1. 다음 중 명제가 아닌 것은?

① 6과 18의 최대공약수는 3 이다.

② 설악산은 제주도에 있다.

③ $x = 2$ 이면 $3x = 6$ 이다.

④ $x + 1 < 0$

⑤ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$ 이다.

해설

명제는 참과 거짓을 명확하게 판단할 수 있는 문장이나 식을 말한다. ①, ②는 거짓 명제이고, ③, ⑤는 참인 명제이다. 그러나 ④는 x의 값에 따라서 참일 수도 있고 거짓일 수도 있으므로 명제가 아니다.

2. 다음 중 명제가 아닌 것은?

① 한라산은 제주도에 있다.

② 독도는 섬이 아니다.

③ 19 는 짝수이다.

④ 수학 책은 두껍다.

⑤ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$ 이다.

해설

참인 명제 : ①, ⑤
거짓인 명제 : ②, ③
④의 경우 두껍다는 기준이 모호하므로 명제가 아니다.

3. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$
② $x \le 1$ 또는 $x \ge 2$
③ $x \ge 1$ 또는 $x \le 2$
④ $x \le 1$ 그리고 $x \ge 2$
⑤ $1 \le x \le 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은 $1 \le x \le 2$ 이다.

4. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 n, m에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ a, b가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 a, b에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p 의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
②: 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$이면 $a+b \leqq 2$ (참)

5. 다음 중 '모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.' 의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.

② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.

③ 모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.

④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.

⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

6. 명제 'x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.'는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$ ② $x = 12$ ③ $x = 10$
④ $x = 8$ ⑤ $x = 4$

해설
가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

7. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0$ p_2 : 16의 양의 약수는 모두 짝수이다. p_3 : $\sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 \ (p_n\text{이 명제이다.}) \\ -1 \ (p_n\text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다.($\because$ x 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)
p_2 : 거짓, p_3 : 거짓 → 모두 거짓인 명제이다.
$\therefore$ $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3) = (-1)+1+1 = 1$

8. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 가 $A = \{x \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid h(x) = 0\}$ 일 때, 명제 '$f(x) \neq 0$ 이고 $(g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0)$' 의 부정의 진리집합을 A, B, C 로 나타내면?

① $A^c \cap (B \cup C)^c$　② $A^c \cap (B \cap C)^c$　③ $A \cap (B \cup C)^c$
④ $A \cup (B \cup C)^c$　⑤ $A \cup (B^c \cup C^c)$

해설

명제의 동치 관계를 이용해 보자.
$\sim [f(x) \neq 0$이고$(g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0)]$
$\leftrightarrow f(x) = 0$ 또는 $\sim [g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0]$
$\leftrightarrow f(x)$ 또는 $[g(x) \neq 0$ 이고 $h(x) \neq 0]$
$\leftrightarrow A \cup (B^c \cap C^c)$
$\leftrightarrow A \cup (B \cup C)^c$

9. '모든 중학생은 고등학교에 진학한다' 의 부정인 명제는?

① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.

② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.

③ 고등학교에 진학하지 않는 중학생도 있다.

④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 'p 이면 q 이다' 가 'p 이면 q 가 아니다' 이고, '모든' 의 부정은 '어떤' 이므로 '모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)' 의 부정은 '어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다' 이다.

10. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라고 할 때, 'p 또는$\sim q$'를 만족하는 집합을 구하면?

① $P-Q$　　② $Q-P$　　③ $P^c \cup Q$
④ $P \cup Q^c$　　⑤ $P \cap Q^c$

해설

조건 $\sim q$를 만족하는 집합이 Q^c 이므로 'p 또는$\sim q$'를 만족하는 집합은 $P \cup Q^c$ 이다.

11. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 50 이하의 양의 짝수$\}$ 에 대하여 세 조건 $p : x$는 48 의 약수, $q : 0 < x < 30$, $r : x^2 - 10x + 24 = 0$ 일 때, 'p 이고 q 이고 $\sim r$' 를 만족하는 집합에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 6　② 8　③ 12　④ 16　⑤ 24

해설

조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하면
$P = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$
$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 28\}$
$R = \{4, 6\}$
'p 이고 q 이고 $\sim r$' 를 만족하는 집합은 $P \cap Q \cap R^c$ 이므로
$P \cap Q \cap R^c = \{2, 8, 12, 16, 24\}$

12. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \Rightarrow\ xy = 0$ (참)

13. 다음 중 거짓인 명제를 모두 고른 것은?

① $xy > x + y > 4$ 이면 $x > 2, y > 2$ 이다.

② $x > 1$ 이면 $x^2 > 1$ 이다.

③ $x + y = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다.

④ $x = 1$ 이면 $x^2 = 1$ 이다.

⑤ $2x + 4 > 0$ 이면 $x > -2$ 이다.

해설

① (반례) $x = 1.5,\ y = 10$ 이면 $xy > x + y > 4$ 이지만 $x < 2,\ y > 2$ 이므로 거짓이다.

③ (반례) $x = -1, y = 1$ 이면 $x + y = 0$ 이지만 $x \neq 0,\ y \neq 0$ 이므로 거짓이다.

14. 실수 전체집합에 대하여 세 조건 p, q, r 이 아래와 같을 때 다음 중 참인 명제는?

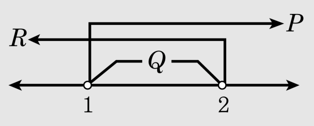
$p : x > 1,\ q : 1 < x < 2,\ r : x < 2$

① $p \rightarrow q$ ② $p \rightarrow r$ ③ $q \rightarrow r$

④ $r \rightarrow p$ ⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$p :\ x > 1,\quad q :\ 1 < x < 2,\quad r :\ x < 2$



$\therefore\ Q \subset P,\ Q \subset R$ 이므로 $q \rightarrow p,\ q \rightarrow r$ (참)

15. 세 조건 $p,\ q,\ r$ 의 진리집합을 $P,\ Q,\ R$ 이라 할 때, $P-Q=R$ 을 만족한다. 다음 <보기> 중 항상 참인 명제를 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $r \to \sim q$　　ㄴ. $r \to p$　　ㄷ. $r \to q$

ㄹ. $\sim r \to \sim p$　　ㅁ. $p \to q$

① ㄱ, ㄴ　　② ㄱ, ㄷ　　③ ㄱ, ㅁ

④ ㄷ, ㄹ, ㅁ　　⑤ ㄴ, ㄹ, ㅁ

해설

$P-Q=R$

따라서, $R \subset P$ 이고 집합간의 관계를 살펴보면

$Q=R^c, R=Q^c$ 이 된다.

이를 명제로 표현하면 $r \to p, q \to \sim r, r \to \sim q$ 이므로 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

16. 전체집합을 $U = \{-1,\ 0,\ 1\}$이라 할 때, 전체집합 U에 대하여 다음 중 참인 명제는?

① 모든 x에 대하여 $x^2 > 1$이다.

② 임의의 x, y에 대하여 $x + y \leq 1$이다.

③ 어떠한 x에 대하여도 $x^2 + 2x \geq -1$ 이다.

④ 적당한 x, y에 대하여 $x^2 - y^2 > 1$이다.

⑤ $x^2 + x < x^3$ 인 x가 존재한다.

해설

① 반례 : $x = 0$ 일 때 $x^2 = 0$ 이므로 주어진 명제 는 거짓이다.
② 반례 : $x = y = 1$ 일 때 $x + y = 2 \geq 1$ 이므로 주 어진 명제는 거짓이다.
③ 모든 x 에 대하여 $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
④ 모든 x, y 에 대하여 $x^2 - y^2 \leq 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
⑤ 모든 x 에 대하여 $x^2 + x \geq x^3$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

17. 명제 '모든 실수 x, y, z에 대하여 $xy = yz = zx$ 이다.'를 부정한 것은?

① 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$ 이다.

② 어떤 실수 x, y, z 에 대하여$xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.

③ 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$이고 $yz \neq zx$ 이다.

④ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$이고 $zx \neq xy$ 이다.

⑤ 어떤 실수 x, y, z에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

해설

'$xy = yz = zx$' 는 '$xy = yz$ 이고 $yz = zx$이고 $zx = xy$' 이므로 '$xy = yz = zx$'의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

18. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

'n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.'

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1,\ 6 \times 3,\ 6 \times 5,\ 6 \times 7,\ 6 \times 9,\ 6 \times 11,\ 6 \times 13,\ 6 \times 15\}$

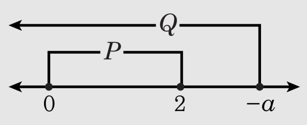
19. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x+a \le 0$이 있다. 명제 $p \to q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \to q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x|0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x|x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

20. 전제집합 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. $P = \{-1, 0, 1\}$, $Q = \{-1, a+3\}$, $R = \{2, 4, 2a+7\}$ 이고 $q \to p, p \to \sim r$ 가 항상 참일 때, a 의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$q \to p, p \to \sim r$ 가 참이므로 $Q \subset P, P \subset R^c$

$\therefore Q \subset P \subset R^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \cdots$ ㉠

㉠에서 $a + 3 = -1$ 또는 0 또는 1

$\therefore a = -4$ 또는 -3 또는 -2

$\{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c \cdots$ ㉡

㉡에서 $2a + 7 \neq -1, 0, 1$

$2a \neq -8, -7, -6$

$\therefore a \neq -4, -\frac{7}{2}, -3$

따라서 ㉠, ㉡ 을 동시에 만족시키는 a 의 값은 -2 이다.

21. 다음 중 그 역이 거짓인 명제를 찾으면?

① 두 집합 A, B 에 대하여 $A \supset B$ 이면 $A \cup B = A$ 이다.

② $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이면 $x + y > 0$ 이다.

③ x 가 3 의 배수이면 x 는 9 의 배수이다.

④ $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.

⑤ $x^2 + y^2 \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.

해설

① 두 집합 A, B 에 대하여 $A \supset B$ 이면 $A \cup B \neq A$ 이다. (참)
② $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이면 $x + y \leq 0$ 이다. $\Rightarrow$ 반례 : $x = -3, \; y = 5$ (거짓)
③ x 가 3 의 배수가 아니면 x 는 9 의 배수가 아니다. (참)
④ $xz \neq yz$ 이면 $x \neq y$ 이다. (참)
⑤ $x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다. (참)

22. a, b, c 는 실수이다. 명제 '$a^2+c^2=2b(a+c-b)$ 이면 $a=b=c$ 이다.'의 대우는 ?

① $a,\ b,\ c$ 가 모두 서로 다른 수이면 $a^2+c^2 \neq 2b(a+c-b)$ 이다.

② $a \neq b$ 이고 $b \neq c$ 이면, $a^2+c^2 \neq 2b(a+c-b)$ 이다.

③ $a,\ b,\ c$ 중 서로 다른 두 수가 있으면 $a^2+c^2 \neq 2b(a+c-b)$ 이다.

④ $a=b=c$ 이면 $a^2+c^2=2b(a+c-b)$ 이다.

⑤ $a \neq b,\ c=0$ 이면 $a^2+c^2=2b(a+c-b)$ 이다.

해설

$a,\ b,\ c$ 중 서로 다른 두 수가 있으면 $a^2+c^2 \neq 2b(a+c-b)$ 이다.

23. 두 조건 $p : x-2 \neq 0$, $q : x^2-ax+2 \neq 0$에서 $q \rightarrow p$가 참일 때, a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$q \Rightarrow p$가 참이면, 대우인 $\sim p \Rightarrow \sim q$ 도 참이다.
$x-2=0 \Rightarrow x^2-ax+2=0 \therefore a=3$

24. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \to q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7　　② -6　　③ -5　　④ -4　　⑤ -3

해설

$p \to q$는 $\sim q \to \sim p$와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,

$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

1) $x = -3\ : 9 + 3a - 6 \leq 0 \ \to\ a \leq -1$

2) $x = 1\ : 1 - a - 6 \leq 0 \ \to\ a \geq -5$

$\therefore\ -5 \leq a \leq -1$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

25. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, $p \Rightarrow q$로 나타내기로 한다. 명제 p, q, r에 대하여 다음 추론 중에서 옳은 것은?

① $p \Rightarrow \sim q$, $r \Rightarrow q$ 이면 $p \Rightarrow r$ 이다.

② $p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow \sim q$ 이면 $\sim p \Rightarrow r$ 이다.

③ $p \Rightarrow \sim q$, $\sim r \Rightarrow q$ 이면 $\sim p \Rightarrow r$ 이다.

④ $q \Rightarrow p$, $\sim q \Rightarrow r$ 이면 $p \Rightarrow r$ 이다.

⑤ $q \Rightarrow \sim p$, $\sim q \Rightarrow r$ 이면 $p \Rightarrow r$ 이다.

해설

① $p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow \sim r$ 이므로 $p \Rightarrow \sim r$
② $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 $p \Rightarrow \sim r$
③ $p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$
④ $\sim p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim p \Rightarrow r$
⑤ $p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

26. 두 명제 $p \rightarrow q$와 $\sim r \rightarrow \sim q$가 모두 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $p \rightarrow r$ ② $\sim q \rightarrow p$ ③ $p \rightarrow \sim q$
④ $r \rightarrow q$ ⑤ $r \rightarrow \sim q$

해설

$p \rightarrow q\,(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p\,(T)$
$\sim r \rightarrow \sim q\,(T) \Rightarrow q \rightarrow r\,(T)$
$\therefore p \rightarrow q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r\,(T)$

27. 다음의 두 진술이 모두 참이라고 할 때, 옳은 것은?

> ㉠ 키가 큰 학생은 농구를 잘한다.
>
> ㉡ 키가 큰 학생은 달리기 또는 수영을 잘한다.

① 키가 큰 학생은 달리기를 잘한다.

② 수영을 잘하는 학생은 농구도 잘한다.

③ 농구를 잘하는 학생은 달리기도 잘한다.

④ 달리기를 못하는 학생은 키가 크지 않다.

⑤ 달리기와 수영을 모두 못하는 학생은 키가 크지 않다.

해설

키가 큰 학생의 집합을 A , 농구를 잘하는 학생의 집합을 B, 달리기를 잘하는 학생의 집합을 C , 수영을 잘하는 학생의 집합을 D 라고 하면,

㉠ $A \subset B$ ㉡ $A \subset (C \cup D)$

① $A \subset (C \cup D)$ 에서 $A \subset C$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

② $D \subset B$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

③ $B \subset C$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

④ $A \not\subset C$ 이므로 $C^c \not\subset A^c$ 에서 거짓이다.

⑤ $A \subset (C \cup D)$ 에서 $(C \cup D)^c \subset A^c$

즉, $C^c \cap D^c \subset A^c$ 이므로 참이다.

28. 어떤 건물에 불이 나서 경찰이 조사하였더니 누군가 방화한 것이고, ‘방화범은 반드시 건물 안에 있었다.’라는 사실을 알아내었으며 불이 난 시간에 건물 안에 있었던 용의자를 잡아 범인으로 단정하였다. 이러한 단정은 반드시 옳은가? 또, 그 근거를 논리적으로 옳게 설명한 것은?

① 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 $\sim q \rightarrow p$도 반드시 참이다.

② 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이라 하여 $q \rightarrow p$가 반드시 참이 되는 것은 아니다.

③ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$도 반드시 참이다.

④ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이라 하여 $q \rightarrow p$가 반드시 참이 되는 것은 아니다.

⑤ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$는 반드시 참이다.

해설

‘방화범은 반드시 건물 안에 있었다.’가 참이라고 해서 ‘건물 안에 있었던 사람이 방화범이다.’도 참이라고 할 수는 없다. 즉, 명제 $p \rightarrow q$가 참이라 하여 그 역인 $q \rightarrow p$가 반드시 참인 것은 아니다.

29. 자연수 n에 대하여 n^2 이 짝수이면 n도 짝수임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

> 주어진 명제의 (가)을(를) 구하여 보면
> (가) : 'n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.'
> 이 때, n 이 홀수이므로
> $n =$ (나)(k는 0 또는 자연수)
> 이 때, $n^2 =$ (나)$^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
> 여기에서 $2(2k^2 + 2k)$ 는 (다)이므로 n^2은 홀수이다.
> $\therefore$ (가)가(이) 참이므로 주어진 명제도 참이다.

① 역, $2k+1$, 0 또는 짝수
② 이, $2k-1$, 홀수
③ 대우, $2k+1$, 0 또는 짝수
④ 대우, $2k-1$, 0 또는 홀수
⑤ 역, $2k+1$, 0 또는 홀수

해설

주어진 증명과정은 '명제가 참이면 그 대우도 참이다'라는 성질을 이용한 것이므로
$\therefore$ (가) : 대우
n 이 홀수이므로 $\therefore$ (나) : $2k+1$
$2(2k^2 + 2k)$ 는 $2 \times$ (정수)의 형태이므로
$\therefore$ (다) : 0 또는 짝수

30. 자연수 n에 대하여 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$로 정의된다. 예를 들어, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이다. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 자연수}\}$에서 두 조건 p, q가 각각 p : 일의 자리가 0인수, q : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 'p 이고 $\sim q$'를 만족하는 집합의 원소의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

'p 이고 $\sim q$' $\Rightarrow$ $P \cap Q^c = P - Q$

ⅰ) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수의 일의 자리가 0이기 위해서는 인수로 2, 5 를 가져야 한다.

$5! = \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 120$

ⅱ) $6! = 6 \times \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 720$

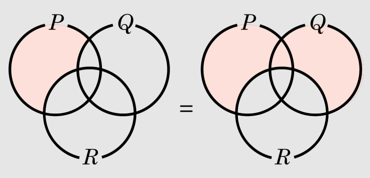
31. 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R이라고 하자. $P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?

① $p \to q$　　② $r \to q$　　③ $q \to p$

④ $p \to r$　　⑤ $q \to r$

해설

$P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$ 벤다이어그램으로 나타내면



$Q\cup R=R \leftrightarrow Q\subset R \therefore\ q\to r$ 가 참이다.

32. 명제 '$|x-1|<1$ 이면 $|x-1| \le 2$ 이다.' 의 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 <u>모두</u> 고른 것은?

① 대우　② 역, 이　③ 이, 대우
④ 역, 대우　⑤ 역, 이, 대우

해설

$\{x \mid |x-1|<1\} = \{x \mid 0<x<2\}$
$\{x \mid |x-1| \le 2\} = \{x \mid -1 \le x \le 3\}$
역 : $|x-1| \le 2$ 이면 $|x-1|<1$ 이다.
$\{x \mid -1 \le x \le 3\} \not\subset \{x \mid 0<x<2\}$ 이므로 거짓이다.
이 : $|x-1| \ge 1$ 이면 $|x-1|>2$ 이다.
$\{x \mid x \le 0$ 또는 $x \ge 2\} \not\subset \{x \mid x<-1$ 또는 $x>3\}$ 이므로 거짓이다.
대우 : $|x-1|>2$ 이면 $|x-1| \ge 1$ 이다.
$\{x \mid x<-1$ 또는 $x>3\} \subset \{x \mid x \le 0$ 또는 $x \ge 2\}$ 이므로 참이다.

33. 다음은 명제 '세 자연수 $a,\ b,\ c$에 대하여, $a^2+b^2=c^2$이면, $a,\ b,\ c$ 중 적어도 하나는 3의 배수이다.'의 참, 거짓을 대우를 이용하여 판별하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우는
> '세 자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2 \neq c^2$'이므로
> $a^2+b^2=3m+[\ ㉠\ ]$, $c^2=3n+[\ ㉡\ ]$
> $\therefore\ a^2+b^2 \neq c^2$ (단, $m,\ n$은 음이 아닌 정수) 따라서 대우가 [㉢] 이므로 주어진 명제도 [㉢] 이다.

위의 과정에서, ㉠, ㉡, ㉢에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 바르게 나열한 것은?

① 1, 0, 참 ② 1, 2, 거짓 ③ 2, 1, 참
④ 2, 0, 참 ⑤ 0, 1, 참

해설

(대우 'a, b, c 모두 3의 배수가 아니라면 $a^2+b^2 \neq c^2$'
이것의 참, 거짓을 증명하는 과정이다.
$a=3p\pm1,\ b=3q\pm1,\ c=3r\pm1$ 이면 $a^2=3(3p^2\pm2p)+1, b^2=3(3q^2\pm2q)+1$ 이므로
$a^2+b^2=3m+2$ (m 은 음이 아닌 정수) 의 꼴이다.
$\therefore [\ ㉠\ ]=2$
그리고 $c^2=3(3r^2\pm2r)+1$ 이므로
$c^2=3n+1$ (n은 음이 아닌 정수) 의 꼴이다.
$\therefore [\ ㉡\ ]=1$
$\therefore a^2+b^2 \neq c^2$
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
$\therefore [\ ㉢\ ]=$ 참

34. 다음은 자연수 n 에 대하여 명제 'n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.' 를 증명한 것이다.

> 주어진 명제의 대우를 구하면 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{(가)}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{(나)}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
> 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{(다)}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{(라)}$ 그러므로 대우가 $\boxed{(마)}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{(마)}$이다.

위의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

① (가) 3 의 배수가 아니다. ② (나) 1

③ (다) 자연수 ④ (라) 3 의 배수이다.

⑤ (마) 참

해설

주어진 명제의 대우는 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{\text{3 의 배수가 아니다}}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{1}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{\text{자연수}}$이므로 n^2 은 $\boxed{\text{3 의 배수가 아니다.}}$
그러므로 대우가 $\boxed{\text{참}}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{참}}$이다.

35. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례를 모두 구할 때, 그 개수는?

n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 9 개

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 경우가 반례가 된다.
n^2 이 12의 배수가 되지만 n 은 12의 배수가 되지 않아야 하므로 $n = 2 \times 3 \times$ (홀수) 의 형태가 되어야 한다. 이에 따라 구해보면$n = 2 \times 3 \times 1,\ 2 \times 3 \times 3,\ \cdots, 2 \times 3 \times 15$
$\therefore n = 6, 18, 30, 42, 54, 66, 78, 90$ (8 개)

36. 두 조건 p, q를 만족시키는 집합 $P = \{x \mid a < x < a+1\}$, $Q = \left\{x \,\middle|\, x + \frac{1}{x} \le -2\right\}$에 대하여 $p \to q$를 참이 되게하는 실수 a의 최댓값을 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

(ⅰ) $x < 0$이면

$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x} \le 0$

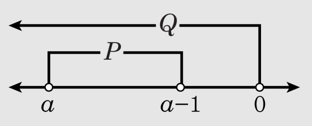
$\therefore \ x + \frac{1}{x} \le -2$

(ⅱ) $x > 0$이면

$x + \frac{1}{x} \ge 2$이므로 Q를 만족시키지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $Q = \{x \mid x < 0\}$

$\therefore \ P \subset Q$에서 $a + 1 \le 0$, $a \le -1$



따라서, $p \to q$를 참이 되게 하는 실수 a의 최댓값은 -1이다.

37. 어떤 심리학자가 사람의 상태를 A, B, C, D, E 의 다섯 가지 유형으로 분류하고 다음과 같은 가설을 세웠다.

> (i) A 형인 사람은 B 형이 아니다.
> (ii) C 형이 아닌 사람은 B 형이 아니다.
> (iii) C 형인 사람은 D 형이 아니다.
> (iv) E 형인 사람은 B 형이다.

이 가설에 의하여 성립하지 <u>않는</u> 것을 보기에서 <u>모두</u> 고르면?

보기

> ㉠ A 형인 사람은 E 형이 아니다.
>
> ㉡ E 형인 사람은 C 형이 아니다.
>
> ㉢ E 형이면서도 D 형인 사람이 있다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

조건 A, B, C, D, E 가 각각 상태가 A, B, C, D, E 인 사람을 나타낼 때, 가설 (i), (ii), (iii), (iv) 를 명제로 표현하면
$A \Rightarrow \sim B$, $\sim C \Rightarrow \sim B$, $C \Rightarrow \sim D$, $E \Rightarrow B$ 이고, 대우를 각각 구해 보면
(i) 의 대우 : B형이면 A형이 아니다.
즉, $B \Rightarrow \sim A$
(ii) 의 대우 : B형이면 C형이다.
즉, $B \Rightarrow C$
(iii) 의 대우 : D형이면 C형이 아니다.
즉, $D \Rightarrow \sim C$
(iv) 의 대우 : B형이 아니면 E형이 아니다.
즉, $\sim B \Rightarrow \sim E$
$E \Rightarrow B$ 이고 $B \Rightarrow \sim A$ 이므로 $E \Rightarrow \sim A$,
즉, $A \Rightarrow \sim E$
$\sim C \Rightarrow \sim B$ 이고 $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $\sim C \Rightarrow \sim E$,
즉, $E \Rightarrow C$
$D \Rightarrow \sim C$, $\sim C \Rightarrow \sim B$, $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $D \Rightarrow \sim E$
따라서 보기 중에서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉢ 이다.

38. 네명의 피의자가 검사에게 다음과 같이 진술하였을때 한 사람의 진술만이 참일 경우의 범인과 한 사람의 진술만이 거짓일 경우의 범인을 차례대로 구하면 ?

A : ‘나는 범인이 아니다.’ B : ‘D가 범인이다.’ C : ‘D는 거짓말을 했다.’ D : ‘C가 범인이다.’

① A와 B　② A와 D　③ B와 A
④ D와 A　⑤ C와 D

해설

1) 한 사람의 진술만 참일 경우
C 가 참 : A가 범인이 된다.
D 가 참 : C, A 가 범인이 되어 모순
A 가 참 : D의 진술의 참 , 거짓이 모순
B 가 참 : D의 진술의 참, 거짓이 모순
$\therefore A$ 가 범인이다.
2) 한 사람의 진술만 거짓인 경우
A 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
B 가 거짓 : D의 진술의 참 거짓이 모순
C 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
D가 거짓 : D가 범인
따라서 D가 범인이다.