1. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.

㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.

㉢ 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면
$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉡,㉢　　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉢. $f : X \to Y, f^{-1} : Y \to X$ 이므로,
$f \circ f^{-1} : Y \to Y, f^{-1} \circ f : X \to X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
$\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

2. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = a(x-6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면

$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$

$\therefore a^2 x - 6a^2 - 8a - 2 = x$

즉, $a^2 = 1$, $-6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$

따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로

$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

3. $g(x)=2+\dfrac{7}{x-2}$ 에 대해 $(f^{-1}\circ g^{-1})^{-1}(x)=x$ 를 만족시키는 $f(x)$ 의 값은?(단, $f^{-1},\ g^{-1}$ 은 $f(x),\ g(x)$ 의 역함수)

① $\dfrac{2x-3}{x+2}$ ② $\dfrac{x-2}{2x+3}$ ③ $\dfrac{2x+3}{x-2}$

④ $\dfrac{x+2}{2x-3}$ ⑤ $\dfrac{x-2}{2x-3}$

해설

$(f^{-1}\circ g^{-1})^{-1}(x)=(g\circ f)(x)=g\left\{f(x)\right\}$

$\therefore\ g\left\{f(x)\right\}=2+\dfrac{7}{f(x)-2}=x$

$\rightarrow\ \dfrac{7}{f(x)-2}=x-2$

$\rightarrow\ 7=\left\{f(x)-2\right\}(x-2)$

$\rightarrow\ 7=xf(x)-2f(x)-2x+4$

$\rightarrow\ 2x+3=f(x)(x-2)$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$

해설

$(f^{-1}\circ g^{-1})^{-1}(x)=(g\circ f)(x)=x$ 에서

$f(x)=g^{-1}(x)$

$g(x)=2+\dfrac{7}{x-2}$ 에서 역함수를 구하기 위해 x,y 를 바꾸면

$x=2+\dfrac{7}{y-2}$, $(x-2)(y-2)=7$

$y-2=\dfrac{7}{x-2}$, $y=\dfrac{7}{x-2}+2=\dfrac{2x+3}{x-2}$

$\therefore f(x)=g^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$

4. 일차함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를 $y = x$ 에대칭이동한 그래프의 함수를 $g(x)$ 라고 하자. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 5$, $g(2) = 1$ 을 만족할 때, $f(4)$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를
$y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프는
$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다.
따라서 $g(2) = 1$ 에서 $f^{-1}(2) = 1$
$\therefore\ f(1) = 2$
$f(1) = a + b = 2,\ f(2) = 2a + b = 5$
위의 식에서 $a = 3,\ b = -1$
$\therefore\ f(x) = 3x - 1$
$\therefore\ f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

5. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = S$, $A \cap B = \{5\}$ 일 때, 함수 $f : A \to B$ 가 역함수를 가지는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 36 개

해설

함수 $f : A \Rightarrow B$ 가 역함수를 가지므로
함수 f 는 일대일 대응이다.
$A \cup B = S$, $A \cap B = \{5\}$ 을 만족하고
함수 f 가 일대일 대응이므로
두 집합 A, B 는 각각 5 를 원소로 가지면서
$1, 2, 3, 4$ 중에서 서로 다른 두 개씩을 나누어 가진다.
예를 들어 $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 일 때와 같이 나누는 방법의 수는 6 가지이다.
한편 6 가지 각각의 경우에 일대일 대응인 함수의 개수는 모두 6 개씩 만들 수 있으므로
구하는 함수의 개수는 $6 \times 6 = 36$

6. 함수 $f(x)=2x+1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

① $\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{6}g(x)-\frac{1}{6}$ ③ $2g(x)-1$
④ $\frac{1}{3}g(x)$ ⑤ $\frac{1}{2}g(x)$

해설

$f(x)=2x+1$ 에서 $y=2x+1$ 이라 놓고

x 에 대하여 정리하면 $x=\dfrac{y-1}{2}$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y=\dfrac{x-1}{2}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=g(x)=\dfrac{x-1}{2}$

$f(3x)=6x+1$ 에서 $y=6x+1$ 이라 놓고

x 에 대하여정리하면 $x=\dfrac{y-1}{6}$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y=\dfrac{x-1}{6}$

$\therefore\ f^{-1}(3x)=g(3x)=\dfrac{x-1}{6}$

$\therefore\ g(3x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1}{3}\cdot g(x)$

7. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면 $g(0) = 5$ 가 된다. $f(2x+1) = h(x)$ 로 하고, $h(x)$ 의 역함수를 $e(x)$ 로 할 때 $e(0)$ 의 값은 ?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로
$g(x) = f^{-1}(x),\ g(0) = f^{-1}(0) = 5$
$\therefore\ f(5) = 0$ 문제의 조건에서
$f(5) = f(2 \times 2 + 1) = h(2) = 0$
또 $e(x) = h^{-1}(x)$ 이므로 $e(0) = h^{-1}(0)$
$\therefore\ h(2) = 0$ 이므로 $h^{-1}(0) = e(0) = 2$

8. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 가 아래와 같이 정의되었다고 하자.

$f(x)=\begin{cases} 2x-a & (x\le 0) \\ 3x+1 & (x\ge 0) \end{cases}$ 함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때, $(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(4)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(x)=\begin{cases} 2x-a & (x\le 0) \\ 3x+1 & (x\ge 0) \end{cases}$$

$f(0)=1=-a$

$\therefore a=-1$

$(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(4)=(f^{-1}\circ f^{-1})(4)$

$(f^{-1}\circ f^{-1})(4)=f^{-1}(f^{-1}(4))$

$f^{-1}(4)=k$ 라 하면 $f(k)=4$

$3k+1=4$ ($\because x\le 0$ 에서 $2x+1\le 1$)$k=1$ 이고

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(4)=f^{-1}(1)$

$f^{-1}(1)=m, f(m)=1$ 에서 $2m+1=1$ (또는 $3m+1=1$),

$m=0$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(4)=0$

9. 두 함수 $f(x)=ax+b(a\neq 0), g(x)=x+2$ 에 대하여 $(g^{-1}\circ f^{-1})(3x-1)=2x+1$ 이 성립할 때, $f^{-1}(2)$ 의 값을 구하면?

① -3　② -1　③ 3　④ 5　⑤ 7

해설

$g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$ 이므로

준식은 $(f\circ g)^{-1}(3x-1)=2x+1$ 이다.

$(f\circ g)(2x+1)=3x-1$ 에서

$f(g(2x+1))=3x-1$, $f(2x+3)=3x-1$

$2ax+3a+b=3x-1$ 에서 $a=\dfrac{3}{2}$

$3a+b=-1$ 에서 $b=-\dfrac{11}{2}$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{11}{2}$

$f^{-1}(2)=k$ 라 하면 $f(k)=\dfrac{3}{2}k-\dfrac{11}{2}=2$

$\therefore\ k=5$

10. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$, 함수 $f(2x-1)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $h(x) = 2g(x) + 1$　　② $h(x) = 2g(x) - 1$

③ $h(x) = \dfrac{1}{2}\{g(x) + 1\}$　　④ $h(x) = g(\dfrac{x}{2} + 1)$

⑤ $h(x) = \dfrac{1}{2}g(2x-1) + 1$

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$y = f(2x-1) \Leftrightarrow 2x - 1 = g(y) \cdots$ ㉠

$f(2x-1)$ 의 역함수가 $h(x)$ 이므로

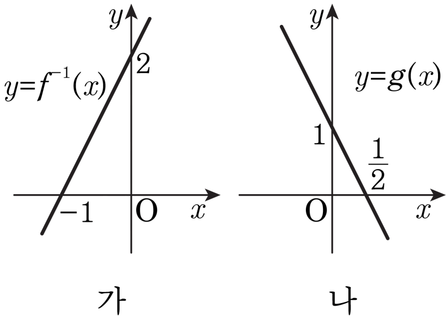
$y = f(2x-1) \Leftrightarrow x = h(y) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 x 를 소거하면 $2h(y) - 1 = g(h)$

그러므로 $h(y) = \dfrac{1}{2}\{g(h) + 1\}$

$\therefore\ h(x) = \dfrac{1}{2}\{g(x) + 1\}$

11. 다음의 그림 (가)는 함수 f 의 역함수 f^{-1} 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수 g 의 그래프이다.



다음 중 함수 g 의 역함수 g^{-1} 을 함수 f 를 이용하여 나타내면?

① $y = -f(x+1)$ ② $y = f(x-1)$ ③ $y = -f(x-1)$

④ $y = f(x+1)$ ⑤ $y = -f(1-x)$

해설

그림 (가) 의 그래프를 y 축에 대칭이동한 후
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
그림 (나) 의 그래프와 일치한다.
즉, $y = f^{-1}(x)$ 를 y 축에 대칭이동하면
$y = f^{-1}(-x) \cdots$ ㉠이다.
㉠을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
$y = f^{-1}(-x) - 1 \cdots$ ㉡이다.
㉡의 역함수는 $x = f^{-1}(-y) - 1 \cdots$ ㉢이므로
㉢에서 $f^{-1}(-y) = x + 1$ 이다.
$\therefore y = -f(x+1)$
$\therefore g^{-1}(x) = -f(x+1)$

12. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 는 우함수, $g(x)$ 는 기함수이고, $f(4)=1,\ g(1)=-3$ 일 때, $f(-4)+g(-1)$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$f(x)$ 는 우함수이므로 $f(-4)=f(4)=1$ $g(x)$ 는 기함수이므로
$g(-1)=-g(1)=3$
$\therefore f(-4)+g(-1)=1+3=4$

13. 이차항의 계수가 양수인 이차함수 $y = f(x)$ 가 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $f(4-x)-f(x)=0$ 을 만족할 때, $f(x)$ 의 최솟값은?

① $f(1)$ ② $f(2)$ ③ $f(3)$ ④ $f(4)$ ⑤ $f(5)$

해설

$f(4-x)-f(x)=0 \Leftrightarrow f(4-x)=f(x)$ ($\Leftarrow x$ 대신 $x+2$ 대입)
$\Leftrightarrow f(2-x)=f(2+x)$
따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여
대칭이고 아래로 볼록한 포물선이므로
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(2)$ 이다.

14. 다음 보기의 함수 $y = f(x)$ 중 임의의 실수 a , b 에 대하여 관계식 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 를 만족시키는 것을 모두 고르면?

보기

(가) $y = x$
(나) $y = x^2 - 1$
(다) $y = -x^2 + 1$

① (가) ② (가), (나) ③ (가), (다)
④ (나), (다) ⑤ ((가), (나), (다)

해설

곡선의 오목, 볼록에 따른 부등식을 살펴보면

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 아래로 볼록인 함수

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 직선

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 위로 볼록인 함수이다.

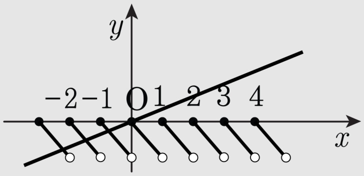
따라서 (가)는 직선, (나)는 아래로 볼록인 함수
(다)는 위로 볼록인 함수 이므로 주어진 부등식을 만족하는 함수는 (가), (나)이다.

15. 함수 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프가 만나는 점은 a 개이고, 이 점들의 x 좌표의 합은 b 이다. 이 때, $a+b$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$-3 \le x < -2$ 일 때, $[x] = -3$ 이므로
$y = [x] - x = -3 - x$
$-2 \le x < -1$ 일 때, $[x] = -2$ 이므로
$y = [x] - x = -2 - x$
$-1 \le x < 0$ 일 때, $[x] = -1$ 이므로
$y = [x] - x = -1 - x$
$0 \le x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로
$y = [x] - x = -x$
$1 \le 2x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로
$y = [x] - x = 1 - x$
따라서 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 두 그래프가 만나는 점은 4 개이고
만나는 점의 x 좌표는 다음과 같다.

i) $-3 \le x < -2$ 일 때, $-3 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{9}{4}$

ii) $-2 \le x < -1$ 일 때, $-2 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{2}$

iii) $-1 \le x < 0$ 일 때, $-1 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$

iv) $0 \le x < 1$ 일 때, $-x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = 0$

$\therefore\ a = 4\ ,\ b = \left(-\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{2}$

$\therefore a + b = 4 + \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{2}$