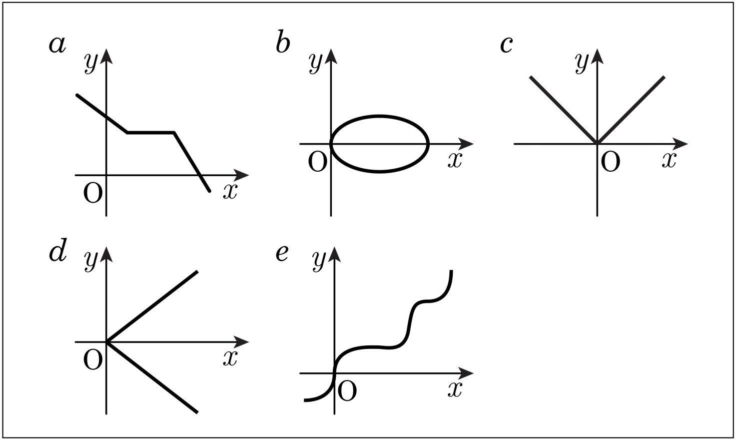
1. 다음 그래프 중 함수인 것은?



① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

[a] 함수 [b] 함수가 아니다. [c] 함수 [d] 함수가 아니다. [e] 함수
따라서 [a], [c], [e]만이 함수이다.

2. 두 집합 $X=\{-1,\ 1,\ 2\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 고르면?

㉠ $f : x \rightarrow x$	㉡ $g : x \rightarrow x+2$
㉢ $h : x \rightarrow \lvert x \rvert$	㉣ $k : x \rightarrow x^2-1$

① ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉡, ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ $f(x)=x$ 에서 $f(-1)=-1$이고 $-1 \notin Y$이므로, 함수가 아니다.

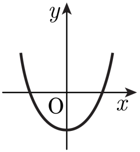
㉡ $g(x)=x+2$ 에서 $g(-1)=1 \in Y$, $g(1)=3 \in Y$, $g(2)=4 \in Y$ 이므로 함수이다.

㉢ $h(x)=\lvert x \rvert$ 에서 $h(-1)=1 \in Y$, $h(1)=1 \in Y$, $h(2)=2 \in Y$ 이므로 함수이다.

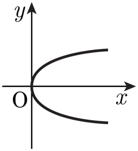
㉣ $k(x)=x^2-1$ 에서 $k(-1)=0 \notin Y$, $k(1)=0 \notin Y$, $k(2)=3 \in Y$ 이므로 함수가 아니다.

3. 다음 중에서 함수의 그래프가 <u>아닌</u> 것을 모두 고르면?

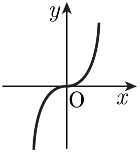
①



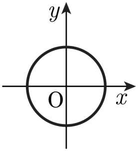
②



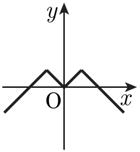
③



④



⑤



해설

②, ④의 그래프는 하나의 x의 값에 대응되는 y가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X에서 Y로의 함수)

4. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-10x-5$, $g(x)=-x^2+2x+10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x)=g(x)$이므로

$2x^2-10x-5=-x^2+2x+10$에서

$3x^2-12x-15=0$, $3(x^2-4x-5)=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$\therefore\ x=5,\ -1$

즉, $x=5$ 또는 $x=-1$일 때 $f(x)=g(x)$이다.

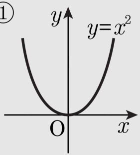
$\therefore\ X=\{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

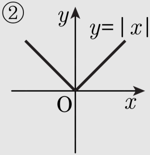
5. 다음 중 일대일 함수는? (x 는 모든 실수)

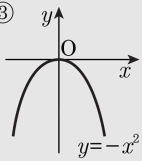
① $f(x) = x^2$　② $f(x) = |x|$　③ $f(x) = -x^2$

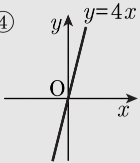
④ $f(x) = 4x$　⑤ $f(x) = 5$

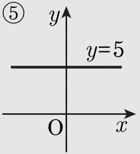
해설

①


②


③


④


⑤


함수 $f : X \to Y$ 에서 정의역 X 의
각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

6. 다음 보기 중 $X=\{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

ㄱ $f: x \rightarrow |x|^2$

ㄴ $g: x \rightarrow x+2$

ㄷ $h: x \rightarrow |x|+1$

ㄹ $i: x \rightarrow x^2-1$

ㅁ $j: x \rightarrow |x|+3$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

ㄱ $f(-1)=|-1|^2=1\in Y$

$f(1)=|1|^2=1\in Y$

$f(2)=|2|^2=4\in Y$

ㄴ $g(-1)=-1+2=1\in Y$

$g(1)=1+2=3\in Y$

$g(2)=2+2=4\in Y$

ㄷ $h(-1)=|-1|+1=2\in Y$

$h(1)=|1|+1=2\in Y$

$h(2)=|2|+1=3\in Y$

ㄹ $i(-1)=i(1)=0\notin Y$

ㅁ $j(2)=5\notin Y$

그러므로 ㄹ, ㅁ은 함수가 될 수 없고 ㄱ, ㄴ, ㄷ 3개 만 함수가 될 수 있다.

7. 집합 $X=\{-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에서 정의된 함수 $f(x)=|x|+1$의 치역을 구하면?

① $\{1\}$　② $\{1,\ 2\}$　③ $\{2,\ 3\}$

④ $\{1,\ 2,\ 3\}$　⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

해설

$x=-2,\ 2$일 때 $f(x)=3$

$x=-1,\ 1$일 때 $f(x)=2$

$x=0$일 때 $f(x)=1$

따라서 f의 치역은 $\{1,2,3\}$

8. 공집합이 아닌 두집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore$ $x = 4$ 또는 $x = -2$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.

$\therefore a = 3$

9. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \le y \le 10\}$ 에 대하여 $f : X \to Y$, $f(x) = ax+b$ $(a > 0)$ 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax+b$ $(a > 0)$ 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b,\ f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \le y \le 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a + b = -5,\ 4a + b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3,\ b = -2$

$\therefore 2a + b = 4$

10. 다음 보기의 함수 중에서 일대일 대응인 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = -x^2 + 1$

㉡ $g(x) = -x + 1$

㉢ $h(x) = x^3$

㉣ $i(x) = 2$

㉤ $j(x) = |2x - 1| \quad (x \geq 1)$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

일대일 대응이란 정의역이 x 에 치역 y 가
하나씩 대응 될 때를 말한다.
㉠, ㉣ 일대일 대응이 아니다.
㉡ 함수가 아니다.
따라서 일대일 대응인 것은 ㉡, ㉢, ㉤ 3개이다.

11. 집합 $X = \{a, b, c\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 21 개

해설

X에서 X로의 함수의 총 개수에서
X에서 X로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.
X에서 X로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$
X에서 X로의 일대일대응의 개수
: $3 \times 2 \times 1 = 6$(개)
$\therefore \quad 27 - 6 = 21$(개)

12. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가
$f(-x)=-f(x)$ 를 만족시키려면
-1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5 가지.
0 이 대응할 수 있는 원소는
$f(-0)=-f(0)$ 에서, $2f(0)=0$,
즉 0 의 1 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1 가지
따라서, 함수 f 의 개수는 $5\times1\times1=5$ (개)

13. 0이 아닌 실수에서 정의되는 두 함수 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 - x$ 에 대하여 $h(x) = f(g(x))$ 라고 할 때, $h(x) = \frac{99}{100}$ 를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하면?

① 95 ② 97 ③ 99 ④ -97 ⑤ -99

해설

$h(x) = f(g(x)) = f(1-x) = 1 - \frac{1}{1-x}$

$= \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$

$h(x) = \frac{99}{100}$ 에서

$\frac{x}{x-1} = \frac{99}{100}$

따라서 $x = -99$

14. 세 함수 $f(x) = 2x+3$, $g(x) = x^2-1$, $h(x) = -x+2$ 에 대하여 $(f\circ(g\circ h))(1)$, $((f\circ g)\circ h))(1)$ 의 값을 각각 a, b 라고 할 때, $2a-b$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} a = (f\circ(g\circ h))(1) &= f((g\circ h)(1)) \\ &= f((g(h(1))) \\ &= f((g(1))) = f(0) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = ((f\circ g)\circ h))(1) &= (f\circ g)(h(1)) \\ &= f(g(h(1))) = 3 \end{aligned}$$

$\therefore\ 2a-b = 2\cdot 3 - 3 = 3$

15. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x에 대하여 성립하므로 $k = 0$

16. 함수 $f(x)$가 $f(3x+1)=2x-1$을 만족할 때, 함수 $f(x)$ 를 구하면?

① $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$ ② $f(x)=\dfrac{3x+1}{2}$ ③ $f(x)=\dfrac{x-2}{3}$
④ $f(x)=\dfrac{2x-5}{3}$ ⑤ $f(x)=\dfrac{2x+3}{3}$

해설

$f(3x+1)=2x-1$에서 $3x+1=t$ 라고 놓으면 $x=\dfrac{t-1}{3}$ 이므로

$$\therefore\ f(t)=2\cdot\frac{t-1}{3}-1=\frac{2t-5}{3}$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{2x-5}{3}$$

17. 세 함수 f, g, h 가 $(g \circ f)(x) = x$, $(h \circ f)(x) = -x+3$ 일 때, $k \circ g = h$ 를 만족시키는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $k(x) = -x+1$　② $k(x) = -x+2$　③ $k(x) = -x+3$

④ $k(x) = -x+4$　⑤ $k(x) = -x+5$

해설

$k \circ g = h$ 이므로 $(k \circ g) \circ f = h \circ f$

$k \circ (g \circ f) = h \circ f$

$k \circ I = h \circ f (\because g \circ f = I,\ I$는 항등함수$)$

$\therefore k = h \circ f (\because k \circ I = I \circ k = k)$

$\therefore k(x) = (h \circ f)(x) = -x+3$

18. 두 함수 $f(x)=2x+3$, $g(x)=-4x-5$ 일 때, $(h\circ f)(x)=g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h\circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5 ② 3 ③ 1 ④ -3 ⑤ -5

해설

$h(x)=ax+b$ 로 놓으면

$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(2x+3)$

$=a(2x+3)+b=2ax+3a+b$

그런데, $(h\circ f)(x)=g(x)$ 이므로

$2ax+3a+b=-4x-5,$

$2a=-4,\ \ 3a+b=-5$

즉, $a=-2, b=1$ 이므로 $h(x)=-2x+1$

$(h\circ g)(-2)=h(g(-2))=h(3)=-5$

해설

$(h\circ f)(x)=g(x)$ 에서

$h(f(x))=g(x)$ 이고 $f(x)=2x+3$ 이므로

$h(2x+3)=g(x)$

또한, $(h\circ g)(-2)=h(g(-2))=h(3)$

$h(3)=g(0)=-5$

19. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \quad \cdots \quad f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

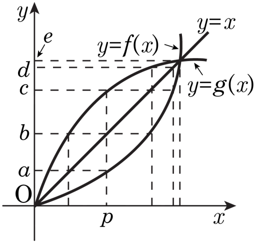
해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$$\therefore \ f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

20. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $(f\circ g)(p)$의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



① a　　② b　　③ c

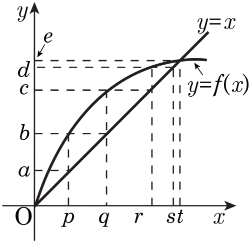
④ d　　⑤ e

해설

주어진 그림에서 $g(p)=c, f(c)=b$

$\therefore (f\circ g)(p)=f(g(p))=f(c)=b$

21. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?



① p ② q ③ r

④ s ⑤ t

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \cdots\cdots$ ㉠

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로

㉠에서 $f(x) = r$

$\therefore r = c$ 에서 $f(x) = r = c$

$\therefore x = q$

22. 두 집합 $X = \{1,\ 2\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

① 2 개 ② 5 개 ③ 10 개

④ 20 개 ⑤ 120 개

해설

$x_1 \neq x_2$ 일 때,

$f(x_1) \neq f(x_2)$ 는 일대일 함수를 의미한다.

즉, $X = \{1,\ 2\}$ 이고 $Y = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 이므로

일대일 함수는 $f(1)$ 이 될 수 있는 것이

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 5 가지

$f(2)$ 가 될 수 있는 것이 $f(1)$ 을 제외한 4 가지

$\therefore\ 5 \times 4 = 20$(개)

23. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g가 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$이고, 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60 ② 55 ③ 51 ④ 48 ⑤ 45

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b$

$= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots\cdots$ ㉠

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1$

$= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots\cdots$ ㉡

모든 실수 x에 대하여 ㉠ = ㉡이므로

$2a = 2a^2,\ 3a = 4ab + 3a,\ a + b = 2b^2 + 3b + 1$

위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1,\ b = 0(\because a \neq 0)$

즉, $f(x) = x$이므로

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$

$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$

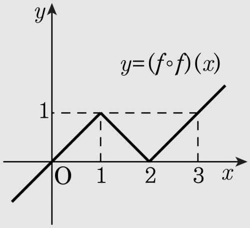
24. $0 \le x \le 2$에서 함수 $f(x) = |x-1|$에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $b \ne 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax + b$의 실근의 개수는
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프와
직선 $y = ax + b$의 교점의 개수와 같다.
$f(x) = |x - 1|$에서
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x - 1| - 1|$
따라서 $0 \le x \le 2$에서
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히 많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는 $y = -x + 2$이어야 한다.
그런데, $b \ne 0$이므로 $y = -x + 2$
따라서 $a = -1$, $b = 2$이므로 $ab = -2$



25. 함수 $f(x)=x^2+x-2$가 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$에서 정의되어 있을 때, $f(x)$가 4로 나누어 떨어지지 않는 집합 X의 원소의 개수를 a개라 할 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4개

해설

$f(x)$가 4로 나누어 떨어지는 원소를 먼저 구해보면

$f(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$에서 $(x+2)$가 2의 배수인 동시에 $(x-1)$가 2의 배수인 x는 존재하지 않으므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

1) $(x+2)$가 4의 배수일 경우 : $x=2,\ 6,\ 10$

2) $(x-1)$이 4의 배수일 경우 : $x=1,\ 5,\ 9$

$\therefore\ x=1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10$

따라서 $f(x)$가 4로 나누어 떨어지지 않는 원소는 $3,\ 4,\ 7,\ 8$의 4개이다.

$\therefore\ a=4$

26. 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족하는 $f(x)$ 는?

① $f(x)=x^2-4$

② $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

③ $f(x)=x^2+1$

④ $f(x)=2x$

⑤ $f(x)=\sqrt{x+1}$

해설

$f(x)=2x$에서

$f(a+b)=2(a+b)$

$f(a)+f(b)=2a+2b$이므로 $f(a+b)=f(a)+f(b)$가 성립한다.

$\therefore$ ④

27. 모든 실수 x 에 대하여 식 $x^2f(x)+f(1-x)=x^4-2x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

식 $x^2f(x)+f(1-x)=x^4-2x$ 에서

$x=2$ 를 대입하면

$4f(2)+f(-1)=12 \cdots$ ㉠

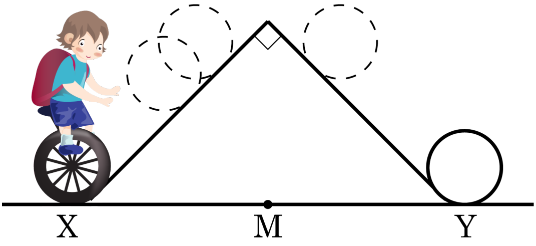
$x=-1$ 을 대입하면

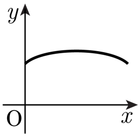
$f(-1)+f(2)=3 \cdots$ ㉡

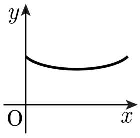
㉠, ㉡ 에서 ㉠ – ㉡ 을 하면 $3f(2)=9$

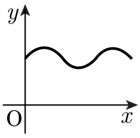
$\therefore\ f(2)=3$

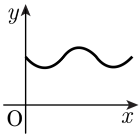
28. 다음 그림과 같이 철수가 외발자전거를 타고 직각이등변삼각형 모양의 장애물을 넘어가려고 한다. 지면과 장애물에 자전거의 바퀴가 동시에 접하는 지면 위의 접점을 X, Y라 하고, 선분 XY의 중점을 M이라 하자. 철수가 X에서 출발하여 최단 거리로 Y까지 일정한 속도로 이동할 때, 시간 t와 점 M에서 자전거 바퀴의 중심까지의 거리 d에 대하여 d를 t의 함수로 나타낸 그래프의 개형은? (단, 자전거 바퀴의 모양은 항상 원이며 지름의 길이는 장애물의 높이보다 작다.)

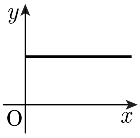


①


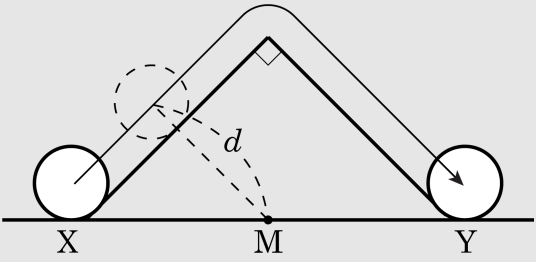
②


③


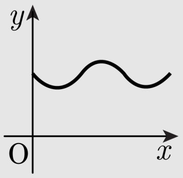
④


⑤


해설



따라서 d 를 t 의 함수로 나타낸 그래프는



29. 집합 $D = \{x \mid -2a \le x \le a\}$ 에서 집합 $R = \{x \mid x \text{ 는 실수}\}$ 로의 함수 f 가 $f(x) = x^2 + b$ 이고 $f(D) = D$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, $ab \neq 0$)

① $-\frac{1}{4}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{3}{4}$　⑤ $-\frac{3}{5}$

해설

$a \ge -2a$ 이므로 $a > 0$

그림에서

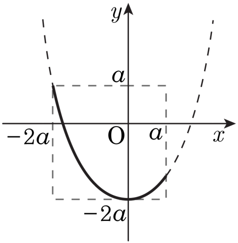
$f(0) = b = -2a \cdots ㉠$

$$f(-2a) = 4a^2 + b$$
$$= a \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$a = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{3}{2}$

$\therefore a + b = -\frac{3}{4}$



30. 6 명의 학생에게 쪽지시험을 보게 한 후 답안지를 서로 바꾸어서 채점을 하게 하였다. 6 명 모두 자신의 답안지를 가지지 않게 바꿀 수 있는 방법은 몇 가지인가?

① 44 ② 60 ③ 108 ④ 126 ⑤ 265

해설

6 명의 답안지를 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 로 놓는다.
i 가 가진 답안지를 $f(i)$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$ 로 놓으면
$(1-f(1))(2-f(2))(3-f(3))(4-f(4))(5-f(5))\ (6-f(6)) \neq 0$
인 일대일대응
$f : A \to A$ 의 개수를구하는 것이다.
$A = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ 일 때,
위의 조건을 만족하는 함수 f 의 개수를 a_n 이라 하면 $a_1 = 0,\ a_2 = 1$ $f(1) = 2$ 인 경우
다음 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

(i) $f(2) = 1$ 인 경우 : 이때, f 의 개수는 $3, 4, \cdots, n$ 은 모두 겹치지 않게 배열하는 방법 이므로 그 수는 a_{n-2} 이다.

(ii) $f(2) \neq 1$ 인 경우 : $f(2)$ 는 $3, 4, \cdots, n$ 의 값이 될 수 있고, 1 은 $f(3),\ f(4),\ \cdots,\ f(n)$ 의 함수값이므로 1 은 2 로 바꾸어도 상관없다. 즉, $2, 3, \cdots, n$ 은 모두 겹치지 않게 배열하는 가지수이므로 그 수는 a_{n-1} 이다.

(i)(ii) 에서 $f(1) = 2$ 인 경우 f 의 가짓수는 $a_{n-1} + a_{n-2}$ 이고,
$f(1) = 3,\ 4,\ \cdots,\ n$ 인 경우에도 마찬가지이므로
구하는 a_n 은 다음식을 만족한다.
$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$
따라서, $a_3 = 2(1+0) = 2$,
$a_4 = 3(2+1) = 9$,
$a_5 = 4(9+2) = 44$,
$a_6 = 5(44+9) = 265$

31. $f(x) = |x-2|$ 일 때, $(f \circ f \circ f)(x) = 0$의 모든 실근의 합을 구하면?

① 8 ② 6 ③ 4 ④ 2 ⑤ 0

해설

$f(2) = 0$ 이므로

$(f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = 0$ 에서

$(f \circ f)(x) = 2$

또, $f(4) = 2,\ f(0) = 2$ 이므로

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2$ 에서

$f(x) = 4$ 또는 $f(x) = 0$

(i) $f(x) = |x-2| = 4$일 때, $x = 6$ 또는 $x = -2$

(ii) $f(x) = |x-2| = 0$일 때, $x = 2$

따라서 모든 실근의 합은 $(-2) + 6 + 2 = 6$

32. 자연수 x에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \ (x\text{는 홀수}) \\ \dfrac{x}{2} (x\text{는 짝수}) \end{cases}$$

로 정의할 때, $f(f(x)) = 2$ 를 만족시키는 x의 값들의 합은?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$f(f(x)) = 2$에서 $f(x) = a$로 놓으면 $f(a) = 2$

i) a가 홀수일 때 $f(a) = a + 1 = 2$

$\therefore a = 1$

ii) a가 짝수일 때 $f(a) = \dfrac{a}{2} = 2 \quad \therefore a = 4$

i), ii) 에서 $f(x) = 1$ or $f(x) = 4$

iii) $f(x) = 1$ 일 때 x가 홀수이면 존재하지 않고

x가 짝수이면 $x = 2$

iv) $f(x) = 4$ 일 때 x가 홀수이면 $x = 3$

x 가 짝수이면 $x = 8$

$\therefore f(f(x)) = 2$ 를 만족하는 x 값은 $x = 2, 3, 8$

$\therefore 2 + 3 + 8 = 13$

33. 두 함수 $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$, $h(x) = 2x+3$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 $g(h(x)) = f(x+2)$ 를 만족할 때, 함수 $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} (x \geq -2) \\ 0 \quad (x < -2) \end{cases}$

② $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} (x \geq -1) \\ 0 \quad (x < -1) \end{cases}$

③ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} (x \geq -2) \\ 0 \quad (x < -2) \end{cases}$

④ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} (x \geq -1) \\ 0 \quad (x < -1) \end{cases}$

⑤ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} (x \geq 0) \\ 0 \quad (x < 0) \end{cases}$

해설

$x+2=t$ 로 치환한 후 x 를 0 을 기준으로 나누었던 범위를 t 에 관하여 다시 나타낸다.

$x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x$,

$x < 0$ 일 때, $f(x) = 0$

$g(2x+3) = f(x+2)$ 에서 $2x+3 = t$ 로 놓으면

$$g(t) = f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \geq 0 \text{일 때}\right) \\ 0 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} < 0 \text{일 때}\right) \end{cases}$$

즉 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} (x \geq -1) \\ 0 (x < -1) \end{cases}$

34. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : A \to A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & (x \geq 2) \\ 4 & (x = 1) \end{cases}$$ 로 정의한다.

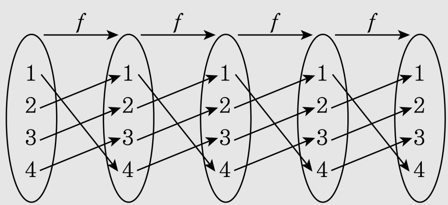
이때, $f^{100}(1) - f^{100}(4)$ 의 값을 구하여라.
(단, $f^{n+1} = f \cdot f^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

주어진 함수는 2 이상의 숫자는 1을 빼주고,
1은 4로 대응시킴을 의미한다.
다음 그림처럼 f 를 계속 합성하면
4 번째에는 모든 원소가 자기자신으로 대응한다.
$\therefore f^4(x) = x$
$\therefore f^{100}(x) = f^{96}(x) = f^{92}(x) = \cdots = f^4(x) = x$
$\therefore f^{100}(1) - f^{100}(4) = 1 - 4 = -3$



35. 함수 $f(x)=4-|x|,\ g(x)=-4+|x|$ 에서, $y=f(g(x))$와 $y=g(f(x))$로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36 ② 64 ③ 72 ④ 54 ⑤ 108

해설

i) $y=f(g(x))=4-|-4+|x||$ 에서

$x\ge 4$ 일 때, $y=4-(-4+x)=-x+8$

$0\le x<4$ 일 때, $y=4+(-4+x)=x$

$-4\le x<0$ 일 때, $y=4+(-4-x)=-x$

$x<-4$ 일 때, $y=4-(-4-x)=x+8$

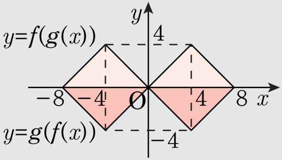
ii) $y=g(f(x))=-4+|4-|x||$ 에서

$x\ge 4$ 일 때, $y=-4-(4-x)=x-8$

$0\le x<4$ 일 때, $y=-4+(4-x)=-x$

$-4\le x<0$ 일 때, $y=-4+(4+x)=x$

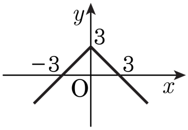
$x<-4$ 일 때, $y=-4-(4+x)=-x-8$

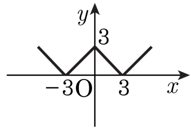


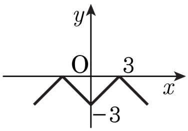
그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

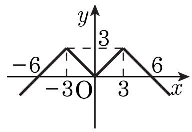
$\therefore\ 8\times 8=64$

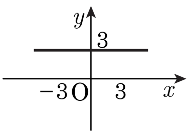
36. $f(x)=3-|x|$, $g(x)=|x|-3$ 일 때, 함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 그래프는?

①


②


③


④


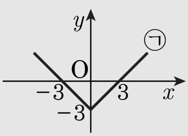
⑤


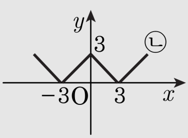
해설

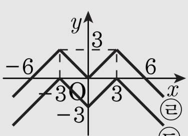
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=3-||x|-3|$ 이므로

$y=|x|-3$ 의 그래프는 ㉠

$y=||x|-3|$ 의 그래프는 ㉡



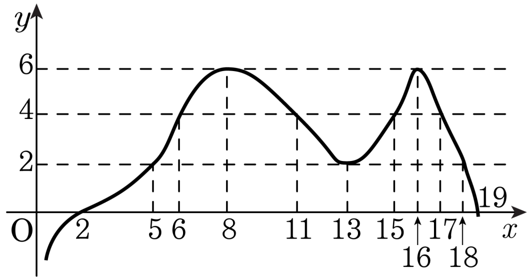




$y=-||x|-3|$ 의 그래프는 ㉢

$y=3-||x|-3|$ 의 그래프는 ㉣

37. 아래 그림은 함수 $y=f(x)$의 그래프이다. x에 관한 방정식 $f(f(x+2))=4$의 서로 다른 실근의 개수와 합을 순서대로 적으면? (단, $x<2$ 또는 $x>19$ 일 때, $f(x)<0$ 이다.)



① 2, 20　② 2, 22　③ 3, 30　④ 4, 42　⑤ 4, 50

해설

$f(f(x+2))=4$ 에서 $f(x+2)=a$ 로 놓으면

$f(a)=4$, $y=f(x)$ 와 $y=4$ 가 만나는 점의 x좌표가 a값 이므로

$a=6, 11, 15, 17$

그런데 $f(x+2)\le 6$ 이므로 $a\le 6$

$\therefore a=6$

$f(x+2)=6,\ \ x+2=8, 16$

$\therefore x=6, 14$

$\therefore x$값은 2개. 합은 $6+14=20$