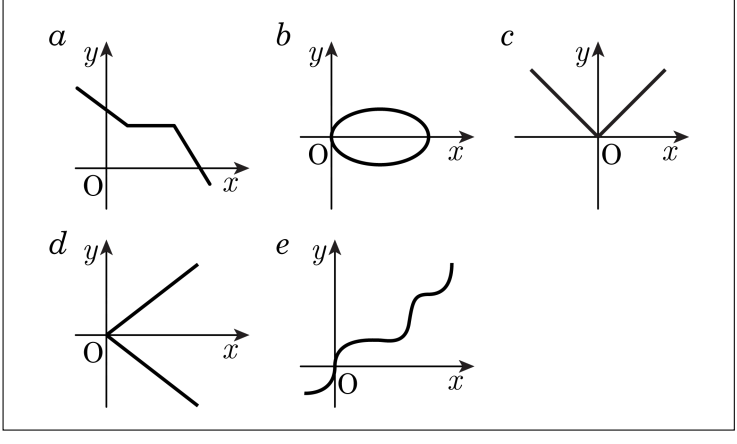


1. 다음 그래프 중 함수인 것은?



- ① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

$[a]$ 함수 $[b]$ 함수가 아니다. $[c]$ 함수 $[d]$ 함수가 아니다. $[e]$ 함수 따라서 $[a], [c], [e]$ 만이 함수이다.

2. 두 집합 $X = \{-1, 1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수인 것을 모두 고르면?

$\textcircled{\text{㉠}} f : x \rightarrow x$	$\textcircled{\text{㉡}} g : x \rightarrow x + 2$
$\textcircled{\text{㉢}} h : x \rightarrow x $	$\textcircled{\text{㉣}} k : x \rightarrow x^2 - 1$

- ①

㉡, ㉢

②

㉠, ㉡, ㉢

③

㉡, ㉢, ㉣
- ④

㉠, ㉢, ㉣

⑤

㉠, ㉡, ㉣

해설

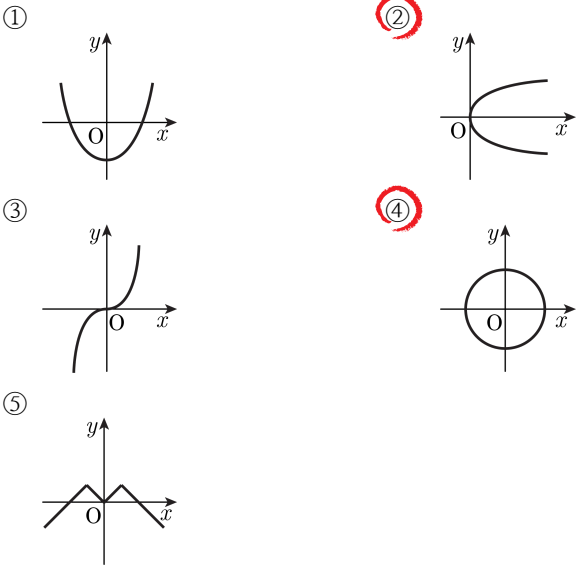
$\textcircled{\text{㉠}} f(x) = x$ 에서 $f(-1) = -1$ 이고 $-1 \notin Y$ 이므로, 함수가 아니다.

$\textcircled{\text{㉡}} g(x) = x+2$ 에서 $g(-1) = 1 \in Y$, $g(1) = 3 \in Y$, $g(2) = 4 \in Y$ 이므로 함수이다.

$\textcircled{\text{㉢}} h(x) = |x|$ 에서 $h(-1) = 1 \in Y$, $h(1) = 1 \in Y$, $h(2) = 2 \in Y$ 이므로 함수이다.

$\textcircled{\text{㉣}} k(x) = x^2-1$ 에서 $k(-1) = 0 \notin Y$, $k(1) = 0 \notin Y$, $k(2) = 3 \in Y$ 이므로 함수가 아니다.

3. 다음 중에서 함수의 그래프가 아닌 것을 모두 고르면?



해설

②, ④의 그래프는 하나의 x 의 값에 대응되는 y 가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x 축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X 에서 Y 로의 함수)

4. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

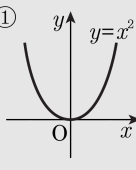
해설

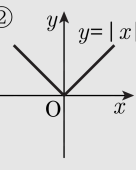
$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

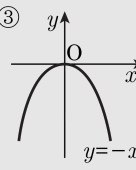
5. 다음 중 일대일 함수는? (x 는 모든 실수)

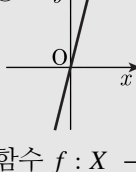
- ① $f(x) = x^2$
- ② $f(x) = |x|$
- ③ $f(x) = -x^2$
- ④ $f(x) = 4x$
- ⑤ $f(x) = 5$

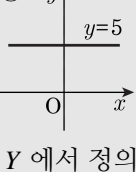
해설

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의
각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

6. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g : x \rightarrow x + 2$

㉢ $h : x \rightarrow |x| + 1$

㉣ $i : x \rightarrow x^2 - 1$

㉤ $j : x \rightarrow |x| + 3$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉠, ㉡은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

7. 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = |x| + 1$ 의 치역을 구하면?

① $\{1\}$

② $\{1, 2\}$

③ $\{2, 3\}$

④ $\{1, 2, 3\}$

⑤ $\{1, 2, 3, 4\}$

해설

$x = -2$, 2일 때 $f(x) = 3$

$x = -1$, 1일 때 $f(x) = 2$

$x = 0$ 일 때 $f(x) = 1$

따라서 f 의 치역은 $\{1, 2, 3\}$

8. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3, g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

9. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \leq y \leq 10\}$ 에 대하여 $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b$, $f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \leq y \leq 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a + b = -5$, $4a + b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore 2a + b = 4$

10. 다음 보기의 함수 중에서 일대일 대응인 것은 모두 몇 개인가?

보기

- ㉠ $f(x) = -x^2 + 1$
- ㉡ $g(x) = -x + 1$
- ㉢ $h(x) = x^3$
- ㉤ $i(x) = 2$
- ㉥ $j(x) = |2x - 1| \ (x \geq 1)$

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

일대일 대응이란 정의역이 x 에 치역 y 가
하나씩 대응 될 때를 말한다.
㉠, ㉤ 일대일 대응이 아니다.
㉡ 함수가 아니다.
따라서 일대일 대응인 것은 ㉡, ㉢, ㉥ 3개이다.

11. 집합 $X = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 21개

해설

X 에서 X 로의 함수의 총 개수에서
 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.
 X 에서 X 로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$
 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수
: $3 \times 2 \times 1 = 6(\text{개})$
 $\therefore 27 - 6 = 21(\text{개})$

12. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가
 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면
 -1 이 대응할 수 있는 원소는
 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5가지.
 0 이 대응할 수 있는 원소는
 $f(-0) = -f(0)$ 에서, $2f(0) = 0$,
즉 0 의 1가지
 1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1가지
따라서, 함수 f 의 개수는 $5 \times 1 \times 1 = 5$ (개)

13. 0이 아닌 실수에서 정의되는 두 함수 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 - x$ 에 대하여 $h(x) = f(g(x))$ 라고 할 때, $h(x) = \frac{99}{100}$ 를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하면?

① 95 ② 97 ③ 99 ④ -97 ⑤ -99

해설

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) = f(1-x) = 1 - \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1} \\ h(x) &= \frac{99}{100} \text{ 에서} \\ \frac{x}{x-1} &= \frac{99}{100} \\ \text{따라서 } x &= -99 \end{aligned}$$

14. 세 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = -x + 2$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ h))(1)$, $((f \circ g) \circ h)(1)$ 의 값을 각각 a , b 라고 할 때, $2a - b$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 6

⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} a &= (f \circ (g \circ h))(1) = f((g \circ h)(1)) \\ &= f((g(h(1)))) \\ &= f((g(1))) = f(0) = 3 \\ b &= ((f \circ g) \circ h)(1) = (f \circ g)(h(1)) \\ &= f(g(h(1))) = 3 \\ \therefore 2a - b &= 2 \cdot 3 - 3 = 3 \end{aligned}$$

15. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

16. 함수 $f(x)$ 가 $f(3x+1) = 2x-1$ 을 만족할 때, 함수 $f(x)$ 를 구하면?

① $f(x) = \frac{x-1}{2}$ ② $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ ③ $f(x) = \frac{x-2}{3}$

④ $f(x) = \frac{2x-5}{3}$ ⑤ $f(x) = \frac{2x+3}{3}$

해설

$f(3x+1) = 2x-1$ 에서 $3x+1 = t$ 라고 놓으면 $x = \frac{t-1}{3}$ 이므로

$$\therefore f(t) = 2 \cdot \frac{t-1}{3} - 1 = \frac{2t-5}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2x-5}{3}$$

17. 세 함수 f, g, h 가 $(g \circ f)(x) = x$, $(h \circ f)(x) = -x + 3$ 일 때, $k \circ g = h$ 를 만족시키는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

- ① $k(x) = -x + 1$ ② $k(x) = -x + 2$ ③ $k(x) = -x + 3$
④ $k(x) = -x + 4$ ⑤ $k(x) = -x + 5$

해설

$k \circ g = h$ 이므로 $(k \circ g) \circ f = h \circ f$
 $k \circ (g \circ f) = h \circ f$
 $k \circ I = h \circ f (\because g \circ f = I, I \text{는 항등함수})$
 $\therefore k = h \circ f (\because k \circ I = I \circ k = k)$
 $\therefore k(x) = (h \circ f)(x) = -x + 3$

18. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 5 ② 3 ③ 1 ④ -3 ⑤ -5

해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
 $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$
 $= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
 $2ax + 3a + b = -4x - 5$,
 $2a = -4$, $3a + b = -5$
즉, $a = -2$, $b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
 $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
 $h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
 $h(2x + 3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
 $h(3) = g(0) = -5$

19. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \dots, f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

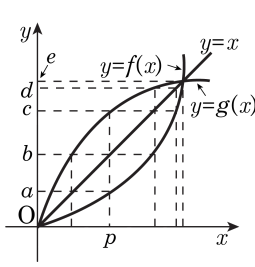
해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$$\therefore f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

20. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)
- ① a ② b ③ c
④ d ⑤ e

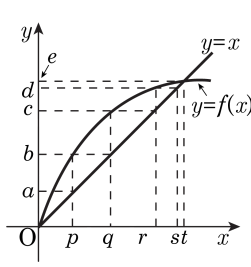


해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$
 $\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

21. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?

- ① p
- ② q
- ③ r
- ④ s
- ⑤ t



해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \cdots \cdots \textcircled{1}$
 그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로
 $\textcircled{1}$ 에서 $f(x) = r$
 $\therefore r = c$ 에서 $f(x) = r = c$
 $\therefore x = q$

22. 두 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

- ① 2 개 ② 5 개 ③ 10 개
④ 20 개 ⑤ 120 개

해설

$x_1 \neq x_2$ 일 때,
 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 는 일대일 함수를 의미한다.
즉, $X = \{1, 2\}$ 이고 $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 이므로
일대일 함수는 $f(1)$ 이 될 수 있는 것이
 a, b, c, d, e 5가지
 $f(2)$ 가 될 수 있는 것이 $f(1)$ 을 제외한 4가지
 $\therefore 5 \times 4 = 20(\text{개})$

23. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 $f(x) = ax + b, g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 의 값은?(단, $a \neq 0$)

- ① 60
- ② 55
- ③ 51
- ④ 48
- ⑤ 45

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b \\ &= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots \cdots \textcircled{1} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1 \\ &= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } \textcircled{1} &= \textcircled{2} \text{이므로} \\ 2a &= 2a^2, 3a = 4ab + 3a, a + b = 2b^2 + 3b + 1 \\ \text{위의 식을 연립하여 풀면 } a &= 1, b = 0 (\because a \neq 0) \\ \text{즉, } f(x) &= x \text{이므로} \\ f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55\end{aligned}$$

24. $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수는

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와

직선 $y = ax+b$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = |x-1|$ 에서

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x-1|-1|$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히

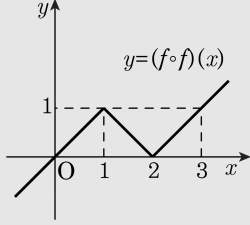
많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는

$y = -x+2$ 이어야 한다.

그런데, $b \neq 0$ 이므로 $y = -x+2$

따라서 $a = -1, b = 2$ 이므로 $ab =$

-2



25. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 가 집합 $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 에서 정의되어 있을 때, $f(x)$ 가 4로 나누어 떨어지지 않는 집합 X 의 원소의 개수를 a 개라 할 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 4개

해설

$f(x)$ 가 4로 나누어 떨어지는 원소를 먼저 구해보면

$f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ 에서 $(x+2)$ 가 2의 배수인 동시에 $(x-1)$ 가 2의 배수인 x 는 존재하지 않으므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

1) $(r \pm 2)$ 가 4의 배수일 경우 : $r = 2, 6, 10$

2) $(x-1)$ 이 4의 배수의 경우 : $x-1=5, 9$

2) $(x-1)$ 이 4의 배수일

$\therefore x = 1, 2, 5, 6, 9, 10$
따라서 $f(x)$ 가 4로 나누어 떨어지지 않는 원소는 3, 4, 7, 8의 4개이다.

 $\therefore a \equiv 4$

26. 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 를 만족하는 $f(x)$ 는?

① $f(x) = x^2 - 4$

② $f(x) = \frac{x}{x+1}$

③ $f(x) = x^2 + 1$

④ $f(x) = 2x$

⑤ $f(x) = \sqrt{x+1}$

해설

$f(x) = 2x$ 에서

$f(a+b) = 2(a+b)$

$f(a)+f(b) = 2a+2b$ 이므로 $f(a+b) = f(a)+f(b)$ 가 성립한다.

∴ ④

27. 모든 실수 x 에 대하여 식 $x^2f(x) + f(1-x) = x^4 - 2x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

식 $x^2f(x) + f(1-x) = x^4 - 2x$ 에서

$x = 2$ 를 대입하면

$$4f(2) + f(-1) = 12 \cdots \textcircled{1}$$

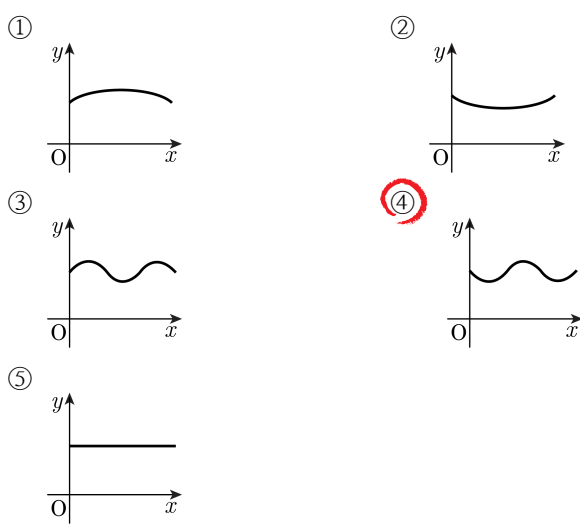
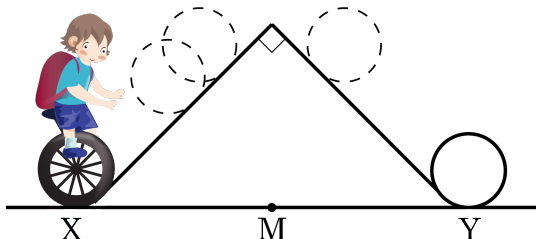
$x = -1$ 을 대입하면

$$f(-1) + f(2) = 3 \cdots \textcircled{2}$$

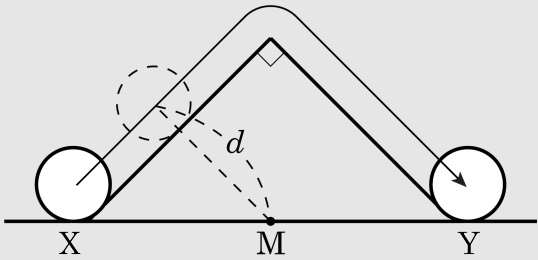
$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $3f(2) = 9$

$$\therefore f(2) = 3$$

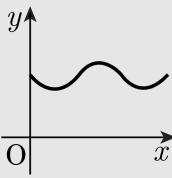
28. 다음 그림과 같이 철수가 외발자전거를 타고 직각이등변삼각형 모양의 장애물을 넘어가려고 한다. 지면과 장애물에 자전거의 바퀴가 동시에 접하는 지면 위의 접점을 X, Y 라 하고, 선분 XY 의 중점을 M 이라 하자. 철수가 X 에서 출발하여 최단 거리로 Y 까지 일정한 속도로 이동할 때, 시간 t 와 점 M 에서 자전거 바퀴의 중심까지의 거리 d 에 대하여 d 를 t 의 함수로 나타낸 그래프의 개형은? (단, 자전거 바퀴의 모양은 항상 원이며 지름의 길이는 장애물의 높이보다 작다.)



해설



따라서 d 를 t 의 함수로 나타낸 그래프는



29. 집합 $D = \{x \mid -2a \leq x \leq a\}$ 에서 집합 $R = \{x \mid x \text{ 는 실수}\}$ 로의 함수 f 가 $f(x) = x^2 + b$ 이고 $f(D) = D$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, $ab \neq 0$)

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

해설

$a \geq -2a$ 이므로 $a > 0$

그림에서

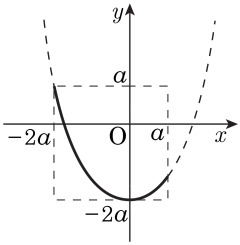
$$f(0) = b = -2a \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} f(-2a) &= 4a^2 + b \\ &= a \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②에서

$$a = \frac{3}{4}, \quad b = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore a + b = -\frac{3}{4}$$



30. 6 명의 학생에게 쪽지시험을 보게 한 후 답안지를 서로 바꾸어서 채점을 하게 하였다. 6 명 모두 자신의 답안지를 가지지 않게 바꿀 수 있는 방법은 몇 가지인가?

- ① 44 ② 60 ③ 108 ④ 126 ⑤ 265

해설

6 명의 답안지를 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 로 놓는다.
 i 가 가진 답안지를 $f(i)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) 로 놓으면
 $(1 - f(1))(2 - f(2))(3 - f(3))(4 - f(4))(5 - f(5))(6 - f(6)) \neq 0$ 인 일대일 대응
 $f : A \rightarrow A$ 의 개수를구하는 것이다.
 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 일 때,
위의 조건을 만족하는 함수 f 의 개수를 a_n 이라 하면 $a_1 = 0, a_2 = 1$ $f(1) = 2$ 인 경우
다음 두 가지 경우를 생각할 수 있다.
(i) $f(2) = 1$ 인 경우 : 이때, f 의 개수는 $3, 4, \dots, n$ 은 모두 겹치지 않게 배열하는 방법 이므로 그 수는 a_{n-2} 이다.
(ii) $f(2) \neq 1$ 인 경우 : $f(2)$ 는 $3, 4, \dots, n$ 의 값이 될 수 있고, 1 은 $f(3), f(4), \dots, f(n)$ 의 함수값이므로 1 은 2 로 바뀌어도 상관없다. 즉, $2, 3, \dots, n$ 은 모두 겹치지 않게 배열하는 가지수이므로 그 수는 a_{n-1} 이다.
(i)(ii) 에서 $f(1) = 2$ 인 경우 f 의 가짓수는 $a_{n-1} + a_{n-2}$ 이고,
 $f(1) = 3, 4, \dots, n$ 인 경우에도 마찬가지이므로
구하는 a_n 은 다음식을 만족한다.
 $a_n = (n - 1)(a_{n-1} + a_{n-2})$
따라서, $a_3 = 2(1 + 0) = 2,$
 $a_4 = 3(2 + 1) = 9,$
 $a_5 = 4(9 + 2) = 44,$
 $a_6 = 5(44 + 9) = 265$

31. $f(x) = |x - 2|$ 일 때, $(f \circ f \circ f)(x) = 0$ 의 모든 실근의 합을 구하면?

① 8

② 6

③ 4

④ 2

⑤ 0

해설

$f(2) = 0$ 이므로

$(f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = 0$ 에서

$(f \circ f)(x) = 2$

또, $f(4) = 2, f(0) = 2$ 이므로

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2$ 에서

$f(x) = 4$ 또는 $f(x) = 0$

(i) $f(x) = |x - 2| = 4$ 일 때, $x = 6$ 또는 $x = -2$

(ii) $f(x) = |x - 2| = 0$ 일 때, $x = 2$

따라서 모든 실근의 합은 $(-2) + 6 + 2 = 6$

32. 자연수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \text{는 홀수}) \\ \frac{x}{2} & (x \text{는 짝수}) \end{cases} \quad \text{로 정의할 때, } f(f(x)) = 2 \text{를 만족시키}$$

는 x 의 값들의 합은?

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$f(f(x)) = 2$ 에서 $f(x) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 2$

i) a 가 홀수일 때 $f(a) = a + 1 = 2$

$\therefore a = 1$

ii) a 가 짝수일 때 $f(a) = \frac{a}{2} = 2 \therefore a = 4$

i), ii)에서 $f(x) = 1$ or $f(x) = 4$

iii) $f(x) = 1$ 일 때 x 가 홀수이면 존재하지 않고

x 가 짝수이면 $x = 2$

iv) $f(x) = 4$ 일 때 x 가 홀수이면 $x = 3$

x 가 짝수이면 $x = 8$

$\therefore f(f(x)) = 2$ 를 만족하는 x 값은 $x = 2, 3, 8$

$\therefore 2 + 3 + 8 = 13$

33. 두 함수 $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $h(x) = 2x+3$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가

$g(h(x)) = f(x+2)$ 를 만족할 때, 함수 $g(x)$ 를 구하면?

- ① $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & (x \geq -2) \\ 0 & (x < -2) \end{cases}$
- ② $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$
- ③ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -2) \\ 0 & (x < -2) \end{cases}$
- ④ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$
- ⑤ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

해설

$x+2=t$ 로 치환한 후 x 를 0 을 기준으로 나누었던 범위를 t 에 관하여 다시 나타낸다.

$x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x$,

$x < 0$ 일 때, $f(x) = 0$

$g(2x+3) = f(x+2)$ 에서 $2x+3=t$ 로 놓으면

$$g(t) = f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \geq 0 \text{ 일 때}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} < 0 \text{ 일 때}\right) \end{cases}$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$$

34. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 2) \\ 4 & (x = 1) \end{cases} \quad \text{로 정의한다.}$$

이때, $f^{100}(1) - f^{100}(4)$ 의 값을 구하여라.

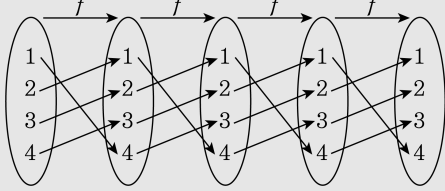
(단, $f^{n+1} = f \cdot f^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$))

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

주어진 함수는 2 이상의 숫자는 1을 빼주고,
1은 4로 대응시킴을 의미한다.
다음 그림처럼 f 를 계속 합성하면
4번째에는 모든 원소가 자기자신으로 대응한다.
 $\therefore f^4(x) = x$
 $\therefore f^{100}(x) = f^{96}(x) = f^{92}(x) = \dots = f^4(x) = x$
 $\therefore f^{100}(1) - f^{100}(4) = 1 - 4 = -3$

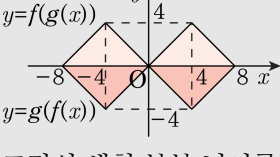


35. 함수 $f(x) = 4 - |x|$, $g(x) = -4 + |x|$ 에서, $y = f(g(x))$ 와 $y = g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

- ① 36 ② 64 ③ 72 ④ 54 ⑤ 108

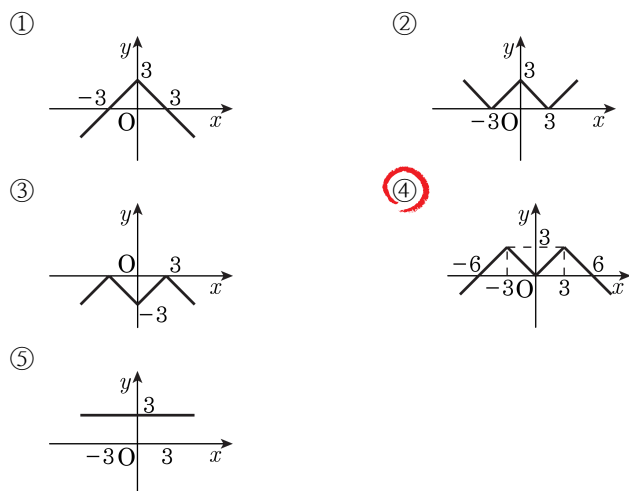
해설

i) $y = f(g(x)) = 4 - |-4 + |x||$ 에서
 $x \geq 4$ 일 때, $y = 4 - (-4 + x) = -x + 8$
 $0 \leq x < 4$ 일 때, $y = 4 + (-4 + x) = x$
 $-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = 4 + (-4 - x) = -x$
 $x < -4$ 일 때, $y = 4 - (-4 - x) = x + 8$
ii) $y = g(f(x)) = -4 + |4 - |x||$ 에서
 $x \geq 4$ 일 때, $y = -4 - (4 - x) = x - 8$
 $0 \leq x < 4$ 일 때, $y = -4 + (4 - x) = -x$
 $-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = -4 + (4 + x) = x$
 $x < -4$ 일 때, $y = -4 - (4 + x) = -x - 8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면
 $\therefore 8 \times 8 = 64$

36. $f(x) = 3 - |x|$, $g(x) = |x| - 3$ 일 때, 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프는?

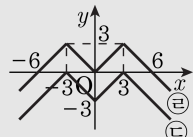
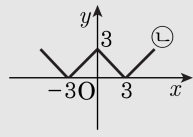
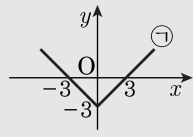


해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 - ||x| - 3|$ 이므로

$y = |x| - 3$ 의 그래프는 ㉠

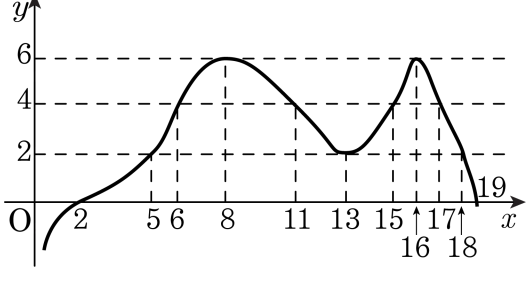
$y = ||x| - 3|$ 의 그래프는 ㉡



$y = -||x| - 3|$ 의 그래프는 ㉣

$y = 3 - ||x| - 3|$ 의 그래프는 ㉤

37. 아래 그림은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. x 에 관한 방정식 $f(f(x+2)) = 4$ 의 서로 다른 실근의 개수와 합을 순서대로 적으면? (단, $x < 2$ 또는 $x > 19$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)



- ① 2, 20
- ② 2, 22
- ③ 3, 30
- ④ 4, 42
- ⑤ 4, 50

해설

$f(f(x+2)) = 4$ 에서 $f(x+2) = a$ 로 놓으면
 $f(a) = 4, y = f(x)$ 와 $y = 4$ 가 만나는 점의 x 좌표가 a 값 이므로
 $a = 6, 11, 15, 17$
 그런데 $f(x+2) \leq 6$ 이므로 $a \leq 6$
 $\therefore a = 6$
 $f(x+2) = 6, \ x+2 = 8, 16$
 $\therefore x = 6, 14$
 $\therefore x$ 값은 2개. 합은 $6 + 14 = 20$