1. 등차수열 2, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{100}, 305 에서 공차는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

등차수열 2, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{100}, 305 에서 공차를 d로 놓으면
305는 제 102항이므로
$305 = 2 + (102 - 1)d$
$\therefore\ d = \frac{303}{101} = 3$

2. 첫째항이 -25, 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9 항 ② 제 10 항 ③ 제 11 항
④ 제 12 항 ⑤ 제 13 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면
$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$
이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은
$3n - 28 > 0$, $3n > 28$
$\therefore\ n > \dfrac{28}{3} = 9.33\cdots$
따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 72$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{24}$의 합을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 432

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 4a + 46d = 72$

$2a + 23d = 36$

$$\begin{aligned} \therefore\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{24} &= \frac{24(2a + 23d)}{2} \\ &= 12 \times 36 \\ &= 432 \end{aligned}$$

4. 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$일 때, S_{10}의 값은?

① 64　② 80　③ 92　④ 100　⑤ 120

해설

$S_5 = \frac{5(2a+4d)}{2} = 25$에서 $a+2d=5 \cdots$ ㉠

$S_7 = \frac{7(2a+6d)}{2} = 49$에서 $a+3d=7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$d=2,\ a=1$

$\therefore\ S_{10} = \frac{10(2\cdot 1+9\cdot 2)}{2} = 100$

5. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항에서 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일 때, a_{15}를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 240

해설

$n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$이므로

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\{n+2-(n-1)\}}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\cdot 3}{3}$$

$$= n(n+1)$$

$\therefore\ a_{15} = 15 \times 16 = 240$

6. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

$1, 4, 9, 16 \cdots$

① n ② $3n-2$ ③ $2n+1$
④ n^2 ⑤ $(n+1)^2$

해설
$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$
$\therefore a_n = n^2$

7. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, 수열 $\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\}$은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_n=ar^{n-1}$이므로
$\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\}=3ar^n-2ar^{n-1}$
$=(3ar-2a)r^{n-1}=12\cdot 2^{n-1}$
따라서 $r=2$이고 $3ar-2a=12$이다.
$6a-2a=12,\ 4a=12$
$\therefore\ a=3$

8. 각 항이 실수이고, 제2항이 8, 제5항이 64인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① 2^9　② 2^{10}　③ 2^{11}　④ 2^{12}　⑤ 2^{13}

해설

첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_2 = ar = 8 \cdots\cdots$ ㉠
$a_5 = ar^4 = 64 \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡으로 나누면 $r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$
㉠으로부터 $a = 4$
따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은
$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad \therefore a_{10} = 2^{11}$

9. 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 3 인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열을 이룬다. 이때, $\dfrac{a_{10}}{a_9}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\log_2 a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$
$= 3n - 1$

$a_n = 2^{3n-1}$

$\dfrac{a_{10}}{a_9}$ 는 공비이므로 8

10. 수열 $a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$ 의 합은? (단, $r \neq 0$)

① $\dfrac{2a+4r^n}{r}$　② $\dfrac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{r}$

③ $\dfrac{a(1+r)+(1+r)^n}{r}$　④ $\dfrac{a(1+r)\left\{(1+r)^{2n}-1\right\}}{r}$

⑤ $\dfrac{a(1+r)-r^n+2}{r}$

해설

첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$, 항수가 n 인 등비수열의 합이므로 $1+r \neq 1$ 즉, $r \neq 0$ 일 때,

$$S = \frac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{(1+r)-1}$$

$$= \frac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{r}$$

11. 광이가 첫째 날에 2원, 둘째 날에 6원, 셋째 날에 18원, $\cdots$ 과 같이 매일 전날의 3배씩 30일 간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

① $3^{30}-2$ 원 ② $3^{30}-1$ 원 ③ 3^{30} 원
④ $3^{30}+1$ 원 ⑤ $3^{30}+2$ 원

해설

전날의 3배씩 모으므로 공비 $r=3$
$a=2,\ r=3$
$\therefore\ S_{30}=\dfrac{2\cdot(3^{30}-1)}{3-1}=3^{30}-1$

12. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^1$
(10년후 원리합계)
$= 1000$만$\times 1.04^{10}$
$= 1000$만 $\times 1.48$
$= 1480$만 (원)

13. 다음과 같이 4와 109 사이에 k 개의 수를 나열하여 항의 개수가 $k+2$인 등차수열을 만들려고 한다. 공차가 1이 아닌 최소의 자연수일 때, k 의 값은?

$$4,\ \underbrace{\square,\ \square,\ \cdots,\ \square}^{k\text{개}},\ 109$$

① 26　② 28　③ 30　④ 32　⑤ 34

해설

$a_1 = 4$

$a_{k+2} = 4 + (k+1) \times d = 109$

$4 + (k+1) \times d = 109$

$(k+1) \times d = 105$

$(k+1) \times d = 3 \cdot 5 \cdot 7$

$\therefore d = 3,\ k+1 = 35 \quad \therefore k = 34$

14. 다음 표의 빈 칸에 6개의 자연수를 한 칸에 하나씩 써 넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈칸에 써 넣을 6개의 수의 합을 구하여라.

3		7
	11	

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

6개의 수 a, b, c, d, e, f를 다음 표와 같이 쓰고, 등차중항을 이용한다.

3	a	7
b	c	d
e	11	f

$a = \frac{3+7}{2} = 5$

$c = \frac{a+11}{2} = \frac{5+11}{2} = 8$

$c = \frac{7+e}{2}$에서 $8 = \frac{7+e}{2}$

$\therefore\ e = 9$

$b = \frac{3+e}{2} = \frac{3+9}{2} = 6$

$c = \frac{b+d}{2}$에서 $8 = \frac{6+d}{2}$

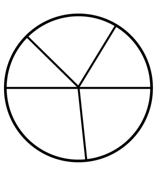
$\therefore\ d = 10$

$c = \frac{3+f}{2}$에서 $8 = \frac{3+f}{2}$

$\therefore\ f = 13$

$\therefore\ a+b+c+d+e+f = 51$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$이다. 이때, k의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

5개의 부채꼴의 넓이를 작은 것부터 차례로
$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d(d>0)$라 하면
5개의 부채꼴의 넓이의 합은 원의 넓이이므로
$5a=15^2\pi \quad \therefore\ a=45\pi$
또, 주어진 조건부으로부터
$a+2d=2(a-2d)$에서 $d=\dfrac{a}{6}=\dfrac{15\pi}{2}$
따라서 가장 큰 부채꼴의 넓이는
$a+2d=45\pi+2\cdot\dfrac{15}{2}\pi=60\pi \quad \therefore\ k=60$

16. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 제 n항까지의 합을 각각 A_n, B_n이라 한다. $A_n : B_n = (3n+6) : (7n+2)$일 때, $a_7 : b_7$을 구하면? (단, n은 자연수)

① $5 : 17$　　② $15 : 31$　　③ $17 : 9$

④ $31 : 15$　　⑤ $49 : 50$

해설

a_n의 일반항을 $a+(n-1)d_1$
b_n의 일반항을 $b+(n-1)d_2$로 놓으면

$A_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d_1\}$,

$B_n = \frac{n}{2}\{2b+(n-1)d_2\}$

$\frac{2a+d_1n-d_1}{2b+d_2n-d_2} = \frac{3n+6}{7n+2} = \frac{3kn+6k}{7kn+2k}$,

$d_1 = 3k,\ 2a-d_1 = 6k$(k는 비례상수)

따라서 $2a = 9k,\ a = \frac{9}{2}k$

$\therefore\ a_n = \frac{9}{2}k+(n-1)3k$

$d_2 = 7k,\ 2b-d_2 = 2k,\ b = \frac{9}{2}k$

$\therefore\ b_n = \frac{9}{2}k+(n-1)7k$

$\therefore\ a_7 : b_7 = \left(\frac{9}{2}k+18k\right) : \left(\frac{9}{2}k+42k\right)$

$= \frac{45}{2}k : \frac{93}{2}k = 15 : 31$

17. 어떤 관광버스가 갈 때는 a km/h 의 속력으로, 올 때는 b km/h 의 속력으로 운행하였다. 이때, 이 버스가 왕복 운행하는 동안의 평균 속력은?

① $\dfrac{ab}{a+b}$ ② $\dfrac{2ab}{a+b}$ ③ $\dfrac{2b}{2(a+b)}$
④ $\dfrac{2ab}{2(a+b)}$ ⑤ $\dfrac{2(a+b)}{ab}$

해설

버스가 운행하는 두 지점 사이의 거리를 s km 라고 하면 왕복거리는 $2s$ km 이고, 갈 때는 $\dfrac{s}{a}$ 시간, $\dfrac{s}{b}$ 시간이 걸리므로 구하는 평균 속력을 v 라고 하면

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

18. 첫째항이 31, 공차가 -2인 등차수열에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 220 인 모든 n의 값의 합은?

① 10 ② 22 ③ 32 ④ 44 ⑤ 56

해설

$$S_n = \frac{n\{2\cdot 31 + (n-1)\cdot(-2)\}}{2}$$
$$= n\{31-(n-1)\}$$
$$= n(32-n)$$
$$= -n^2+32n = 220$$

$\therefore$ n의 값의 합은 32

19. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{10} = 60,\ a_{11} + a_{12} + \cdots\cdots a_{20} = 260$일 때, $a_{21} + a_{22} + \cdots\cdots + a_{30}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 460

해설

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 60$$

$$S_{20} = \frac{20(2a + 19d)}{2} = 260 + 60$$

$$\begin{cases} 2a + 9d = 12 \\ 2a + 19d = 32 \end{cases}$$

$10d = 20$

$d = 2,\ a = -3$

$$\therefore S_{30} - S_{20} = \frac{30\left\{2 \cdot (-3) + 29 \cdot 2\right\}}{2} - 320$$

$= 460$

20. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫 항부터 제 n항까지의 합이 각각 $S_n = 2n^2 + pn$, $T_n = qn^2 + 5n$이다. 두 수열의 공차의 합이 0이고 두 수열의 제5항이 서로 같을 때, $p+q$의 값은?

① -43 ② -33 ③ -23 ④ -13 ⑤ -3

해설

$a_1 = 2 + p$이고

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + pn) - \{2(n-1)^2 + p(n-1)\} \\ &= 4n + p - 2 \end{aligned}$$

$a_n = 4n + p - 2$에 $n = 1$을 대입하면

$a_1 = p + 1$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항부터

등차수열을 이룬다.

$b_1 = q + 5$이고

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= T_n - T_{n-1} \\ &= (qn^2 + 5n) - \{q(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\ &= 2qn + 5 - q \end{aligned}$$

$b_n = 2qn + 5 - q$에 $n = 1$을 대입하면

$b_1 = 5 + q$이므로 $\{b_n\}$은 첫째항부터

등차수열을 이룬다.

$\{a_n\}$의 공차는 4,

$\{b_n\}$의 공차는 $2q$이므로 $q = -2$

$a_5 = p + 18$, $b_5 = 5 + 9q$

$p + 18 = 5 + 9q$, $\quad \therefore\ p = -31$

$\therefore\ p + q = -31 - 2 = -33$

21. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. (단, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$ 이다.)

$a_1 = 1,\ a_2 = 3$

$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4(n = 2, 3, 4, \cdots)$ 일 때, a_{20}의 값은?

① 39 ② 43 ③ 47 ④ 51 ⑤ 55

해설

$S_{n+1} - S_{n-1} = a_{n+1} + a_n$ 이므로 주어진 식은

$(a_{n+1} + a_n)^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$

$(a_{n+1} - a_n)^2 = 4$

$\therefore\ a_{n+1} - a_n = 2(\because\ a_{n+1} > a_n)$

$\therefore\ a_{20} = 1 + 2(20 - 1) = 39$

22. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같을 때, $a_{200}-a_{100}$의 값은?

$$a_n = 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \cdots$$

① $2^{200}-1$ ② $2^{200}-2$ ③ $2^{200}-100$
④ $2^{199}-2^{99}$ ⑤ $2^{200}-2^{100}$

해설

$a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$
$a_{200} = 2^{199}$
$a_{100} = 2^{99}$
$\therefore a_{200}-a_{100} = 2^{199}-2^{99}$

23. 다음은 등차중항과 등비중항, 조화중항 사이의 관계를 설명한 내용이다. ㉠ ㉤에 들어갈 내용이 알맞지 않은 것은?

> 두수 a, b에 대하여 등차중항을 A, 등비중항을 G, 조화중항을 H라고 하면
> $A = \dfrac{a+b}{2}$, $G =$ ㉠, $H = \dfrac{㉡}{a+b}$
> 이때 세 수의 관계는 다음과 같다.
> $A \geq G \geq H$(단, 등호는 $a = b$일 때 성립), ㉢ $= G^2$
> 따라서 등비중항 G는 등차중항 A와 조화중항 H의 ㉣이며, 세 수는 ㉤를 이룬다.

① (㉠) - $\sqrt{ab}$
② (㉡) - ab
③ (㉢) - $A \times H$
④ (㉣) - 등비중항
⑤ (㉤) - 등비수열

해설

세 수 a, x, b가 이 순서로 조화수열을 이룰 때,

$\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, $x = \dfrac{2ab}{a+b}$

24. 서로 다른 세 수 $x,\ y,\ z$가 차례로 등비수열을 이루고, 세 수 $x,\ 2y,\ 3z$가 차례로 등차수열을 이룰 때, $\frac{z}{x}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

해설

서로 다른 세 수 $x,\ y,\ z$가 차례로 등비수열을 이루므로

$\frac{y}{x}=\frac{z}{y}\quad \therefore y^2=xz\ \cdots\cdots$ ㉠

또한, 세 수 $x,\ 2y,\ 3z$가 차례로 등차수열을 이루므로

$4y=x+3z\quad \therefore x=4y-3z\ \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$y^2=(4y-3z)z,\ 3z^2-4yz+y^2=0$

양변을 y^2으로 나누면

$3\left(\frac{z}{y}\right)^2-4\cdot\frac{z}{y}+1=0$

$\left(3\cdot\frac{z}{y}-1\right)\left(\frac{z}{y}-1\right)=0$

$\therefore \frac{z}{y}=\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{z}{y}=1$

그런데 $y\neq z$이므로 $\frac{z}{y}=\frac{1}{3}$

즉, 공비가 $\frac{1}{3}$이므로 $\frac{z}{x}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

25. $a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 곱을 $P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$이라 하자. P_n의 값이 최대일 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$a_n > 0$이고, $a_n \neq 1$이므로
$a_{n+1} > 1$이면 $P_n \times a_{n+1} > p_n$,
즉, $p_{n+1} > p_n$
$a_{n+1} < 1$이면 $P_n \times a_{n+1} < P_n$, 즉, $P_{n+1} < P_n$
따라서, $a_n > 1$인 마지막 항까지의 곱이 P_n의 최댓값이다.

$a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 1,\ 2^{n-1} < 3000$

$2^{11} = 2048$이므로 $n - 1 = 11 \quad \therefore\ n = 12$

26. 매년 말에 6만원씩 적립할 때, 10년 후의 원리합계는?
(단, 연이율은 6푼, 1년마다의 복리로 계산하고, $1.06^{10} \fallingdotseq 1.791$)

① 791000원　② 792000원　③ 793000원
④ 794000원　⑤ 795000원

해설

$$S_n = \frac{60000\left\{(1.06)^{10}-1\right\}}{0.06} = \frac{60000 \times 0.791}{0.06}$$
$$= 791000(\text{원})$$

27. 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n을 $S_n = 2^{n+1} - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하자. $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}$의 값은?

① $\dfrac{2^{20}}{5}$　② $\dfrac{2^{21}+5}{4}$　③ $\dfrac{2^{21}-5}{3}$

④ 2^{20}　⑤ $2^{21}-5$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2^{n+1} - 3) - (2^n - 3) = 2^n (n \geq 2)$

$S_1 = 2^2 - 3 = 1$이므로

$\therefore\ a_n = 2^n (n \geq 2),\ a_1 = 1$

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} = 1 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{19}$

$= 1 + \dfrac{2^3\left\{(2^2)^9 - 1\right\}}{4-1}$

$= 1 + \dfrac{2^{21}}{3} - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{2^{21}}{3}$

28. 첫째항이 $a(a \neq 2)$ 이고 둘째항이 b 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 항 중에 2 가 존재하기 위한 필요충분조건은?

① $\dfrac{a-2}{a-b}$ 가 자연수
② $\dfrac{a+b}{a-2}$ 가 자연수
③ $\dfrac{a-2}{b-a}$ 가 자연수
④ $\dfrac{a+b}{b+2}$ 가 자연수
⑤ $\dfrac{b-2}{b-a}$ 가 자연수

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 $b-a$ 이므로 일반항 a_n 은 $a_n = a + (n-1)(b-a)$

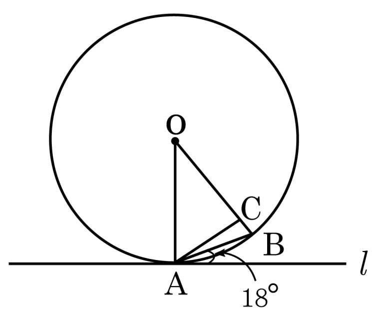
그런데 수열 $\{a_n\}$ 중 2 인 항이 존재하므로 그 항을 m 으로 놓으면

$a_m = 2 = a + (b-a)(m-1)$, 즉, $m - 1 = \dfrac{a-2}{a-b}$

그런데 $a \neq 2$ 이므로 $m - 1 \neq 0$

즉, $m-1$ 은 0 이 아닌 자연수이므로 $\dfrac{a-2}{a-b}$ 는 자연수이다.

29. 원 O 위에 두 점 A, B가 있다. 점 A에서 원 O에 접하는 접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 $18°$이다. 선분 OB 위의 한 점 C에 대하여 삼각형 OAC의 세 내각의 크기가 등차수열을 이룰 때, 가장 큰 내각의 크기는?

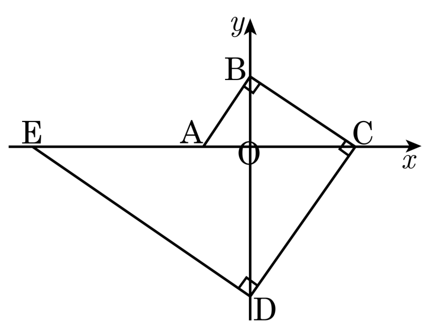


① $68°$ ② $72°$ ③ $76°$ ④ $80°$ ⑤ $84°$

해설

접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 $18°$이므로 $\angle AOC = 36°$이다.
$\angle OAC = \alpha$, $\angle ACO = \beta$라 하면, $\alpha + \beta = 144°$이고,
가장 긴 변이 선분 OA이므로 가장 큰 각은 β이다.
(i) $36°$, α, β의 순서로 등차수열을 이루는 경우
$2\alpha = \beta + 36° = (144° - \alpha) + 36° = 180° - \alpha$
$\alpha = 60°$, $\beta = 84°$
(ii) α, $36°$, β의 순서로 등차수열을 이루는 경우
$2(\alpha + \beta) = 72°$가 되므로 모순이다.
(i), (ii)에 의해 $\beta = 84°$

30. 그림과 같이 좌표축 위의 다섯 개의 점 A, B, C, D, E에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{CD}}\perp\overline{\mathrm{DE}}$가 성립한다. 세 선분 $\overline{\mathrm{AO}}$, $\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{EA}}$의 길이가 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 AB의 기울기는? (단, O는 원점이고 $\overline{\mathrm{OA}} < \overline{\mathrm{OB}}$이다.)



① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{3}$　　③ 2　　④ $\sqrt{5}$　　⑤ $\sqrt{6}$

해설

점 A의 좌표를 $(-1,\ 0)$이라 놓고 풀어도 일반성을 잃지 않는다. 직선 AB의 기울기를 m이라 하면, 점 B의 좌표는 $(0,\ m)$, 점 C의 좌표는 $(m^2,\ 0)$, 점 D의 좌표는 $(0,\ -m^3)$, 점 E의 좌표는 $(-m^4,\ 0)$이다. 그런데 $\overline{\mathrm{AO}}$, $\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{EA}}$가 이순서대로 등차수열을 이루므로

$2\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{AO}} + \overline{\mathrm{EA}}$

즉, $2m^2 = 1 + (m^4 - 1)$

따라서 $m^4 = 2m^2$에서 $m > 0$이므로 $m = \sqrt{2}$

31. 유한 등차수열 $\{a_n\}$과 무한 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여

$\{a_n\} : 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots,\ 200$

$\{b_n\} : 2,\ 7,\ 12,\ \cdots$

일 때, 두 수열에 공통으로 포함된 수의 총합은?

① 1200 ② 1220 ③ 1231 ④ 1240 ⑤ 1261

해설

두 수열에 공통으로 포함된 가장 작은 수는 7이고 두 수열의 일반항이 각각 $a_n = 3n-2,\ b_n = 5n-3$

이므로 두 수열에 공통으로 포함된 수는 적당한 자연수 $p,\ q$에 대하여

$3p-2 = 5q-3,\ 3p = 5q-1$

(1) $q = 3k \ \rightarrow\ 5q-1 = 15k-1$

(2) $q = 3k+1 \ \rightarrow\ 5q-1 = 15k+4$

(3) $q = 3k+2 \ \rightarrow\ 5q-1 = 15k+9$

따라서 새로운 수열을 c_n이라 하면

$c_n = 5q-3 = 5(3n-1)-3 = 15n-8$

이 수열의 합은 $c_1 = 7,\ c_{13} = 15 \times 13 - 8 = 187$

즉, 첫째항이 7, 끝항이 187, 항수 13인 등차수열의 합이므로

$S_7 = \dfrac{13}{2}(7+187) = 1261$

32. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_3 = 10$이고 $S_9 > 0$, $S_{10} < 0$일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $-5 < d < -4$

㉡ $a_5 > 0$, $a_6 < 0$

㉢ a_1이 정수이면 $a_1 + a_9 = 0$이다.

① ㉠　② ㉢　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_3 = a_1 + 2d = 10$에서 $a_1 = 10 - 2d$

$S_9 = \frac{9(2a_1 + 8d)}{2} > 0$에서 $a_1 + 4d > 0$

$10 - 2d + 4d > 0$

$\therefore\ d > -5$

$S_{10} = \frac{10(2a_1 + 9d)}{2} < 0$에서 $2a_1 + 9d < 0$

$2(10 - 2d) + 9d < 0$

$\therefore\ d < -4$

$\therefore\ -5 < d < -4$(참)

㉡ $a_5 = a_3 + 2d = 10 + 2d$

㉠에서 $-10 < 2d < -8$이므로

$0 < 10 + 2d < 2$ 즉, $0 < a_5 < 2$

$a_6 = a_3 + 3d = 10 + 3d$

$-15 < 3d < -12$이므로

$-5 < 10 + 3d < -2$ 즉, $-5 < a_6 < -2$

$\therefore\ a_5 > 0$, $a_6 < 0$(참)

㉢ $a_1 = 10 - 2d$이므로

$-5 < d < -4$에서 $18 < 10 - 2d < 20$

즉, $18 < a_1 < 20$

a_1이 정수이므로 $a_1 = 19$

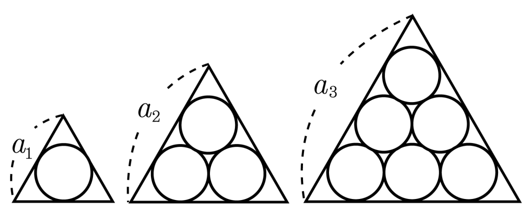
$a_1 + 2d = 10$에서 $d = -\frac{9}{2}$

$\therefore\ a_9 = 19 + 8 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -17$

$\therefore\ a_1 + a_9 = 2 \neq 0$(거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

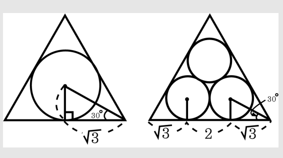
33. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1 인 원에 외접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 a_1 이라 하고, 반지름의 길이가 1 이고 서로 외접하는 세 원에 외접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 a_2 라 한다.
이와 같이 계속하여 $a_n(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 의 값을 정하면 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 20 항까지의 합은 $a + b\sqrt{3}$(a, b는 유리수) 이다. 이때, $a - b$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 340

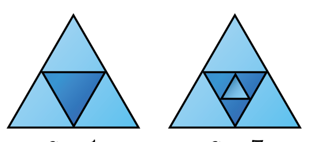
해설



$a_1 = 2\sqrt{3}$
$a_2 = 2\sqrt{3} + 2$
$a_3 = 2\sqrt{3} + 2 \times 2$
$\vdots$
$a_n = 2\sqrt{3} + 2(n - 1)$
a_n 은 첫째항이 $2\sqrt{3}$ 이고
공차가 2 인 등차수열이다.

$$S_{20} = \frac{20(2 \cdot 2\sqrt{3} + 19 \cdot 2)}{2}$$
$= 10(4\sqrt{3} + 38)$
$= 380 + 40\sqrt{3}$
$\therefore a = 380,\ b = 40$
$a - b = 340$

34. 정삼각형 모양의 색종이가 있다. 그림과 같이 정삼각형의 각 변의 중점을 선분으로 연결하면 색종이는 4개의 작은 정삼각형으로 나누어진다. 이들 4개의 정삼각형 중 가장 안쪽의 정삼각형에 대하여 다시 각 변의 중점을 선분으로 연결하면 색종이는 모두 7개의 정삼각형으로 나눈어진다. 이와 같은 시행을 n번 반복했을 때 나누어진 정삼각형의 개수를 a_n이라 하자, 예를 들어, $a_1 = 4$, $a_2 = 7$이다. 이때, a_{10}의 값을 구하여라.



$a_1=1$ $a_2=7$

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$a_1 = 4$, $a_2 = 4+3 = 7$, $a_3 = 7+3 = 10, \cdots$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열이다.

$\therefore a_n = 4 + 3(n-1) = 3n+1$

$\therefore a_{10} = 3 \cdot 10 + 1 = 31$

35. 네 양수 $a,\ b,\ c,\ d$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $(a+b)(c+d) \geq 4ad$

ㄴ $a+b+c+d \geq 4\sqrt{ad}$

ㄷ 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수는 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

네 양수 $a,\ b,\ c,\ d$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $ad=bc$

ㄱ $(a+b)(c+d)=ad+bc+ac+bd$

$\geq 2ad+2\sqrt{ac\cdot bd}=4ad\ (\because ad=bc)\ \therefore$ 참

ㄴ $a+b+c+d=(a+c)+(b+d)$

$\geq 2\sqrt{(a+c)(b+d)}$

$\geq 2\sqrt{(ad+bc)+(ab+cd)}$

$\geq 2\sqrt{2ad+2\sqrt{ab\cdot cd}}=2\sqrt{2ad+2ad}$

$=4\sqrt{ad}\ \ \therefore$ 참

ㄷ 수열 $a,\ b,\ c,\ d$의 공비를 r이라 하면

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+ar}{cx+cr}=\frac{a(x+r)}{c(x+r)}=\frac{a}{c}$$

따라서, $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$는 상수함수이므로 역함수는 존재하지 않는다. $\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

36. 각 항이 복소수인 등비수열 $\{Z_n\}$에 대하여 $z_1 = 1,\ z_2 = a + bi,\ z_3 = a - bi$(단, $a,\ b$는 실수, $b > 0$) 일 때, z_1 부터 z_{200} 까지의 항 중에서 실수인 것들의 모든 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 67

해설

$1,\ z_2,\ z_3$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $z_2^2 = z_3$
즉, $(a^2 - b^2) + 2abi = a - bi$이고
$b > 0$이므로 $a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{\sqrt{3}}{2}$
즉, $z_1 = 1,\ z_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i),\ z_3 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i),\ z_4 = 1, \cdots$
이므로
$z_{3n-2} = 1(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 67)$
따라서, z_1 부터 z_{200} 까지의 항 중에서 실수인 것들의 합은 67 이다.

37. 다음은 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하고 $S_n = p,\ S_{2n} = q$라 할 때, S_{3n}을 $p,\ q$로 나타내는 과정이다. (단, $p \neq 0, q \neq 0$)

> 자연수 n에 대하여
> $A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$
> $B = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{2n}$
> $C = a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n}$이라 하자.
> 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $A,\ B,\ C$는 이 순서대로 공비가 [(가)]인 등비수열을 이룬다.
> 등비중항의 성질에 의하여 $B^2 = AC$
> 또한, $\begin{cases} A = S_n = p \\ B = S_{2n} - S_n = q - p \\ C = S_{3n} - S_{2n} = S_{3n} - q \end{cases}$
> 따라서 $S_{3n} = $[(나)]이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : r^{n-1}, (나) : $\dfrac{(p-q)^2}{p}$
② (가) : r^n, (나) : $\dfrac{(p+q)^2}{p}$
③ (가) : r^n, (나) : $\dfrac{p^2 - pq + q^2}{p}$
④ (가) : r^n, (나) : $\dfrac{p^2 + pq + q^2}{p}$
⑤ (가) : r^{2n}, (나) : $\dfrac{p^2 - pq + q^2}{p}$

해설

$A = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1},\ B = \dfrac{ar^n(r^n - 1)}{r - 1},\ C = \dfrac{ar^{2n}(r^n - 1)}{r - 1}$
이므로 $A,\ B,\ C$는 공비가 $[r^n]$인 등비수열이고 $A,\ B,\ C$를 $B^2 = AC$에 대입하여 정리하면
$(q-p)^2 = p(S_{3n} - q)$
$\therefore\ S_{3n} = [\dfrac{p^2 - pq + q^2}{p}]$
$\therefore$ (가) $= r^n$, (나) $= \dfrac{p^2 - pq + q^2}{p}$

38. 수열 $2,\ 2^2+2^3,\ 2^4+2^5+2^6,\ 2^7+2^8+2^9+2^{10},\cdots$ 의 마지막 항이 $2^{79}-2^{67}$ 일 때, 첫째항부터 마지막 항까지의 합은?

① $2^{79}-2$　② $2^{79}-1$　③ 2^{79}
④ 2^{79+1}　⑤ $2^{79}+2$

해설

마지막 항을 제 n항이라 하고 첫째항부터 마지막 항까지의 첫 번째 수를 배열하면
$2,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^7,\cdots,\ 2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$
따라서 제 n항은 첫째항이 $2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$, 공비가 2인 등비수열의 제 n항까지의 합이므로

$$\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}(2^n-1)}{2-1}=2^{\frac{n(n-1)+1}{2}}(2^n-1)$$

$2^{79}-2^{67}=2^{67}(2^{12}-1)=2^{\frac{12\times11}{2}+1}(2^{12}-1)$ 이므로 $n=12$
따라서 첫째항부터 마지막 항 즉, 제 12항까지의 합은
$\frac{2(2^{78}-1)}{2-1}=2^{79}-2$

39. 60개의 실수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{60}$ 이 이 순서대로 공비가 $r(r>1)$ 인 등비수열을 이룰 때, 집합 $U=\{a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_{60}\}$ 의 세 부분집합 $A,\ B,\ C$ 를 다음과 같이 정의하자.

보기

$A=\{a_n \mid n$은 3의 배수$\}$,
B
$=\{a_n \mid n$은 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수$\}$ $C=\{a_n \mid$
n은 6의 배수$\}$

세 집합 $A,\ B,\ C$ 의 모든 원소의 합을 각각 $S_A,\ S_B,\ S_C$ 라 할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

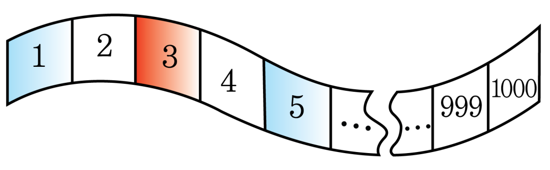
㉠ $S_A=rS_B$
㉡ $S_A=\left(\dfrac{1+r^3}{r^3}\right)S_C$
㉢ 집합 U 의 모든 원소의 합을 S 라 하면
$rS=(1+r+r^2)S_A$ 이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $S_A=a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{60}$
$=ar^2+ar^5+ar^8+\cdots+ar^{59}$
$=r(ar+ar^4+ar^7+\cdots+ar^{58})$
$=r(a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{59})$
$=rS_B$
㉡ $a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{60}$
$=(a_3+a_6)+(a_9+a_{12})+\cdots+(a_{57}+a_{60})$
$=\left(\dfrac{1}{r^3}+1\right)a_6+\left(\dfrac{1}{r^3}+1\right)a_{12}+\cdots+\left(\dfrac{1}{r^3}+1\right)a_{60}$
$=\left(\dfrac{1+r^3}{r^3}\right)(a_6+a_{12}+\cdots+a_{60})$
$=\left(\dfrac{1+r^3}{r^3}\right)S_C$
㉢ $S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{58}+a_{59}+a_{60}$
$=\left(\dfrac{a_3}{r^2}+\dfrac{a_3}{r}+a_3\right)+\left(\dfrac{a_6}{r^2}+\dfrac{a_6}{r}+a_6\right)+\cdots+\left(\dfrac{a_{60}}{r^2}+\dfrac{a_{60}}{r}+a_{60}\right)$
$=\left(\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{r}+1\right)(a_3+a_6+\cdots+a_{60})$
$=\dfrac{1+r+r^2}{r^2}S_A$
$\therefore\ r^2S=(1+r+r^2)S_A$
이상에서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

40. 그림과 같이 1부터 1000까지의 자연수가 쓰여 있는 희색 종이 띠에 1부터 시작하여 공차가 4인 등차수열의 수가 있는 부분에는 빨간색, 3부터 시작하여 공비가 3인 등비수열의 수가 있는 부분에는 파란색을 칠하였다. 빨간색과 파란색이 겹쳐 칠해진 부분에 쓰여있는 수 중에서 가장 큰 수를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 729

해설

빨간색이 칠해진 부분의 쓰여진 수 : $(4n-3)$꼴
파란색이 칠해진 부분의 쓰여진 수 : (3^m)꼴
빨간색과 파란색이 겹쳐 칠해지는 부분에 쓰여진 수
: (9^k)꼴이므로 9, 81, 729(단, k, m, n은 자연수)
$\therefore$ 가장 큰 수는 729

41. A 회사는 제품 생산량을 1년마다 2배로 증가시킬 계획이다. 이 회사는 2014년 초 32만 개, 2015년 초 64만 개, 그리고 2016년 초 128만 개의 제품을 시판하고 앞으로도 매년 제품을 2배로 생산할 계획이다. 한편 경쟁업체인 B회사는 최근 제품의 생산량을 9개월마다 2배로 증가하기로 하였다. B회사가 2016년 초에 4만 개의 제품을 생산한다고 할 때, B회사 제품의 생산량이 A회사 제품의 생산량과 같아지는 것은 몇 년 후인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

2016년 기점으로 t년 후 A회사 제품의 생산량을 $f(t)$라 하면

$f(t) = 128 \times 2^t$

B회사 제품의 생산량을 $g(t)$라 하면

$g(t) = 4 \cdot r^t$

$\frac{3}{4}$년마다 2배씩 되므로 $r^{\frac{3}{4}} = 2$에서 $r = 2^{\frac{4}{3}}$

$\therefore\ g(t) = 4 \cdot 2^{\frac{4}{3}t}$

이때, $f(t) = g(t)$인 t의 값을 구하면

$128 \cdot 2^t = 4 \cdot 2^{\frac{4}{3}t}$

$t + 7 = \frac{4}{3}t + 2$

$\therefore\ t = 15$

42. 다음 표는 어느 학교에서 한 달 전에 구입한 휴대용 저장장치의 용량에 따른 1개당 가격과 개수의 현황을 나타낸 것이다.

용량	8GB	16GB	32GB	64GB	128GB
1개당 가격	a	$\frac{3}{2}a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 a$
개수	$16b$	$8b$	$4b$	$2b$	b

현재 모든 휴대용 저장 장치의 가격이 한 달 전보다 모두 40% 씩 하락하였다. 이 학교에서 휴대용 저장 장치의 용량과 개수를 위 표와 동일하게 현재의 가격으로 구입한다면 지불해야 하는 금액은?(단, $a > 0$이고 $b > 0$이다.)

① $\frac{128}{5}ab\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$
② $32ab\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$
③ $32ab\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$
④ $\frac{192}{5}ab\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$
⑤ $\frac{192}{5}ab\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$

해설

현재 모든 휴대용 저장 장치의 가격이 한 달 전보다 모두 40% 씩 하락하였으므로 지불해야 할 금액은

$$\frac{3}{5}\cdot a\cdot 16b+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}a\cdot 8b+\cdots+\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4 a\cdot b$$

$$=\frac{3}{5}ab\left\{1\cdot 16+\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{16}{2^2}\right\}$$

$$+\frac{3}{5}ab\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\frac{16}{2^3}+\left(\frac{3}{2}\right)^4\cdot\frac{16}{2^4}\right\}$$

$$=\frac{48}{5}ab\left\{1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4\right\}$$

$$=\frac{48}{5}ab\cdot\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{192}{5}ab\cdot\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$$

43. 어떤 나라의 현재 인구는 b명이고, n년 전에는 a명이었다. 지난 n년 동안 매년 인구 증가율이 일정하였고 내년에도 인구증가율이 같다고 예상할 때, 이 나라의 내년의 인구는 몇 명인가?

① $a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ ② $b\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ ③ $a\left(\frac{a}{b}\right)^{n}$
④ $b\left(\frac{a}{b}\right)^{n}$ ⑤ $a\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right\}-1$

해설

인구 a명에 대한 연간 인구증가율이 r일 때, 1년 후 증가된 인구는 ar(명) 이므로
1년 후 총인구는 $a+ar=a(1+r)$(명)
2년 후 총인구는 $a(1+r)+a(1+r)\cdot r=a(1+r)^2$(명)

$\vdots$

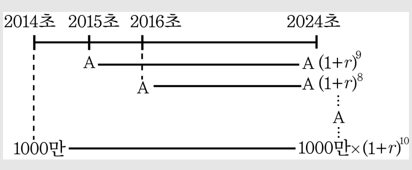
n년 후 총인구는 $a(1+r)^n$(명)
즉, $a(1+r)^n=b$에서
$(1+r)^n=\frac{b}{a},\ 1+r=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$
따라서, 이 나라의 내년의 인구는
$b(1+r)=b\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$(명)

44. 철수와 수희는 연이율이 8% 인 복리로 2014 년 초에 은행에서 각각 1000 만원을 대출 받았다. 철수는 2015 년 초부터 매년 초에 A 원씩 갚아서 2024 년 초까지 10 년에 걸쳐 모두 상환하려고 하고, 수희는 2015 년 말부터 매년 말에 B 원씩 갚아서 2024 년 말까지 10 년에 걸쳐 모두 상환하려고 한다. 이때, $\frac{A}{B}$ 의 값은?

① $\frac{23}{25}$ ② $\frac{25}{27}$ ③ 1 ④ $\frac{25}{23}$ ⑤ $\frac{27}{25}$

해설

철수

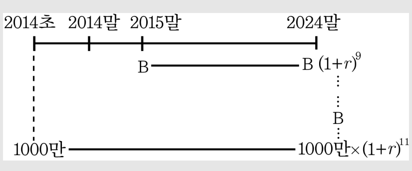


$$A + A(1+r) + \cdots + A(1+r)^9 = 1000\text{만} \times (1+r)^{10}$$

$$\frac{A\left\{(1+r)^{10}-1\right\}}{(1+r)-1} = 1000\text{만}\ (1+r)^{10}$$

$$A = 1000\text{만}(1+r)^{10} \times \frac{r}{(1+r)^{10}-1}$$

수희



$$B + B(1+r) + \cdots + B(1+r)^9 = 1000\text{만} \times (1+r)^{11}$$

$$\frac{B\left\{(1+r)^{10}-1\right\}}{(1+r)-1} = 1000\text{만}\ (1+r)^{11}$$

$$B = 1000\text{만}(1+r)^{11} \times \frac{r}{(1+r)^{10}-1}$$

$$\therefore \frac{A}{B} = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1.08} = \frac{100}{108} = \frac{25}{27}$$

45. 수열 9, 99, 999, $\cdots$ 의 제 n항까지의 합이 $S_n = \frac{1}{a}(10^{n+1} + bn + c)$ 일 때, $a+b+c$의 값은?

① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$a_1 = 10 - 1$
$a_2 = 10^2 - 1$
$a_3 = 10^3 - 1$
$\vdots$
$a_n = 10^n - 1$

$$\begin{aligned} S_n &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(10^k - 1) \\ &= \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \\ &= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n \\ &= \frac{10}{9} \cdot 10^n - \frac{10}{9} - n \\ &= \frac{1}{9} \cdot 10^{n+1} - n - \frac{10}{9} \\ &= \frac{1}{9}(10^{n+1} - 9n - 10) \end{aligned}$$

$a = 9,\ b = -9,\ c = -10$

$\therefore a + b + c = 9 - 9 - 10 = -10$