y}{1+x+y} \end{aligned}$$

13. $A = (\log_3 9)(\log_4 9 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3})$, $B = (\log_{\sqrt{3}} 5 + \log_9 5)(\log_5 64 + \log_{25} 8)$

일 때, AB 의 값은?

- ① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{74}{5}$ ③ $\frac{49}{3}$ ④ 67 ⑤ 75

해설

$$\begin{aligned} A &= (\log_3 9)(\log_4 9 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}) \\ &= (\log_3 3^2)(\log_4 3^2 + \log_{2^{-1}} 3^{-1}) \\ &= (2 \log_3 3^2)(\frac{2}{2} \log_2 3 + \frac{-1}{-1} \log_2 3) \\ &= 2(\log_2 3 + \log_2 3) = 2 \cdot \log_2 3 = 4 \log_2 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (\log_{\sqrt{3}} 5 + \log_9 5)(\log_5 64 + \log_{25} 8) \\ &= (\log_{3^{\frac{1}{2}}} 5 + \log_{3^2} 5)(\log_5 2^6 + \log_{5^2} 2^3) \\ &= (2 \log_3 5 + \frac{1}{2} \log_3 5)(6 \log_5 2 + \frac{3}{2} \log_5 2) \\ &= \frac{5}{2} \log_3 5 \cdot \frac{15}{2} \log_5 2 \\ &= \frac{75}{4} \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2 \\ &= \frac{75}{4} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5} \\ &= \frac{75}{4} \cdot \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{75}{4} \log_3 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &= 4 \log_2 3 \cdot \frac{75}{4} \log_3 2 \\ &= 4 \cdot \frac{75}{4} \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 75 \end{aligned}$$

14. $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면
 $\log(a-2b)^2 = \log 2b(62b-a)$
 $(a-2b)^2 = 2b(62b-a)$
 $a^2 - 4ab + 4b^2 = 124b^2 - 2ab$
 $a^2 - 2ab - 120b^2 = 0$
 $(a+10b)(a-12b) = 0$
 $\therefore a = -10b$ 또는 $a = 12b$
이때 진수 조건에 의하여 $a-2b > 0$, $2b > 0$, $62b-a > 0$ 이므로
 $a > 0$, $b > 0$
따라서 $a = 12b$ 이고 $\frac{a}{b} = 12$ 이다.

15. 이차방정식 $2x^2 - 8x + 1 = 0$ 의 두 근이 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 일 때, $\log_\alpha 2 + \log_\beta 2 + \log_{\alpha\beta} 2$ 의 값은?

- ① $\frac{19}{4}$ ② $\frac{23}{4}$ ③ $\frac{27}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 4$, $\log_2 \alpha \cdot \log_2 \beta = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\log_\alpha 2 + \log_\beta 2 &= \frac{1}{\log_2 \alpha} + \frac{1}{\log_2 \beta} \\ &= \frac{\log_2 \alpha + \log_2 \beta}{\log_2 \alpha \cdot \log_2 \beta} \\ &= \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8\end{aligned}$$

$\log_2 \alpha\beta = 4$ 이므로 $\alpha\beta = 2^4$

$$\therefore \log_{\alpha\beta} 2 = \log_{2^4} 2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \log_\alpha 2 + \log_\beta 2 + \log_{\alpha\beta} 2 = 8 + \frac{1}{4} = \frac{33}{4}$$

16. $\log_2 6$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라고 할 때, $\frac{2^{x+y} - 2^{x-y}}{2^x + 2^y}$ 의 값은?

- ① $\frac{4}{39}$ ② $\frac{9}{43}$ ③ $\frac{19}{69}$ ④ $\frac{23}{73}$ ⑤ $\frac{20}{33}$

해설

$$\log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8 \text{ 이므로 } 2 < \log_2 6 < 3$$

$$\text{따라서 } x = 2, y = \log_2 6 - 2 = \log_2 \frac{6}{4} = \log_2 \frac{3}{2}$$

$$2^x = 2^2 = 4, 2^y = 2^{\log_2 \frac{3}{2}} = \frac{3}{2}, 2^{-y} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2^{x+y} - 2^{x-y}}{2^x + 2^y} = \frac{2^x \cdot 2^y - 2^x \cdot 2^{-y}}{2^x + 2^y}$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot \frac{2}{3}}{4 + \frac{3}{2}} = \frac{20}{33}$$

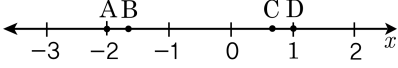
17. $\log_{10} 91000 = a$, $\log_{10} 0.0011 = b$ 라 할 때, $\log_{10} \frac{91}{11}$ 을 a , b 로 나타내면?

- ① $-a + b + 7$ ② $a - b - 7$ ③ $a - b + 1$
④ $\frac{b+4}{a-3}$ ⑤ $\frac{a-3}{b+4}$

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 91000 &= 3 + \log_{10} 91 = a \\ \therefore \log_{10} 91 &= a - 3 \\ \log_{10} 0.0011 &= -4 + \log_{10} 11 = b \\ \therefore \log_{10} 11 &= b + 4 \\ \therefore \log_{10} \frac{91}{11} &= \log_{10} 91 - \log_{10} 11 \\ &= a - 3 - (b + 4) = a - b - 7\end{aligned}$$

18. 다음 그림과 같이 수직선 위에 네 점 $A(-2)$, $B(\log a)$, $C(\log b)$, $D(1)$ 이 있다.



$-2 < \log a < -1$, $0 < \log b < 1$, $\overline{AB} = \overline{CD}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $a + b = 1$ ② $\frac{b}{a} = \frac{1}{10}$ ③ $\frac{b}{a} = 10$
 ④ $ab = \frac{1}{10}$ ⑤ $ab = 10$

해설

$\overline{AB} = \overline{CD}$ 이므로 $\log a + 2 = 1 - \log b$
 $\log a + \log b = \log ab = -1$
 $ab = \frac{1}{10}$

19. a, b, p, q 가 1이 아닌 양수일 때,
 $\log_a p + \log_b q = 2$, $\log_p a + \log_q b = -1$ 이 성립한다.
 $(\log_a p)^2 + (\log_b q)^2$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$\log_a p = A$, $\log_b q = B$ 라 하면

$$A + B = 2$$

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = -1$$

$$\frac{A+B}{AB} = -1$$

$$\frac{2}{AB} = -1$$

$$\therefore AB = -2$$

$$A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB$$

$$= 4 - 2 \cdot (-2)$$

$$= 4 + 4 = 8$$

20. $x = \log_4 28$ 에 가장 가까운 정수를 y 라 할 때, $2^x + 2^y$ 의 값은?

① 32

② $\sqrt{30}$

③ $4 + 2\sqrt{7}$

④ 24

⑤ 28

해설

$$x = \log_4 28 = \log_4 4 \cdot 7 = 1 + \log_4 7$$

$$\log_4 4 < \log_4 7 < \log_4 16$$

$$y = 1 + 1 = 2$$

$$2^x + 2^y = 2^{\log_4 28} + 2^2 = 28^{\log_4 2} + 4$$

$$= 28^{\frac{1}{2}} + 4$$

$$= 2\sqrt{7} + 4$$

21. $\log 43.1 = 1.3645$ 일 때,
 $a = \log 4310$, $\log b = -1.3655$ 라 하면, $a + 100b$ 의 값은?

① 2.9745

② 4.0665

③ 7.9445

④ 3.1932

⑤ 5.5913

해설

$$\begin{aligned} a &= \log 4310 = \log 43.1 \times 100 \\ &= \log 43.1 + 2 = 3.6345 \\ \log b &= -1.3655 = -3 + 1.6345 \\ &= \log_{10} 10^{-3} + \log 43.1 \\ &= \log 0.0431 \\ b &= 0.0431 \\ a + 100b &= 3.6345 + 4.31 \\ &= 7.9445 \end{aligned}$$

22. $\triangle ABC$ 의 세 변 a, b, c 에 대하여
 $\log_{(a+b)} c + \log_{(a-b)} c = 2\log_{(a+b)} c \cdot \log_{(a-b)} c$ 와 같은 관계가 성립할
때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가? (단, $a > b, c \neq 1$)
- ① 정삼각형
 - ② $b = c$ 인 이등변삼각형
 - ③ $a = c$ 인 이등변 삼각형
 - ④ a 를 빗변으로 하는 직각삼각형
 - ⑤ b 를 빗변으로 하는 직각삼각형

해설

밑의 변환 공식을 이용하면

$$\frac{1}{\log_c(a+b)} + \frac{1}{\log_c(a-b)} \\ = \frac{2}{\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)}$$

양변에 $\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)$ 를 곱하면

$$\log_c(a-b) + \log_c(a+b) = 2\log_c c$$

$$\log_c(a-b)(a+b) = \log_c c^2$$

로그의 정의에 의해

$$(a-b)(a+b) = c^2, a^2 - b^2 = c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 a 를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

23. 이차방정식 $x^2 - 4x - c = 0$ 의 두 근이 $\log_5 \alpha$, $\log_5 \beta$ 일 때, $\log_\alpha \alpha \beta^3 + \log_\beta \alpha^3 \beta$ 의 값은?

① -28 ② -12 ③ -4 ④ 6 ⑤ 8

해설

근과 계수의 관계에 의해

$$\log_5 \alpha + \log_5 \beta = 4, \quad \log_5 \alpha \cdot \log_5 \beta = -2$$

$$\log_\alpha \alpha + \log_\alpha \beta^3 + \log_\beta \alpha^3 + \log_\beta \beta$$

$$= 3 \log_\alpha \beta + 3 \log_\beta \alpha + 2$$

$$= 3(\log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha) + 2$$

$$= 3 \left(\frac{\log_5 \beta}{\log_5 \alpha} + \frac{\log_5 \alpha}{\log_5 \beta} \right) + 2$$

$$= 3 \left\{ \frac{(\log_5 \alpha)^2 + (\log_5 \beta)^2}{\log_5 \alpha \cdot \log_5 \beta} \right\} + 2$$

$$= 3 \left\{ \frac{(\log_5 \alpha + \log_5 \beta)^2 - 2 \cdot \log_5 \alpha \cdot \log_5 \beta}{\log_5 \alpha \cdot \log_5 \beta} \right\} + 2$$

$$= 3 \left\{ \frac{4^2 - 2 \cdot (-2)}{(-2)} \right\} + 2 = -28$$

24. 이차방정식 $x^2 + ax + 6 = 0$ 의 두 근 α, β 의 두 근 $\alpha, \beta (0 < \alpha < \beta)$ 에 대하여 $b = \beta - \alpha$ 라 할 때, $\log_b \alpha^{\frac{1}{3}} + \log_b \beta^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$ 이다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

이차방정식 $x^2 + ax + 6 = 0$ 의 두 근이 $\alpha, \beta (0 < \alpha < \beta)$ 이므로
 $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 6$
 $\log_b \alpha^{\frac{1}{3}} + \log_b \beta^{\frac{1}{3}} = \log_b (\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}$
 $= \frac{1}{3} \log_b 6 = \frac{2}{3}$ 에서
 $\log_b 6 = 2$ 이므로 $b^2 = 6$
 $b^2 = (\beta - \alpha)^2$
 $= (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 24 = 6$
 $\therefore a^2 = 30$
 $\therefore a^2 + b^2 = 36$

25. 이차방정식 $3x^2 - 8x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $P = \log_{\sqrt{10}}(3\alpha^2 - 7\alpha + 3) + \log_{\sqrt{10}}(3\beta^2 - 7\beta + 3)$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}(1 - \log 3)$

③ $\frac{1}{2}(1 + \log 3)$

④ 1

⑤ $\log 3 \sqrt{2}$

해설

α, β 가 방정식 $3x^2 - 8x + 2 = 0$ 의 두 근이므로

$$3\alpha^2 - 8\alpha + 2 = 0, \quad 3\beta^2 - 8\beta + 2 = 0$$

$$3\alpha^2 - 7\alpha + 3 = \alpha + 1, \quad 3\beta^2 - 7\beta + 3 = \beta + 1$$

$$\therefore P = \log_{\sqrt{10}}(\alpha + 1) + \log_{\sqrt{10}}(\beta + 1)$$

$$= \log_{\sqrt{10}}(\alpha + 1)(\beta + 1)$$

$$= \log_{\sqrt{10}}(\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)$$

한편, $\alpha + \beta = \frac{8}{3}, \alpha\beta = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} + 1 = \frac{13}{3}$$

$$\therefore P = \log_{\sqrt{10}} \frac{13}{3} = 2 \log_{10} \frac{13}{3}$$

26. X 에 대한 이차방정식 $X^2-5X+5=0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta(\alpha>\beta)$, $a=\alpha-\beta$ 라 할 때, $\log_a \alpha + \log_a \beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 5 & \alpha \beta &= 5 \\ a = \alpha - \beta &= \sqrt{5^2 - 4 \cdot 5} = \sqrt{5} \\ \log_a \alpha + \log_a \beta &= \log_a \alpha \beta = \log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \end{aligned}$$

27. 무게가 $2^{30}g$ 인 물건이 있다. 이 물건의 무게를 $1g, 10g, 10^2g, \dots$ 등의 추를 사용하여 측정하고자 한다. 사용하고자 하는 추의 개수를 최소로 할 때, 사용되는 가장 무거운 추의 무게를 구하면? (단 $\log 2 = 0.3010$)

① 10^7g ② 10^8g ③ 10^9g ④ $10^{10}g$ ⑤ $10^{11}g$

해설

$$\log 2^{30} = 30 \log 2 = 9.030$$

따라서 $9 < \log 2^{30} < 10$ 즉, $10^9 < 2^{30} < 10^{10}$

따라서 가장 무거운 추의 무게는 10^9g 이다.

28. 세 수 $A = 3^{\log_3 9 - \log_3 3}$, $B = \log_3 5 + \log_3 4$, $C = \log_4 2 + \log_3 3$ 의
대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$

② $A < C < B$

③ $B < A < C$

④ $B < C < A$

⑤ $C < B < A$

해설

$$A = 3^{\log_3 9 - \log_3 3} = 3^{2-1} = 3$$

$$B = \log_3 5 + \log_3 4 = \log_3 20$$

이때, $\log_3 9 < \log_3 20 < \log_3 27$ 이므로 $2 < \log_3 20 < 3$

$$C = \log_4 2 + \log_3 3 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore C < B < A$$

29. 세 종류의 박테리아 A, B, C 는 시간 당 일정한 비율로 증식하며, 각각의 개체 수는 1시간마다 각각 a 배, b 배, c 배로 된다고 한다. A 의 수는 2시간마다 2배, B 의 수는 3시간마다 3배, C 의 수는 4시간마다 5배가 되었다고 할 때, a, b, c 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < a < c$
④ $b < c < a$ ⑤ $c < a < b$

해설

$a^2 = 2, b^3 = 3, c^4 = 5$ 이므로
 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt[3]{3}, c = \sqrt[4]{5}$
12제곱하여 비교하면
 $(\sqrt{2})^{12} = 2^6 = 64, (\sqrt[3]{3})^{12} = 3^4 = 81,$
 $(\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125$
 $\therefore \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5} \therefore a < b < c$

30. 다음 세 실수 $A = \log_2 12 - \log_2 3$, $B = \frac{2\log_3 3\sqrt{3}}{\log_2 4}$, $C = 6^{2\log_6 \sqrt{3}}$ 의

대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

로그의 성질을 이용하여 세 수를 간단히 한 후 비교한다.

$$A = \log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$$

$$B = \frac{2\log_3 3\sqrt{3}}{\log_2 4} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} \log_3 3}{2\log_2 2} = \frac{3}{2}$$

$$C = 6^{2\log_6 \sqrt{3}} = 6^{\log_6 3} = 3^{\log_6 6} = 3$$

$$\therefore B < A < C$$

31. $\log_3 375$ 의 소수 부분을 a 라 할 때, $\left[5^a + \frac{1}{5^a}\right]$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} \log_5 125 < \log_3 375 < \log_5 625 &\text{이므로} \\ 3 < \log_5 375 < 4 \\ \therefore a = \log_5 375 - 3 = \log_5 375 - \log_5 125 \\ &= \log_5 \frac{375}{125} = \log_5 3 \\ \left[5^a + \frac{1}{5^a}\right] &= \left[5^{\log_5 3} + \frac{1}{5^{\log_5 3}}\right] \left[3 + \frac{1}{3}\right] = 3 \end{aligned}$$

32. $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$ 일 때, $\log_3 10$ 을 a , b 로 나타내면?

① $\frac{ab - 2a - 3b + 5}{2b - 1}$
 ③ $\frac{2ab + 2a - 7b + 3}{2b - 1}$
 ⑤ $\frac{ab - a - 3b + 3}{2b - 3}$

② $\frac{ab - a - 3b + 3}{2b - 1}$
 ④ $\frac{3ab + 2a - 3b + 5}{2b - 1}$

해설

로그의 밑을 모두 3으로 통일시키면

$$\log_6 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 6} = \frac{\log_3 (3 \times 5)}{\log_3 (2 \times 3)} = \frac{\log_3 3 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3} = \frac{1 + \log_3 5}{\log_3 2 + 1} = a \cdots \textcircled{A}$$

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 12} = \frac{\log_3 (2 \times 3^2)}{\log_3 (2^2 \times 3)} = \frac{\log_3 2 + \log_3 3^2}{\log_3 2^2 + \log_3 3} = \frac{\log_3 2 + 2}{2 \log_3 2 + 1} = b \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \text{에서 } b(2 \log_3 2 + 1) = \log_3 2 + 2$$

$$2b \log_3 2 + b = \log_3 2 + 2$$

$$(2b - 1) \log_3 2 = 2 - b$$

$$\therefore \log_3 2 = \frac{2 - b}{2b - 1} \cdots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } a(\log_3 2 + 1) = 1 + \log_3 5$$

$$\log_3 5 = a \log_3 2 + a - 1$$

위의 식에 $\textcircled{C}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \log_3 5 &= \frac{a(2 - b)}{2b - 1} + a - 1 \\ &= \frac{a(2 - b) + (a - 1)(2b - 1)}{2b - 1} \\ &= \frac{2a - ab + 2ab - a - 2b + 1}{2b - 1} \\ &= \frac{ab + a - 2b + 1}{2b - 1} \end{aligned}$$

$$\therefore \log_3 10 = \log_3 (2 \times 5) = \log_3 2 + \log_3 5$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 - b}{2b - 1} + \frac{ab + a - 2b + 1}{2b - 1} \\ &= \frac{ab + a - 3b + 3}{2b - 1} \end{aligned}$$

33. 1이 아닌 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a^2 = b^3 = c^5 = k$ 를 만족하는 k 의 값들 중 최소인 수를 p 라 할 때, $\log_{16} p = \frac{b}{a}$ (단, a, b 는 서로소)이다. 이때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

2, 3, 5의 최소공배수가 30이므로

$$k = 2^{30}, 3^{30}, 4^{30}, \dots$$

따라서, k 의 최소값은 2^{30} 이므로 $p = 2^{30}$ 이다.

$$\log_{16} 2^{30} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

$$\therefore a + b = 17$$

34. 1이 아닌 양수 a, b, c 가 다음 두 조건을 만족한다.

$$\textcircled{\text{㉠}} \log_a b + \log_b c + \log_c a = 4$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \log_b a + \log_c b + \log_a c = -3$$

이 때, $(\log_a b)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c a)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$\log_a b = \alpha, \log_b c = \beta, \log_c a = \gamma$ 라 하면

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a = \alpha + \beta + \gamma = 4 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$\log_b a + \log_c b + \log_a c = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -3 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉡}}\text{에서 } \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -3 \text{ 이고}$$

$$\alpha\beta\gamma = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1 \text{ 이므로}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3$$

$$\therefore (\log_a b)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c a)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 22$$

35. 세 양수 a, b, c 에 대하여
 $a^x = (\sqrt{b})^y = (\sqrt[3]{c})^z = 125, abc = 5 \sqrt[5]{5}$
가 성립할 때, $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{18}{5}$ ⑤ $\frac{24}{5}$

해설

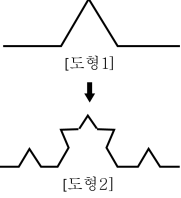
$$\begin{aligned} a^x &= b^{\frac{y}{2}} = c^{\frac{z}{3}} = 5^3 \text{ 이므로} \\ a^x &= 5^3 \text{ 에서 } x = \log_a 5^3 = 3 \log_a 5 \\ \therefore \frac{1}{x} &= \frac{1}{3} \log_5 a \\ b^{\frac{y}{2}} &= 5^3 \text{ 에서 } \frac{y}{2} = \log_b 5^3 = 3 \log_b 5 \\ \therefore \frac{2}{y} &= \frac{1}{3} \log_5 b \\ c^{\frac{z}{3}} &= 5^3 \text{ 에서 } \frac{z}{3} = \log_c 5^3 = 3 \log_c 5 \\ \therefore \frac{3}{z} &= \frac{1}{3} \log_5 c \\ \therefore \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} &= \frac{1}{3} \log_5 a + \frac{1}{3} \log_5 b + \frac{1}{3} \log_5 c \\ &= \frac{1}{3} (\log_5 a + \log_5 b + \log_5 c) \\ &= \frac{1}{3} \log_5 abc \\ &= \frac{1}{3} \log_5 5^{\frac{6}{5}} (\because abc = 5 \sqrt[5]{5} = 5^{\frac{6}{5}}) \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

36. 다음은 도형의 차원에 대한 설명이다.

선분을 2등분하면 2개의 선분으로 나누어지고 3등분하면 3개로 나누어진다. 이것을 각각 $2 = 2^1$, $3 = 3^1$ 로 나타낼 수 있으므로 선분의 차원은 1차원이다. 정사각형의 각 변을 2등분하면 정사각형 4개로 나누어지고 3등분하면 9개로 나누어진다. 이것을 각각 $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ 로 나타낼 수 있으므로 정사각형의 차원은 2차원이다. 정육면체의 각 변을 2등분하면 정육면체 8개로 나누어지고 3등분하면 27개로 나누어진다. 이것을 각각 $8 = 2^3$, $27 = 3^3$ 로 나타낼 수 있으므로 정육면체의 차원은 3차원이다. 일반적으로 어떤 도형을 x 등분하여 같은 모양 y 개로 나뉘질 때, $y = x^a$ 의 관계가 성립하면 a 를 그 도형의 차원이라고 한다.

오른쪽 그림은 [도형1]을 이용하여 같은 모양으로

이루어진 [도형2]를 만든 것이다. 이때, [도형1]의 차원을 구하면?



- ① $\log 2$ ② $\log 3$ ③ $\frac{\log 3}{\log 2}$
④ $\frac{\log 2}{\log 3}$ ⑤ $2 \frac{\log 2}{\log 3}$

해설

[도형1]에서 도형의 각 변을 3등분하면 [도형2]와 같이 같은 도형 4개가 만들어진다.

즉, $x = 3$ 일 때, $y = 4$ 이므로 차원을 a 라 하면

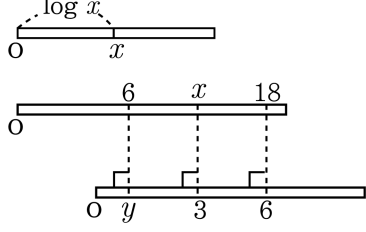
$$4 = 3^a$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 4 = \log 3^a, \quad 2 \log 2 = a \log 3$$

$$\therefore a = \frac{2 \log 2}{\log 3}$$

37. 아래쪽 그림과 같이 점 O를 시점으로 하여 거리가 $\log x(x > 1)$ 가 되는 곳의 눈금을 x 로 정한 자가 있다. 같은 종류의 두 개의 자의 눈금이 아래 그림과 같이 일치하였을 때, $x - 2y$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

위의 그림과 같이 자 A에서 원점에서 거리가 6인 지점을 L, x 인 지점을 M, 18인 지점을 N, 자 B에서 원점에서 거리가 y 인 지점을 P, 3인 지점을 Q, 6인 지점을 R이라 하면

$MN = QR$ 이므로 $\log 18 = \log x = \log 6 - \log 3$ 에서 $\log \frac{18}{x} =$

$$\log \frac{6}{3}$$

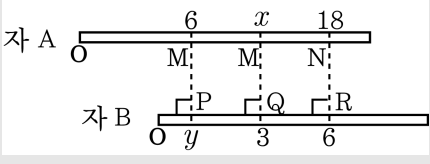
$$\therefore x = 9$$

$LN = PR$ 이므로

$\log 18 - \log 6 = \log 6 - \log y$ 에서

$$\log \frac{18}{6} = \log \frac{6}{y} \quad \therefore y = 2$$

$$\therefore x - 2y = 9 - 4 = 5$$



38. $A = 10^{\log_{10} 3}$, $B = \frac{1}{\log_{10} 3} + \frac{1}{\log_3 10}$, $C = \frac{3}{\log_{10} 3 + \log_3 10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
 ④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$$\begin{aligned} A &= 10^{\log_{10} 3} = 3 \\ B &= \frac{1}{\log_{10} 3} + \frac{1}{\log_3 10} \\ &= \frac{1}{\log_{10} 3} + \log_{10} 3 > 2 \sqrt{\frac{1}{\log_{10} 3} \cdot \log_{10} 3} = 2 \\ C &= \frac{3}{\log_{10} 3 + \log_3 10} \text{에서} \\ \log_{10} 3 + \log_3 10 &> 2 \sqrt{\log_{10} 3 \cdot \log_3 10} = 2 \text{이므로} \\ C &= \frac{3}{\log_{10} 3 + \log_3 10} < \frac{3}{2} \\ \therefore C &< B < A \end{aligned}$$