

1. $3x = 2y \neq 0$ 일 때, $\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy}$ 의 값은?

① $\frac{5}{12}$

② $\frac{12}{5}$

③ $\frac{7}{12}$

④ $\frac{12}{7}$

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

$3x = 2y \neq 0$ 에서 $x : y = 2 : 3$

따라서 $x = 2k$, $y = 3k$ ($k \neq 0$)로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy} &= \frac{3(2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 3k}{(2k)^2 + 2k \cdot 3k} \\ &= \frac{12k^2 + 12k^2}{4k^2 + 6k^2} = \frac{24k^2}{10k^2} = \frac{12}{5}\end{aligned}$$

2. 수열 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \dots$ 의 제 15 항까지의 합은?

① $\sqrt{14} - 1$

② $\sqrt{15} - 1$

③ 3

④ $\sqrt{15} + 1$

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})} \\ &= -\sum_{k=1}^{15} (\sqrt{k}-\sqrt{k+1}) \\ &= -\{(1-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-\sqrt{3}) + \dots\} \\ &\quad - \{(\sqrt{15}-\sqrt{16})\} \\ &= -(1-\sqrt{16}) = \sqrt{16}-1 = 4-1 = 3 \end{aligned}$$

3. 함수 $y = 2|x - 1| - 2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = 2|x - 1| - 2$$

(i) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x - 1) - 2 = -2x$

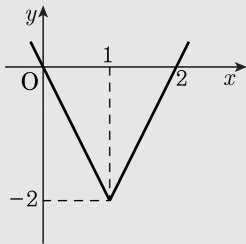
(ii) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2(x - 1) - 2 = 2x - 4$

따라서 $y = 2|x - 1| - 2$ 의 그래프와

x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

다음 그림에서

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$



4. 표의 빈칸에 6개의 자연수를 하나씩 써 넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈칸에 써 넣을 6개의 수의 합을 구하여라.

3		7
	11	

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

3	5	7
6	8	10
9	11	13

$$\therefore 5 + 6 + 8 + 10 + 9 + 13 = 51$$

5. 첫째항이 45이고, 공차가 -4인 등차수열은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음 음수가 되는가?

① 23

② 24

③ 25

④ 26

⑤ 27

해설

첫째항이 45이고, 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

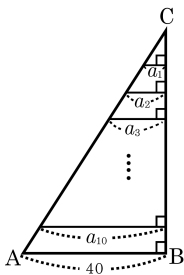
$$\frac{n\{2 \cdot 45 + (n-1) \cdot (-4)\}}{2} = n(47 - 2n)$$

$$n(47 - 2n) < 0 \text{에서 } n < 0 \text{ 또는 } n > \frac{47}{2}$$

$$n > 0 \text{이므로 } n > \frac{47}{2} = 23.5$$

따라서 주어진 수열은 첫째항부터 제 24항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

6. 오른쪽 그림과 같이 밑변 AB 의 길이가 40인 직각삼각형 ABC 가 있다. 변 AC 를 11등분하여 변 AB 와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 이라 할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▶ 정답 : 200

해설

$$a_1 + a_{10} = 40, a_2 + a_9 = 40, \dots, a_5 + a_6 = 40 \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 40 \times 5 = 200$$

7. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots \textcircled{㉡}$$

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$$

8. $\frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{6}}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

② $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

③ $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

④ $\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{6}} &= \frac{\sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{3 \cdot 2}} \\ &= \frac{2 + \sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{2 + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}(2 + \sqrt[3]{3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

9. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. $x \neq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f\left(2g(x) - \frac{x}{x-1}\right) = x$ 라 할 때, $f(2)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= x \\ \therefore 2g(x) - \frac{x}{x-1} &= g(x) \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

$f(2) = k$ 라고 하면

$$g(k) = 2 \Rightarrow k = 2$$

10. 함수 $y = \frac{1}{x+2} + 2$ 의 그래프가 $y = ax + b$, $y = cx + d$ 에 대하여 대칭이 될 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

점근선의 교점이 $(-2, 2)$ 이므로

두 직선 $y = ax + b$ 와 $y = cx + d$ 에 대하여

대칭이 되려면 $a = 1$, $c = -1$

따라서 $y - 2 = x + 2$ 또는 $y - 2 = -(x + 2)$

$\therefore y = x + 4$ 또는 $y = -x$

$\therefore b = 4$, $d = 0$

$\therefore a + b + c + d = 4$

11. 두 수열

$$\{a_n\} = 6, a_2, a_3, 48, \dots$$

$$\{b_n\} = 6, b_2, b_3, 48, \dots \text{에 대하여}$$

$\{a_n\}$ 은 등비수열, $\{b_n\}$ 은 등차수열일 때, $a_{10} - 10b_{10}$ 의 값은?(단, 공비는 실수이다.)

- ① 1752 ② 1843 ③ 1950 ④ 2250 ⑤ 2356

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 $a_4 = 48$ 이므로

$$6r^3 = 48, r^3 = 8 \quad \therefore r = 2 (\because r \text{은 실수})$$

$$a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$$

수열 $\{b_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $b_4 = 48$ 이므로

$$6 + 3d = 48, 3d = 42 \quad \therefore d = 14$$

$$b_n = 6 + (n-1) \cdot 14 = 14n - 8$$

$$\therefore a_{10} - 10b_{10} = 6 \times 2^9 - 10(14 \cdot 10 - 8)$$

$$= 3072 - 1320 = 1752$$

12. 자연수 n 에 대하여 $1^n + 2^n + 3^n$ 을 10으로 나눈 나머지를 a_n 으로 정의하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a_2 + a_4 = 12$

㉡ $a_{n+1} = a_{n+5}$

㉢ $\sum_{k=1}^{102} a_k = 610$

① ㉠

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $n = 2$ 일 때, $1^2 + 2^2 + 3^2$ 에서 일의 자리 수만 생각하면
 $1 + 4 + 9 = 14$ 이므로 $a_2 = 4$

$n = 4$ 일 때, $1^4 + 2^4 + 3^4$ 에서 일의 자리 수만 생각하면
 $1 + 6 + 1 = 8$ 이므로 $a_4 = 8$

$\therefore a_2 + a_4 = 12$ (참)

㉡ 1^n 의 일의 자리 수는 항상 1

$2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ 의 일의 자리 수는 각각

$2, 4, 8, 6, 2, 4, \dots$

$3, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$ 의 일의 자리 수는 각각

$3, 9, 7, 1, 3, 9, \dots$

따라서 1^{n+4} 과 1^n , 2^{n+4} 과 2^n , 3^{n+4} 과 3^n 의 일의 자리 수가 각각 같으므로

$a_{n+1} = a_{n+5}$ (참)

㉢ ㉡에서 $a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 6, \dots$ 이고
 $102 = 4 \times 25 + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{102} a_k &= (6 + 4 + 6 + 8) \times 25 + (6 + 4) \\ &= 610(\text{참}) \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.