1. $\log_9 x = -\frac{3}{2}$ 을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{27}$

해설

$\log_9 x = -\frac{3}{2}$

$\iff x = 9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

2. $\log_8 0.25 = x$를 만족하는 x의 값은?

① 1　　② $-\frac{1}{3}$　　③ $-\frac{2}{3}$　　④ $-\frac{1}{4}$　　⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

$\log_8 0.25 = x$에서 $8^x = 0.25$

$(2^3)^x = \frac{1}{4}$　$\therefore\ 2^{3x} = 2^{-2}$

$\therefore\ 3x = -2$

$\therefore\ x = -\frac{2}{3}$

3. $\log_{\sqrt{2}}(\log_x 4) = 4$을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

$\log_{\sqrt{2}}(\log_x 4) = 4$에서

$\log_x 4 = (\sqrt{2})^4 = 4$

$\therefore x^4 = 4,\ x^2 = 2$

이 때, 밑의 조건에서 $x \neq 1, x > 1$이므로 $x = \sqrt{2}$

4. $\log_{(x-1)}(-x^2+4x-3)$ 값이 존재하기 위한 x의 범위는?

① $1 < x < 2,\ 2 < x < 3$　② $1 < x \leq 2,\ 2 < x < 3$

③ $1 < x < 2,\ 2 < x \leq 3$　④ $1 < x < 2,\ 2 \leq x < 3$

⑤ $1 < x < 3,\ 3 < x < 4$

해설

밑 : $x-1 > 0,\ x-1 \neq 1 \cdots$ ㉠

진수 : $-x^2+4x-3 > 0$

$x^2-4x+3 < 0$

$(x-1)(x-3) < 0,\ 1 < x < 3 \cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$\therefore\ 1 < x < 2,\ 2 < x < 3$

5. $(\log_3 2)(\log_4 9) - \log_4 36$ 의 값은?

① $-\log_2 3$　② $-\log_3 2$　③ 0
④ $\log_3 2$　⑤ $\log_2 3$

해설
$(\log_3 2)(\log_4 9) - \log_4 36$
$= (\log_3 2)(\log_2 3) - \log_2 6$
$= 1 - \log_2 6 = -\log_2 3$

6. $(\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② -1　③ 0　④ $\log_3 2$　⑤ $\log_2 3$

해설

$(\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75$

$= (\log_3 2)(\log_2 5) - \log_9 75$

$= \log_3 5 - \frac{1}{2}\log_3 75$

$= \log_3 \frac{5}{5\sqrt{3}}$

$= \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= -\frac{1}{2}$

7. $\log(x-1)(x-2)=\log(x-1)+\log(x-2)$ 일 때, $|x-1|+|x-2|$를 간단히 하면?

① 3 ② $2x$

③ $2-3x$ 또는 $3x-2$ ④ $3-2x$

⑤ $2x-3$

해설

$x-1>0,\ x-2>0$ 이므로
$|x-1|+|x-2|=x-1+x-2=2x-3$

8. $\frac{1}{2}\log_2 3 + 5\log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6}$의 값은?

① 0　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$　　④ 2　　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\frac{1}{2}\log_2 3 + 5\log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6}$

$= \log_2 \sqrt{3} + \log_2 4\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6}$

$= \log_2 \frac{\sqrt{3} \times 4\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$= \log_2 4$

$= 2$

9. $(\log_2 3 + 2\log_4 7)\log_{\sqrt[4]{21}} 8$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 12

④ $4\log_2 3$ ⑤ $6\log_2 5$

해설

밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 같게 한 후 계산한다.

$(\log_2 3 + 2\log_4 7)\log_{\sqrt[4]{21}} 8$

$= \left(\log_2 3 + 2\dfrac{\log_2 7}{\log_2 4}\right) \cdot \dfrac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt[4]{21}}$

$= \left(\log_2 3 + 2\dfrac{\log_2 7}{\log_2 2^2}\right) \cdot \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 21^{\frac{1}{4}}}$

$= \left(\log_2 3 + 2\dfrac{\log_2 7}{2\log_2 2}\right) \cdot \dfrac{3\log_2 2}{\frac{1}{4}\log_2 21}$

$= (\log_2 3 + \log_2 7) \cdot \dfrac{12}{\log_2 21}$

$= \log_2 21 \cdot \dfrac{12}{\log_2 21} = 12$

10. $a=\dfrac{\log_3(\log_5 7)}{2\log_3 2}$ 일 때, 4^a 의 값은?

① $\log_5 7$ ② $\log_3 5$ ③ $3^{\log_5 2}$ ④ $3^{\log_5 5}$ ⑤ $3^{\log_5 7}$

해설

$a=\dfrac{\log_3(\log_5 7)}{2\log_3 2}$

$=\dfrac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 2^2}$

$=\dfrac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 4}=\log_4(\log_5 7)$

$\therefore 4^a=\log_5 7$

11. $\log_a(-a^2+5a+6)$ 의 값이 존재하도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\log_a(-a^2+5a+6)$ 의 값이 존재하기 위해서는

(i) 밑 조건에 의하여

$a>0,\ a\neq 1\cdots$ ㉠

(ii) 진수 조건에 의하여

$-a^2+5a+6>0,\ a^2-5a-6<0$

$(a+1)(a-6)<0$

$\therefore -1<a<6\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 만족하는 정수는 2, 3, 4, 5 의 4개다.

12. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 의 값이 존재하기 위한 실수 x 의 범위는?

① $-1 < x < 3$ ② $0 > x$ ③ $2 < x < 5$

④ $3 < x < 4$ ⑤ $5 < x < 7$

해설

밑의 조건에서 $x-3 > 0, x-3 \neq 1$
따라서 $x > 3, x \neq 4 \cdots$ ㉠
진수의 조건에서 $-x^2+6x-8 > 0$
$x^2-6x+8 < 0$
$(x-2)(x-4) < 0$
따라서 $2 < x < 4 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $3 < x < 4$

13. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{(k-2)^2}(kx^2+kx+1)$이 의미를 갖기 위한 정수 k의 개수는?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$\log_a b$에서 $a > 0,\ a \neq 1, b > 0$
(i) $(k-2)^2 > 0 \rightarrow k \neq 2$
(ii) $(k-2)^2 \neq 1 \rightarrow k \neq 3,\ 1$
(ii) $kx^2 + kx + 1 > 0$
$\rightarrow k = 0$ 또는 $k > 0$일때, $k^2 - 4k < 0$
$\therefore\ 0 < k < 4$
따라서 (i), (ii), (iii)를 만족하는 정수 k는 0

14. $\log_{1-x}(-x^2-2x+15)$의 값이 정의되도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은?

① -15 ② -10 ③ -6 ④ 2 ⑤ 4

해설

밑의 조건에서

$1-x>0,\ 1-x\neq 1$

$\therefore x\neq 0, x<1 \cdots\cdots$ ㉠

진수의 조건에서

$-x^2-2x+15>0,\ (x-3)(x+5)<0$

$\therefore -5<x<3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 공통 범위를 구하면

$-5<x<0,\ 0<x<1$

따라서 구하는 정수 x는 $-4, -3, -2, -1$이고 그 합은 -10이다.

15. $a>0,\ a\neq 1$ 이고 $x>0,\ y>0$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\log_a a = 1$

② $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

③ $\log_a(x-y) = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$

④ $\log_a x^y = y\log_a x$

⑤ $\log_a 5 \cdot \log_5 a = 1$

해설

③ $\log_a(x-y) \neq \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$

⑤ $\log_a 5 \cdot \log_5 a = \log_a 5 \cdot \dfrac{1}{\log_a 5} = 1$

16. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_{10} 2+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\log_{10} 2\cdot(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{99})$
$=\log_{10}\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99}$
$=\log_{10} 100=2$

17. $\log_3 2+\log_3\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_3\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_3\left(1+\frac{1}{80}\right)$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\log_3 2+\log_3\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_3\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_3\left(1+\frac{1}{80}\right)$

$=\log_3 2+\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\cdots+\log_3\frac{81}{80}$

$=\log_3\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\cdots\frac{81}{80}\right)$

$=\log_3 81=\log_3 3^4$

$=4\log_3 3$

$=4$

18. $x = \sqrt{11} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{11} - \sqrt{3}$일 때, $\log_6(x^2 + xy + y^2)$의 값은?

① $\log_6 25$　　② 2　　③ 3

④ $\log_2 12$　　⑤ 6

해설

$x = \sqrt{11} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{11} - \sqrt{3}$이므로

$(x+y)^2 = (2\sqrt{11})^2 = 44$

$xy = (\sqrt{11} + \sqrt{3})(\sqrt{11} - \sqrt{3})$

$= 11 - 3 = 8$

$\therefore\ x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = 44 - 8 = 36$

$\therefore\ \log_6(x^2 + xy + y^2) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2\log_6 6 = 2$

19. 보기 중 유리수인 것은 모두 몇 개인가?

$\sqrt{10}^{\log_{10} 4}$, $\sqrt{10^{\frac{1}{2}}}$, 2^{-10}, $10^{-\frac{1}{2}}$,
$\sqrt{2}^{-\log_2 4}$, $(\log_2 16)^{\frac{1}{2}}$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

Q를 유리수의 집합이라 하자.

$\sqrt{10}^{\log_{10} 4} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_{10} 2} = 10^{\log_{10} 2} = 2 \in Q$

$\sqrt{10^{\frac{1}{2}}} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{4}} \notin Q$

$2^{-10} = \dfrac{1}{2^{10}} \in Q$

$10^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10} \notin Q$

$\sqrt{2^{-\log_2 4}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_2 \frac{1}{2}} = 2^{\log_2 \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \in Q$

$(\log_2 16)^{\frac{1}{2}} = (\log_2 2^4)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2 \in Q$

따라서, 유리수인 것은 4개다.

20. $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)$

$=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)$

$=\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^{\frac{3}{2}}=3$

21. 다음을 간단히 하여라.

$$\log_2 \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \text{ (단, } x > 1)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$
$= \log_2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$
$= \log_2 \{(x+1) - (x-1)\} = \log_2 2 = 1$

22. $\log_2 x + \log_2 y = \dfrac{3}{2}$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여, $x + 2y$ 의 최솟값을 m 이라 하고 그때의 x, y 의 값을 각각 a, b 라 하자. 이때, $\dfrac{am}{b}$ 의 값은?

① $2^{\frac{5}{4}}$　② $2^{\frac{3}{2}}$　③ $2^{\frac{9}{4}}$　④ $2^{\frac{5}{2}}$　⑤ $2^{\frac{13}{4}}$

해설

$\log_2 x + \log_x y = \log_2 xy = \dfrac{3}{2}$ $\therefore xy = 2^{\frac{3}{2}}$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x + 2y \geq 2\sqrt{2xy} = 2\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{2^{\frac{5}{2}}} = 2 \cdot 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{9}{4}}$

따라서 $x + 2y$ 의 최솟값은 $2^{\frac{9}{4}}$ 이다.

(단, 등호는 $x = 2^{\frac{5}{4}}, y = 2^{\frac{1}{4}}$ 일 때 성립한다.)

$a = 2^{\frac{5}{4}}, b = 2^{\frac{1}{4}}, m = 2^{\frac{9}{4}}$

$\dfrac{am}{b} = 2^{(\frac{5}{4}+\frac{9}{4})-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{13}{4}}$

23. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{|a-3|}(3ax^2-ax+1)$이 정의되기 위한 정수 a의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

(i) 밑의 조건에서 $|a-3|>0$이고 $|a-3| \neq 1$

$\therefore a \neq 3,\ a \neq 2,\ a \neq 4 \cdots\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 진수조건에서 $3ax^2-ax+1>0$

① $a=0$ 일 때, $1>0$ 이므로 성립

② $a>0$일 때, 방정식 $3ax^2-ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-12a<0,\ a(a-12)<0$

$\therefore 0<a<12$

①, ②에서 $0 \le a < 12 \cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수는 0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11의 9개다.

24. a, b가 유리수라 하면 서로소인 두 정수 p, q에 대하여 $\log_6(2^a \cdot 3^b) = \frac{q}{p}$(단, $p = q$)로 쓸 수 있다.

> 로그의 정의에 의하여 $2^a \cdot 3^b = 6^{\frac{q}{p}}$
> 이때, $ap =$ (가)이고 $a \neq b$이므로 (나) 이것은 가정에 모순이다.
> 따라서, $\log_6(2^a \cdot 3^b)$은 무리수이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

① $bp,\ p = q$ ② $bp,\ p = 0$ ③ $bp,\ p = 0$
④ $bp,\ q = q$ ⑤ $bp,\ p = 0$

해설

$2^a \cdot 3^b = 6^{\frac{q}{p}}$ 에서 $(2^a \cdot 3^b)^p = 6^q = (2 \cdot 3)^q$
$\therefore\ 2^{ap} \cdot 3^{bp} = 2^q \cdot 3^q$ 에서 $ap = bp\ \cdots$(가)
$(a - b)p = 0$
$a \neq b$이므로 $p = 0\ \cdots$(나)

25. 실수 a에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\log_{a^2+1}(a^2+a+1)$ ㉡ $\log_{2|a|+2}(a^2+2a+1)$

㉢ $\log_{a^2+2}(a^2+2a+3)$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ [반례] 밑의 조건에서 $a=0$일 때, 성립하지 않는다.

㉡ [반례] $a=-1$일 때, 진수 $a^2+2a+1=0$이므로 로그를 정의할 수 없다.

㉢ 진수 $a^2+2a+3=(a+1)^2+2>0$이고, 밑 $a^2+2\geq 2$이므로 로그가 항상 정의된다. 따라서, ㄷ만 옳다.

26. 다음은 $\log_m n$이 무리수임을 이용하여 $\log_{m^2} m^3 n$도 무리수임을 증명한 것이다.

> $\log_m n = s$(s는 [(가)])로 놓고
> $\log_{m^2} m^3 n$이 유리수라고 하자.
> $\log_{m^2} m^3 n = \dfrac{\log_m m^3 n}{\log_m m^2} = \dfrac{1}{2}$[(나)]
> 이때, $\log_{m^2} m^3 n = t$(t는 유리수)라 하면
> $2t - 3 = s$
> 이것은 [(다)]가 되어 모순이다.
> 따라서, $\log_{m^2} m^3 n$은 무리수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① 유리수, $2s$, (유리수)=(무리수)

② 유리수, $1+2s$, (짝수)=(홀수)

③ 유리수, $2+s$, (유리수)=(무리수)

④ 무리수, $2s$, (짝수)=(홀수)

⑤ 무리수, $3+s$, (유리수)=(무리수)

해설

$\log_m n = s$(s는 [무리수])로 놓고
$\log_{m^2} m^3 n$이 유리수라고 하자.

$$\log_{m^2} m^3 n = \frac{\log_m m^3 n}{\log_m m^2} = \frac{1}{2}[(3+s)]$$

이때, $\log_{m^2} m^3 n = t$(t는 유리수)라 하면
$2t - 3 = s$
이것은 [(유리수)=(무리수)]가 되어 모순이다.
따라서, $\log_{m^2} m^3 n$은 무리수이다.

27. 다음은 로그의 성질 $\log q^r = r\log q$를 이용하여 m이 0이 아닌 실수일 때, $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$(단, a는 1이 아닌 양수, b는 양수)가 성립함을 증명한 것이다.

> $x = \log_{a^m} b^n$로 놓으면
> $b^n =$ (가) $= (a^x)^{(나)}$ 이므로
> $a^x =$ (다)
> 따라서 $x = \log_a$(다) $= \frac{n}{m}\log_a b$가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① (가) : a^x, (나) : m, (다) b^n

② (가) : a^x, (나) : $\frac{m}{n}$, (다) $b^{\frac{n}{m}}$

③ (가) : $(a^m)^x$, (나) : m, (다) $b^{\frac{n}{m}}$

④ (가) : $(a^m)^x$, (나) : m, (다) b^n

⑤ (가) : $(a^m)^x$, (나) : $\frac{m}{n}$, (다) $b^{\frac{n}{m}}$

해설

$x = \log_{a^m} b^n$로 놓으면 로그의 정의에 의하여
$b^n = (a^m)^x = (a^x)^m$
위의 식의 양변을 $\frac{1}{m}$ 제곱하면 $b^{\frac{n}{m}} = a^x$
따라서, $x = \log_a b^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}\log_a b$가 성립한다.