1. 세 집합 $A=\{1,4,9\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, $C=\{1,5,9,10\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A\cap B=\{4\}$

② $B\cap C=\varnothing$

③ $A\cup C=\{1,9,10\}$

④ $(A\cap B)\cup C=\{1,4,5,9,10\}$

⑤ $A\cup(B\cup C)=\{1,2,4,5,6,8,9,10\}$

해설

③ $A\cup C=\{1,4,5,9,10\}$

2. 다음 집합들 중 서로소인 것은?

① $A = \{x \mid x = 2n,\ n$은 자연수$\}$, $B = \{x \mid x = 2n - 1, n$은 자연수$\}$

② $A = \{x \mid x = 6m,\ m$은 정수$\}$, $B = \{x \mid x = 3m,\ m$은 정수$\}$

③ $A = \{x \mid x$는 $x^2 \le 4$인 정수$\}$, $B = \{0,\ 1,\ 2\}$

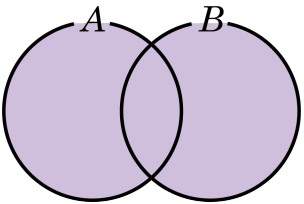
④ $A = \{x \mid x$는 복소수$\}$, $B = \{x \mid x$는 실수$\}$

⑤ $A = \{x \mid 3 \le x < 8\}$, $B = \{x \mid 0 \le x \le 3\}$

해설

A 는 짝수의 집합, B 는 홀수의 집합을 나타내기 때문에 서로소인 집합이 된다.

3. 두 집합 $A = \{x|x$는 10 이상 20 미만의 소수$\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 일 때 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ?



① $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

② $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

③ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 17\}$

④ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

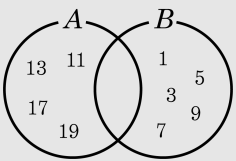
⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면

$A = \{11, 13, 17, 19\}$

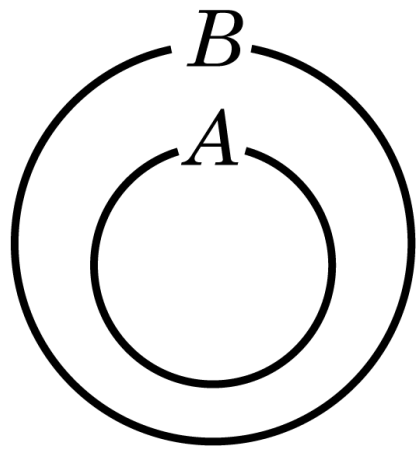
벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



색칠한 부분이 나타나는 원소는

$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ 이다.

4. 다음 벤 다이어그램과 같은 포함 관계일 때, 옳지 <u>않은</u> 것은?



① $A \cap B = A$

② $A - B = \varnothing$

③ $A \cup B = B$

④ $A \subset B$

⑤ $(A \cup B) - B = A$

해설

⑤ $(A \cup B) - B = \varnothing$

5. 전제집합 U 의 부분집합 A, B 에서 집합 $(A \cup B) \cap (A - B)^c$ 을 간단히 한 것은?

① $\varnothing$ ② A ③ B ④ U ⑤ $A \cap B$

해설

$(A \cup B) \cap (A \cap B^c)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup B) = B$

6. 두 집합 A, B 에 대하여 $B = \{a, c, d, e, g\}$, $A \cap B = \{c, d, e\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ 일 때, 집합 A 는?

① $\{b, c, d, e, h\}$

② $\{c, d, e, f, h\}$

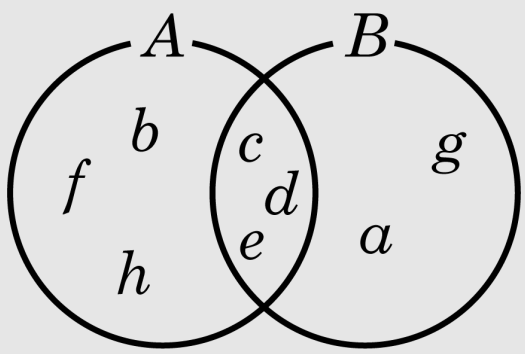
③ $\{a, b, c, d, e, f, h\}$

④ $\{a, b, c, f\}$

⑤ $\{b, c, d, e, f, h\}$

해설

$B = \{a, c, d, e, g\}$, $A \cap B = \{c, d, e\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ 이므로 벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.



그러므로 집합 A는 $\{b, c, d, e, f, h\}$ 가 된다.

7. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{x \mid x$는 10보다 크고 20보다 작은 자연수$\}$, $A \cap B = \{13, 15, 17, 19\}$, $A \cup B = \{x \mid x$는 20 이하의 자연수$\}$일 때, 집합 B의 원소의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

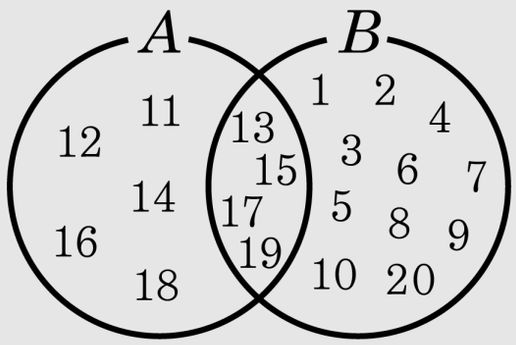
▷ 정답 : 15 개

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면

$A = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$, $A \cap B = \{13, 15, 17, 19\}$

이므로 벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



그러므로 집합 B 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 17, 19, 20\}$ 이 된다.

집합 B 의 원소의 개수는 15 개이다.

8. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = \{x|x\text{는 7보다 작은 자연수}\}$, $A = \{x|x\text{는 6의 약수}\}$ 일 때, 다음 중 집합 B 가 될 수 없는 것은?

① $\{4,\ 5\}$

② $\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$

③ $\{x|x\text{는 } 2 \le x < 7\text{인 자연수}\}$

④ $\{x|x\text{는 7미만의 소수}\}$

⑤ $\{x|x\text{는 5이하의 자연수}\}$

해설

집합$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이므로 집합 B 는 원소 4, 5 를 반드시 포함하는 $A \cup B$ 의 부분집합이다.

④ $\{x|x\text{는 7미만의 소수}\} = \{2,\ 3,\ 5\} \not\ni 4$

9. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$ 이다.

② $A \subset (A \cup B)$

③ $A \cap B = B \cap A$

④ $A \cup \varnothing = A$

⑤ $A \cup A = A$

해설

①$A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$

10. 두 집합 $A = \{x|x$는 15미만의 소수$\}$, $B = \{11,\ 13,\ a,\ a+1\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13\}$ 일 때, a 의 값을 모두 구하면?

① 2 ② 5 ③ 6 ④ 9 ⑤ 10

해설

$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$, $A \cup B = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13\}$ 이므로 $6 \in B$

(i) $a = 6$ 일 때,

$B = \{6,\ 7,\ 11,\ 13\}$

$A \cup B = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13\}$

(ii) $a + 1 = 6$ 일 때,

$a = 5$ 이므로 $B = \{5,\ 6,\ 11,\ 13\}$

$A \cup B = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13\}$

따라서 $a = 5$ 이다.

11. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 8의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 k의 배수$\}$ 에 대하여 $A \cup B = B$ 인 조건을 만족하는 자연수 k 의 값으로 적당하지 <u>않은</u> 것은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$A \cup B = B$ 를 만족하려면 $A \subset B$ 인 관계가 성립하여야 하므로 집합 B 는 집합 A 의 원소인 8 의 배수를 모두 포함하여야 한다. 따라서 k 가 8 의 약수일 때다. 즉 6 의 배수는 8 의 배수 전부를 포함하지 않는다.

12. 두 집합 $A = \{x|x\text{는 } 99 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}, B = \{x|x\text{는 } 99 \text{ 이하의 } 9\text{의 배수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B)$ 의 원소의 개수는?

① 3 개 ② 9 개 ③ 13 개 ④ 31 개 ⑤ 33 개

해설

$n(A) = 33,\ n(B) = 11,\ n(A \cap B) = 11$ 이므로

$n(A \cup B) = 33 + 11 - 11 = 33$

13. 두 집합 A, B 에 대하여 집합 B 가 집합 A 에 포함되고 $n(A \cap B) = 7$, $n(A \cup B) = 29$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 10 ④ 22 ⑤ 32

해설

$B \subset A$ 이므로 $A \cup B = A$, $A \cap B = B$

$\therefore\ n(A) - n(B) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = 29 - 7 = 22$

14. $U = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$ 에 대하여 $A = \{x \mid x$는 8의 약수$\}$, $B^c = \{x \mid x$는 2의 배수$\}$ 일 때, $A^c - B^c$ 은?

① $\{3, 5\}$ ② $\{3, 7\}$ ③ $\{3, 5, 7\}$

④ $\{3, 5, 7, 9\}$ ⑤ $\{3, 5, 7, 8, 9\}$

해설

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B^c = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 이므로

$A^c - B = \{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\} - \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\} = \{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 이다.

15. 100 이하의 자연수의 부분집합 중 자연수 k의 배수의 집합을 A_k라고 할 때, $n(A_2 \cap (A_3 \cup A_9))$의 값은?

① 5 ② 11 ③ 16 ④ 22 ⑤ 33

해설

$A_2 \cap (A_3 \cup A_9) = A_2 \cap A_3 = A_6$

$n(A_6) = 16$

16. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \triangle B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 라고 정의할 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은?(단, $U \neq \varnothing$)

① $A \triangle U = U$ ② $A \triangle B = B \triangle A$ ③ $A \triangle \varnothing = A^c$

④ $A \triangle B = A^c \triangle B^c$ ⑤ $A \triangle A^c = \varnothing$

해설

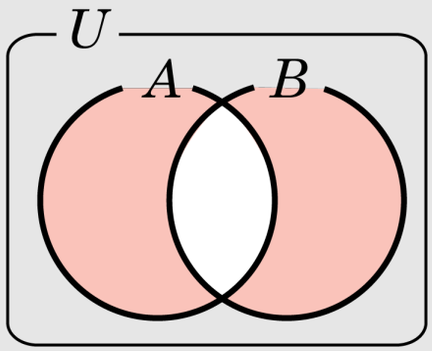
$A \triangle B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 에 따라 $A \triangle U = A$

17. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$ 로 정의할 때, $(A\triangle B)\triangle B$ 와 같은 집합은?

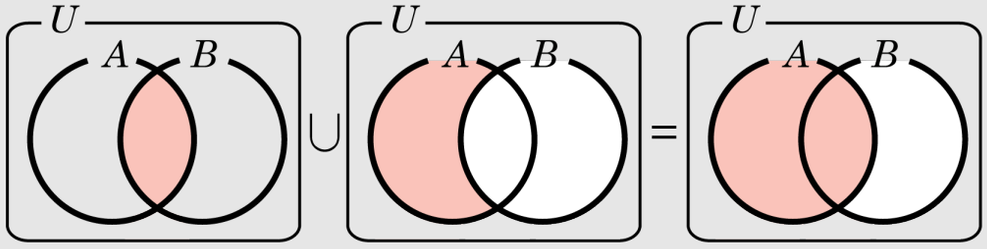
① U ② $\varnothing$ ③ A ④ B ⑤ $A\cap B$

해설

$A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $(A\triangle B)\triangle B = \{(A\triangle B)-B\}\cup\{B-(A\triangle B)\}$ 이므로 이를 벤 다이어그램으로 나타내면



$\therefore (A\triangle B)\triangle B = A$

18. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(U) = 60$, $n(A) = 36$, $n(B) = 29$,$n(A^c \cap B^c) = 8$일 때, $n(A - B)$의 값은?

① 13 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A^c \cap B^c) = 60 - 8 = 52$

이므로

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 36 + 29 - 52 = 13$

$\therefore\ n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 36 - 13 = 23$

19. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A \times B = \{(x,\ y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ 라고 정의하자. 집합 $A = \{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$, $B = \{1,\ 5\}$, $C = \{2,\ 3,\ 4\}$ 일 때, $n((A \times B) \cap (A \times C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

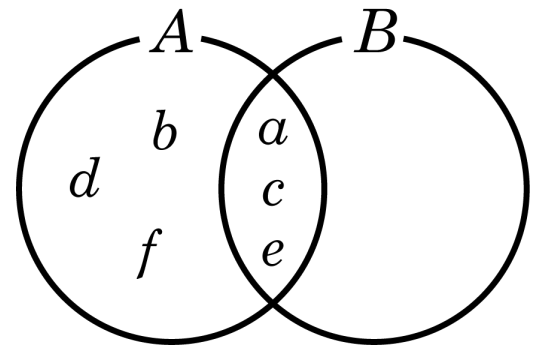
$A \times B = \{(2,\ 1),\ (2,\ 5),\ (3,\ 1),\ (3,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 5),\ (6,\ 1),\ (6,\ 5)\}$

$A \times C = \{(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 2),\ (6,\ 3),\ (6,\ 4)\}$

$\therefore\ (A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$

따라서 $n((A \times B) \cap (A \times C)) = 0$

20. 다음 벤 다이어그램에서 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A \cap B = \{a, c, e\}$ 가 성립할 때, 다음 중 집합 B 가 될 수 있는 것은?



① $\{a, b, c, d, e\}$ ② $\{a, c, d, e, g\}$ ③ $\{b, d, e, f, g\}$

④ $\{a, c, d, e, g\}$ ⑤ $\{a, c, e, g, h\}$

해설

집합 B 는 반드시 $A \cap B = \{a, c, e\}$ 을 포함하여야 한다.
그러나 A 집합에만 존재하는 원소 b, d, f 는 들어갈 수 없다.
① b, d 가 포함되어서 옳지 않다.
② d 가 포함되어서 옳지 않다.
③ b, d, f 가 포함되어서 옳지 않다.
④ d 가 포함되어서 옳지 않다.

21. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16\}$, $B = \{1, 3, 8, 10, 13, 16\}$ 이고 $B \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족할 때 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $B \subset X$

② $X \subset (A \cup B)$

③ $(A \cap B) \subset X \subset B$

④ $(A \cap B) \subset X \subset A$

⑤ $\{10,\ 13\} \subset X$

해설

$B \cap X = X$ 일 때 $X \subset B$ 이고 $(A \cap B) \cup X = X$ 이면 $(A \cap B) \subset X$ 를 만족한다.

① $X \subset B$ 이므로 옳지 않다.

④ $(A \cap B) \subset X \subset B$ 이지만 $X \subset A$ 라고 할 수 없기 때문에 $(A \cap B) \subset X \subset A$ 라고 할 수 없다.

⑤ $\{10,\ 13\} \subset A \cap B$ 이므로 $\{10, 13\} \subset X$ 이다.

22. 다음 두 조건을 만족하는 집합 A 의 부분집합의 개수는?

$A \cap \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{2,\ 5\}$
$A \cup \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

$A \cap \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{2,\ 5\}$ 에서 집합 A 는 원소 2, 5를 포함하고, 원소 3, 4는 포함하지 않는다.
$A \cup \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 A 는 원소 1을 포함한다.
$\therefore\ A = \{1,\ 3,\ 4\}$
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$ (개)이다.

23. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 다음 조건을 모두 만족할 때, $U-(A\cup B)$ 은?

㉠ $U=\{x\mid x$는 10 이하의 자연수$\}$
㉡ $A\cap B^c=\{1\}$
㉢ $A^c\cap B=\{6,10\}$
㉣ $A\cap B=\{2,\ 4,\ 8\}$

① $\{3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$ ② $\{4,\ 5,\ 7,\ 9\}$

③ $\{4,\ 7,\ 9\}$ ④ $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$

⑤ $\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

해설

㉠. $U=\{x\mid x$는 10 이하의자연수$\}$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,9,\ 10\}$
㉡. $A\cap B^c=\{1\}=A-B$
㉢. $A^c\cap B=\{6,\ 10\}=B-A$
㉣. $A\cap B=\{2,\ 4,\ 8\}$에서
$A\cup B=\{1\}\cup\{6,10\}\cup\{2,4,8\}$
$=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 이므로
$U-(A\cup B)=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

24. 집합 $A = \{2, 3 \times a, a + 3\}, B = \{a, 2 \times a + 1, 3 \times a - 2\}$ 이고 $A - B = \{6\}$ 일 때, $C = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $(A - C) \cup (B \cap C)$ 는?

① $\{2, 4\}$ ② $\{2, 5\}$ ③ $\{2, 6\}$

④ $\{2, 5, 6\}$ ⑤ $\{2, 6, 7\}$

해설

$A - B = \{6\}$ 이므로

(1) $3 \times a = 6$ 일 때, $a = 2$ 이다.

따라서 $A = \{2, 5, 6\}, B = \{2, 4, 5\}$ 이고 $C = \{1, 2, 3\}$ 이므로

$(A - C) \cup (B \cap C) = \{5, 6\} \cup \{2\} = \{2, 5, 6\}$ 이다.

(2) $a + 3 = 6$ 일 때, $a = 3$ 이다.

따라서 $A = \{2, 6, 9\}, B = \{3, 7\}$ 이므로 $A - B = \{2, 6, 9\} \neq \{6\}$ 이므로 조건에 맞지 않다.

따라서 (1),(2) 에서 $(A - C) \cup (B \cap C) = \{2, 5, 6\}$ 이다.

25. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 4, 6\}, A \cap B = \{2\}, B \cap A^c = \{1, 3, 5\}, A^c \cap B^c = \{7\}$ 일 때, A^c 은?

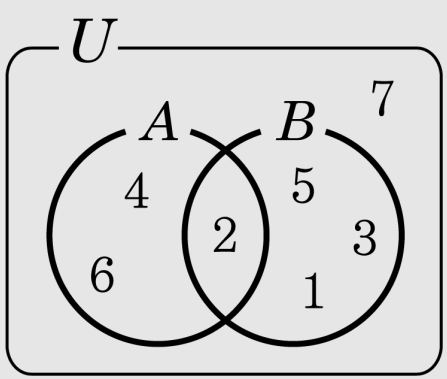
① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 5\}$ ③ $\{1, 7\}$

④ $\{3, 5, 7\}$ ⑤ $\{1, 3, 5, 7\}$

해설

$B \cap A^c = \{7\} = B - A$ 이므로

$A^c = U - A = \{1, 3, 5, 7\}$ 이다.



26. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 20 이하의 소수$\}$에 대하여 $A = \{2,\ 7,\ 11\}$, $B = \{3,\ 7,\ 11,\ 17\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A \cap B = \{7,\ 11\}$

② $A \cap B^c = \{2\}$

③ $A^c \cap B = \{3,\ 17\}$

④ $A^c \cup B^c = \{2,\ 3,\ 9,\ 13,\ 17,\ 19\}$

⑤ $A^c \cap B^c = \{5,\ 13,\ 19\}$

해설

$U = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$,
$A = \{2,\ 7,\ 11\}$, $B = \{3,\ 7,\ 11,\ 17\}$
② $A \cap B^c = A - B = \{2\}$
③ $A^c \cap B = B - A = \{3,\ 17\}$
④ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{2,\ 3,\ 5,\ 13,\ 17,\ 19\}$
⑤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5,\ 13,\ 19\}$

27. 전체집합 $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ 의 두 부분집합 $A = \{7, 19\}$, $B = \{3, 5, 7, 11, 13\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 모두 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$A \cup X = X,\ X \cap (B - A) = \{5,\ 11\}$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A \cup X = X$ 이므로 $A \subset X$

$\therefore 7,\ 19$ 는 X 의 원소

$B - A = \{3, 5, 11, 13\}$ 이고

$X \cap (B - A) = \{5, 11\}$ 이므로

$5,\ 11$ 은 X 의 원소이고 $3,\ 13$ 은 X 의 원소가 아니다.

따라서 X 는 $5,\ 7,\ 11,\ 9$ 를 포함하고 $3,\ 13$ 은 포함하지 않는 전체집합 U 의 부분집합이므로

$2^{8-4-2} = 2^2 = 4$(개)

28. 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{d\}$ 일 때, 다음 중 집합 B가 될 수 있는 것은?

① $B = \{a, b, c\}$ ② $B = \{b, c, d\}$ ③ $B = \{c, d, e\}$

④ $B = \{c, d, f\}$ ⑤ $B = \{d, e, f\}$

해설

$A \cap B = \{d\}$ 이므로 집합 A, B에 동시에 속하는 원소는 d뿐이다. 따라서 집합 B는 A의 원소 중에서 a, b, c는 포함하지 않고 d만을 포함하고 있는 집합이므로 보기에서 조건을 만족하는 것은 $B = \{d, e, f\}$이다.

29. 자연수 n 의 양의 배수의 집합을 A_n 이라 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, m, n 은 자연수)

보기

㉠ $A_5 \cap A_7 = \varnothing$

㉡ $A_4 \cup A_6 = A_4$

㉢ m, n이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$

㉣ $m = kn$(k는 양의 정수) 이면 $A_m \subset A_n$

① ㉠, ㉡, ㉣ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

㉠ $A_5 \cap A_7 = A_{35}$

㉡ $A_4 = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\}$

$A_6 = \{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots\}$ 이므로

$A_4 \cup A_6 = \{4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\} \neq A_4$

㉢ $A_m = \{m,\ 2m,\ \cdots,\ nm,\ (n+1)m,\ \cdots\}$

$A_n = \{n,\ 2n,\ \cdots,\ mn,\ (m+1)n,\ \cdots\}$

m, n이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$

㉣ $A_m = A_{kn} = \{kn,\ 2kn,\ 3kn,\ \cdots\}$

$A_n = \{n,\ 2n,\ 3n,\ 4n,\ \cdots\}$이므로

$A_m \subset A_n$

30. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 를 $A \star B = (A - B^c) \cup (B^c - A)$ 로 정의할 때, $(A \star B) \star A$ 와 같은 집합은?

① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A - B$

해설

$A \star B = (A - B^c) \cup (B^c - A)$

$= (A \cap B) \cup (B^c \cap A^c)$ 이므로

$(A \star B) \star A$

$= [\{(A \cap B) \cup (B^c \cap A^c)\} - A^c]$

$\cup [A^c - \{(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\}]$

$= [\{(A \cap B) \cup (A \cup B)^c\} \cap A]$

$\cup [A^c \cap \{(A \cap B)^c \cap (A \cup B)\}]$

$= [\{(A \cap B) \cap A\} \cup \{A \cap (A \cup B)^c\}]$

$\cup [\{A^c \cap (A \cap B)^c\} \cap (A \cup B)]$

$= [(A \cap B) \cup \{A \cap A^c \cap B^c\}] \cup [\{A \cup (A \cap B)\}^c \cap (A \cup B)]$

$= (A \cap B) \cup \{A^c \cap (A \cup B)\}$

$= (A \cap B) \cup \{(A^c \cap A) \cup (A^c \cap B)\}$

$= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B = B$

31. 전체집합 $U = \{x | x$는 8 이하의 자연수$\}$ 의
세 부분집합 $A = \{x | x$는 8 이하의 홀수$\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$, $C = \{1, 5\}$
가 있다.
전체집합 U 의 두 부분집합 X, Y 에 대하여 $X \circ Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$
이라 할 때, $(A \circ B) \circ C$ 는?

① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 5\}$ ③ $\{1, 7\}$

④ $\{1, 2, 5\}$ ⑤ $\{1, 2, 6, 7\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, A = \{1, 3, 5, 7\}$ 이다.
$X \circ Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ 이므로
$A \circ B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} - \{1, 3\} = \{2, 5, 6, 7\}$ 이다.
따라서 $(A \circ B) \circ C = \{1, 2, 5, 6, 7\} - \{5\} = \{1, 2, 6, 7\}$ 이다.

32. $U = \{x|0 \le x \le 12,\ x$는 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x|x$는 12 이하의 4의 배수$\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ 에 대하여 $n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$ 는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A = \{4, 8, 12\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ 이므로

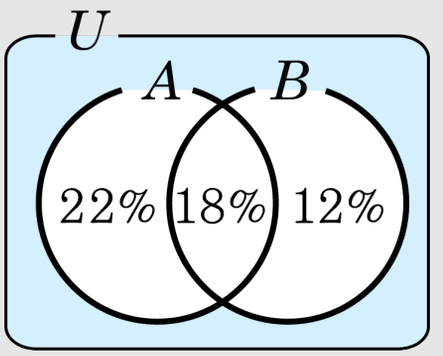
$$n((A \cup B^c) \cup (B \cap A^c)) = n((A - B) \cup (B - A))$$
$$= n(\{3, 7, 11, 12\}) = 4$$

33. 어떤 백화점의 가구점에는 모든 제품의 40%가 수입품이고, 모든 제품의 30%는 가격이 300 만원을 넘는다. 가격이 300만원 이상인 제품의 60%가 수입품이라면 수입되지 않고 가격이 300만원 이하인 제품은 전체의 몇 %인가?

① 22%　② 24%　③ 48%　④ 62%　⑤ 72%

해설

전체집합을 U, 수입품의 집합을 A, 가격이 300만원 이상인 제품의 집합을 B라 하면, 가격이 300만원 이상인 제품(30%) 중에서 수입품은 60%이므로 $A \cap B$는 $\frac{30}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{18}{100}$



즉, 전체의 18%가 된다.

위의 벤 다이어그램에서 $A \cup B$는 52%를 차지한다. 300 만원 이하의 제품 중 수입품이 아닌 것은 위의 어두운 부분에 해당하므로 전체의 48%가 된다.

34. 집합 $A_n = \{x \mid 3n-1 \le x \le 9n+6,\ n$은 자연수$\}$에 대하여 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$이 성립하는 n의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

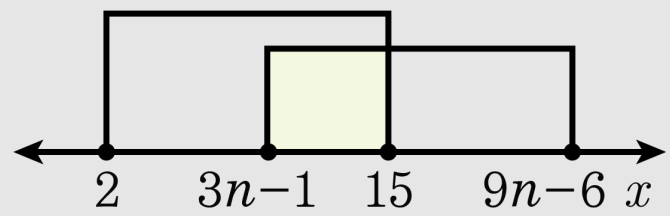
$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$이므로

$A_1 \cap A_n \neq \varnothing$

$A_1 = \{x \mid 2 \le x \le 15\}$,

$A_n = \{x \mid 3n-1 \le x \le 9n+6\}$

A_1, A_n을 수직선 위에 나타낼 때 아래와 같은 꼴이어야 문제의 조건을 만족시킨다.



따라서, $3n-1 \le 15$, $n \le \frac{16}{3}$ $\therefore$ 최댓값은 $n = 5 (\because\ n$은 자연수$)$

35. z이 0이 아닌 복소수라 할 때,

$\overline{z+\bar{z}} = z+\bar{z}$인 z을 C_1,

$C_2 = \{z \in C^* \mid \overline{z-\bar{z}} = z-\bar{z}\}$

$C_3 = \{z \in C^* \mid z^2 = -z\bar{z}\}$

$C_4 = \left\{ z \in C^* \,\middle|\, \overline{\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)} = \frac{\bar{z}}{z} \right\}$

에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① $C_1 \cap C_2 = C_3$ ② $C_2 \cap C_3 = C_1$ ③ $C_3 \cap C_4 = C_2$

④ $C_2 \cup C_3 = C_4$ ⑤ $C_3 \cup C_4 = C_1$

해설

$z = a+bi$, $\bar{z} = a-bi$ (a, b는 실수)라 하면

i) $\overline{z+\bar{z}} = z+\bar{z}$이므로 $z+\bar{z}$가 실수

그런데 $z+\bar{z} = 2a$ (실수)가 항상 성립한다.

$\therefore$ C_1은 복소수 전체의 집합이다.

ii) $\overline{z-\bar{z}} = z-\bar{z}$이므로 $z-\bar{z}$가 실수

그런데 $z-\bar{z} = 2bi$가 실수 이므로 $b = 0$이다.

$\therefore$ C_2은 실수의 집합이다.

iii) $z^2 = -z\bar{z} = 0$, $z(z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z+\bar{z} = 0$

($\because z \neq 0$)

$z+\bar{z} = 2a = 0$이므로 $a = 0$이다.

$\therefore$ C_3은 순허수의 집합이다.($\because z \neq 0$)

iv) $\overline{\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)} = \frac{\bar{z}}{z}$, $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z} \Leftrightarrow z^2 = \overline{2^2}$

$(z-\bar{z})(z+\bar{z}) = 0$에서 $z = \bar{z}$ 또는 $z = -\bar{z}$

따라서 z는 실수 또는 순허수이다.

$\therefore$ C_4는 실수와 순허수의 합집합이다.

i) ~ iv)에 의하여 $\therefore$ $C_2 \cup C_3 = C_4$

36. 두 집합 $A = \{2,\ 1,\ a+3,\ b\}$, $B = \{4,\ a,\ b+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

(i) $a+3=4$ 일 때, $a=1$

$A = \{2,\ 1,\ 4,\ b\}$

$B = \{4,\ 1,\ b+1\}$

$b+1=2,\ b=1(\times)$

(ii) $b=4$ 일 때,

$A = \{2,\ 1,\ a+3,\ 4\}$

$B = \{4,\ a,\ 5\}$

$a+3=5,\ \ a=2(\bigcirc)$

$\therefore\ a+b=2+4=6$

37. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 두 부분집합이 A, B 일 때, 다음 각 조건을 만족하는 집합의 순서쌍 (A, B) 의 개수를 구하여라.

(1) $A \cap B = \varnothing$
(2) $A \cup B = U$

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 16 개

해설

$A \cap B = \varnothing$ 이고 $A \cup B = U$ 이면 $n(A) + n(B) = n(U) = 4$
$n(A) = 0,\ n(B) = 4$ 인 경우 : 1 개
$n(A) = 1,\ n(B) = 3$ 인 경우 : 4 개
$n(A) = 2,\ n(B) = 2$ 인 경우 : 6 개
$n(A) = 3,\ n(B) = 1$ 인 경우 : 4 개
$n(A) = 4,\ n(B) = 0$ 인 경우 : 1 개
따라서 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ (개)

38. $f_k(a) = (a$ 를 k 로 나누었을 때의 나머지$)$ 라고 정의한다.
자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 $A_k = \{x | f_k(x^2) = 1, x < 10\}$ 에 대하여 $n(A_3 \cap A_4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f_k(a) = (a$ 를 k 로 나누었을 때의 나머지$)$,
$A_k = \{x | f_k(x^2) = 1, x < 10\}$ 라는 조건에서
x^2 의 값이 될 수 있는 수는 $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81$ 이다.
$A_3 = \{1,\ 4,\ 16,\ 25,\ 49,\ 64\}$,
$A_4 = \{1,\ 9,\ 25,\ 49,\ 81\}$,
$A_3 \cap A_4 = \{1,\ 25,\ 49\}$ 이다.
따라서, $n(A_3 \cap A_4) = 3$ 이다.

39. 집합 $A_k = \{x | x$는 k의 배수$\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A_2 \cap A_4 \cap A_{16} = A_{16}$

② $A_3 \cup A_6 \cup A_9 = A_3$

③ $A_4 \cup A_{12} = A_4$

④ $A_6 \cup A_{12} = A_6$

⑤ $A_9 \cap A_{18} = A_9$

해설

⑤ $A_9 \cap A_{18} = A_{18}$

40. 집합 $S = \{x \mid x < 100, x$는 자연수$\}$의 부분집합 A 가 다음 조건을 만족할 때 A^c 의 원소 중 가장 큰 수를 구하여라.

㈎ $4 \in A,\ 5 \in A$
㈏ $p \in A,\ q \in A$ 이면 $p+q \in A$

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$4, 5$ 는 집합 A 의 원소가 될 수 있는 수들을 나열해 보면
$4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ \cdots, 99$ 이다.
따라서 $A^c = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$ 이고,
A^c 에서 가장 큰 원소는 11 이다.

41. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A , B 에 대하여 $A \cap \{1, 3\} = B$, $B \cup \{2, 3, 4\} = A$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$B \cup \{2, 3, 4\} = A$ 이면 $B \subset A$, $\{2, 3, 4\} \subset A$
$A \cap \{1, 3\} = B$ 이면 $\{3\} \subset B \subset \{1, 3\}$
따라서 B 는 $2, 4, 5$ 를 원소로 가질 수 없으므로 $n(B)$ 의 최댓값은 2
$n(B) = 2$ 일 때, $B = 1, 3$ 이고, $A \cap \{1, 3\} = B$ 에서 $1 \in A$
또, $5 \in A$ 라고 가정하면, $B \cup \{2, 3, 4\} = A$ 에서 $5 \in B$ 이어야 하므로 모순
따라서 $5 \notin A$, $n(A)$ 의 최댓값은 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때 4
따라서 $n(A) + n(B)$ 의 최댓값은 $2 + 4 = 6$

42. 집합 $N = \{x \mid x$는 100이하의 자연수$\}$의 부분집합 $A_n = \{x \mid x$는 n의 배수$\}$에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

㉠ $A_2 \subset A_4$

㉡ $A_3 \subset A_4 = A_{12}$

㉢ $A_4 \cup A_6 \subset A_2$

㉣ $(A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_4) = A_{12}$

㉤ $n(A_4) > n(A_2)$

㉥ $A_3 - A_4 = A_3 - A_{12}$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

▷ 정답: ㉢

▷ 정답: ㉥

해설

㉠$A_2 \subset A_4 \rightarrow A_4 \subset A_2$

㉡$A_3 \subset A_4 = A_{12} \rightarrow$ 옳다.

㉢$A_4 \cup A_6 \subset A_2 \rightarrow A_4 \subset A_2$ 이고 $A_6 \subset A_2$ 이므로 옳다.

㉣$(A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_4) = A_{12} \rightarrow A_6 \cup A_{12} = A_6$ 이므로 옳지 않다.

㉤$n(A_4) > n(A_2) \rightarrow A_4 \subset A_2$ 이므로 옳지 않다.

㉥$A_3 - A_4 = A_3 - A_{12} \rightarrow 3$ 의 배수에서 4 의 배수인 것을 제외한 집합은, 3 의 배수에서 12 의 배수를 제외한 집합과 같으므로 옳다.

43. 두 집합 $A = \left\{4,\ 3a,\ \frac{3}{a}+1\right\}$, $B = \{a,\ a+1,\ 4a-3\}$ 에 대하여 $A - B = \{2\}$ 일 때, A 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$A - B = \{2\}$ 이므로 2는 A 의 원소이다.

(i) $3a = 2$ 이면 $a = \frac{2}{3}$

$A = \left\{\frac{11}{9},\ 2,\ 4\right\}$, $B = \left\{-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right\}$

$A - B = A$ 이므로 문제의 조건과 맞지 않는다.

(ii) $\frac{a}{3}+1 = 2$ 이면$a = 3$

$A = \{2, 4, 9\}, B = \{3, 4, 9\}$

$A - B = \{2\}$이므로 문제의 조건에 적합

$\therefore a = 3$

44. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합인 A, B 가 각각

$A = \left\{x|x = 3p + \frac{1}{2}q, p \in N, q \in N\right\}$, $B = \{x|x\text{는 } 10\text{보다 작은 소수}\}$

일 때, $n(A^c \cup B)^c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$A = \left\{x|x = 3p + \frac{1}{2}q, p \in N, q \in N\right\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, \cdots\}$

$B = \{x|x\text{는 } 10\text{보다 작은 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$

$n(A^c \cup B)^c = A^c \cap B = B - A = \{2, 3\}$ 이므로

$n(A^c \cup B)^c = 2$

45. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 $A = \{x|x < 10\}$, $B = \{x|x^2 - 1 = 3n,\ x \in A, n \in N\}$ 에 대하여 $n(A \cap B^c)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

집합 A, B 는 자연수 전체 집합의 부분집합이므로

$A = \{x|x < 10\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$,

$B = \{x|x^2 - 1 = 3n,\ x \in A, n \in N\} = \{2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$,

$A \cap B^c = A - B = \{1,\ 3,\ 6,\ 9\}$,

따라서, $n(A \cap B^c) = 4$

46. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c \cap X^c = \{8\}$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 U 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 이고,

$A^c \cap B^c \cap X^c = (A \cup B)^c - X$

$(A \cup B)^c = \{7, 8\}$ 이므로 X 는 반드시 7 을 원소로 가져야 한다.

또, $A - B = \{1, 2, 3\}$ 이고, $(A - B) \cup X = X \Rightarrow A - B \subset X$ 이므로

X 는 반드시 1, 2, 3 을 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2^{8-3-1} = 16$ (개)

47. $n(U) = 50$ 인 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, $n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))$ 의 값을 구하여라.

- $n(A) = 38,\ n(B) = 31,\ n(C) = 27$
- $n(A \cap B \cap C) = 9,\ n((A \cup B \cup C)^c) = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$n(U) = 50$, $n((A \cup B \cup C)^c) = 0 \rightarrow n(A \cup B \cup C) = 50$,
$n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(C \cap A)+n(A \cap B \cap C) =$ 50 이므로,
$38 + 31 + 27 - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + 9 = 50$,
$\rightarrow n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 55$
$\therefore n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) = n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 2 \times n(A \cap B \cap C) = 55 - 18 = 37$

48. 전체집합U 의 두 부분집합A, B 에 대하여 연산 $\bigstar$를$A\bigstar B = (A - B) \cup (B - A)$ 로 정의할 때,<보기>중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A\bigstar B = B\bigstar A$

㉡ $(A\bigstar B)\bigstar C = A\bigstar(B\bigstar C)$

㉢ $A^c\bigstar B^c = A\bigstar B$

㉣ $A\bigstar A\bigstar A = A$

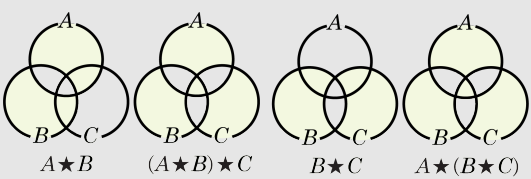
① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $A\bigstar B = (A - B) \cup (B - A)$,
$B\bigstar A = (B - A) \cup (A - B)$
$\therefore\ A\bigstar B = B\bigstar A$

㉡ 연산 $\bigstar$은 두 집합의 합집합에서 교집합을 빼는 것이므로 벤다이어그램을 그려서 확인해 보면 결합법칙이 성립함을 알 수 있다.



㉢ $A^c\bigstar B^c = (A^c - B^c) \cup (B^c - A^c)$
$= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A)$
$= (B - A) \cup (A - B)$
$= A\bigstar B$

㉣ $A\bigstar A = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing$,
$A\bigstar A\bigstar A = \varnothing\bigstar A = (\varnothing - A) \cup (A - \varnothing) = A$

$\therefore$ 모두 옳다.

49. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고 A는 1 을 포함하는 X 의부분집합이고 B는 5 를 포함하는 X의 부분집합일 때, $A \cup B$의 원소의 개수는?

① 32 ② 40 ③ 48 ④ 50 ⑤ 52

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$,

$n(A) = 2^5 = 32$, $n(B) = 2^5 = 32$

$n(A \cap B)$ 는 $1, 5$ 를 모두 포함하는 X의 부분집합의 개수이므로

$n(A \cap B) = 2^4 = 16$

$\therefore\ n(A \cup B) = 2^5 + 2^5 - 2^4 = 32 + 32 - 16 = 48$

50. 두 자리의 자연수 중에서 2 의 배수이거나 3 의 배수이면서 8 의 배수가 아닌 것은 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 56 개

해설

$U = \{10, 11, 12, 13, \cdots, 99\}$ 이고,
2 의 배수의 집합을 A , 3 의 배수의 집합을 B , 8 의 배수의 집합을 C 라고 하면,
2 의 배수이거나 3 의 배수이면서 8 의 배수가 아닌 것의 집합은 $(A \cup B) - C$ 이다.
$n((A \cup B) - C) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$,
$A \cap B$ 는 6 의 배수의 집합이고, $A \cap B \cap C$ 는 24 의 배수의 집합이므로
$45 + 30 - 15 - 4 = 56$