

1. $\left(\frac{x^3}{y^a}\right)^4 = \frac{x^b}{y^{16}}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\left(\frac{x^3}{y^a}\right)^4 = \frac{x^{12}}{y^{4a}} = \frac{x^b}{y^{16}} \text{ 이므로 } 4a = 16$$

따라서 $a = 4$ 이고 $b = 12$ 이다.

$$\therefore a + b = 4 + 12 = 16$$

2. $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 2^x \times 3^y \times 5^z \times 7$ 이다. 이때, $x + y + z$ 의 값은?

① 8

② 10

③ 14

④ 21

⑤ 25

해설

$2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times (2 \times 5) = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$
이므로

$x = 8, y = 4, z = 2$ 이다.

그러므로 $x + y + z = 8 + 4 + 2 = 14$ 이다.

3. 5^5 을 25번 더하여 얻은 값을 5의 거듭제곱으로 나타낸 것은?

① $5^5 + 25$

② $5^5 \times 25$

③ 5^7

④ $(5^5)^2$

⑤ $(5^5)^{25}$

해설

$$5^5 \times 25 = 5^5 \times 5^2 = 5^7$$

4. 다음 중 계산 결과가 나머지 넷과 다른 하나는?

① $(2^5)^2 \div 2^2$

② $(2^2)^3 \times 2^2$

③ $2^4 \times 2^4$

④ $8^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2$

⑤ $4^2(2^2 + 2^2)$

해설

⑤ $4^2(2^2 + 2^2) = 2^4 2^3 = 2^7$ 이고 ①, ②, ③, ④는 2^8 이므로 다른 하나는 ⑤이다.

5. $(2x^2y^3)^2 \times \square \div 4x^2y^3 = (3y^2)^3$ 에서 $\square$ 안에 알맞은 식은?

① $4xy$

② $2x^2y$

③ $3xy^2$

④ $\frac{y}{3x}$

⑤ $\frac{27y^3}{x^2}$

해설

$$(2x^2y^3)^2 \times \square \div 4x^2y^3 = (3y^2)^3$$

$$\begin{aligned}\square &= (3y^2)^3 \div (2x^2y^3)^2 \times 4x^2y^3 \\ &= 27y^6 \times \frac{1}{4x^4y^6} \times 4x^2y^3 \\ &= \frac{27y^3}{x^2}\end{aligned}$$

6. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $(-3x^3)^2 = -3x^5$

② $(-2^2x^4y)^3 = 32x^7y^3$

③ $(2a^2)^4 = 16a^6$

④ $\left(-\frac{a^2}{b^4}\right)^2 = \frac{a^4}{b^8}$

⑤ $\left(-\frac{3y^2}{x}\right)^3 = -\frac{27y^5}{x^4}$

해설

① $(-3x^3)^2 = (-3)^2x^6 = 9x^6$

② $(-2^2x^4y)^3 = (-2^2)^3x^{12}y^3 = -64x^{12}y^3$

③ $(2a^2)^4 = 16a^8$

④ $\left(-\frac{a^2}{b^4}\right)^2 = \frac{a^4}{b^8}$

⑤ $\left(-\frac{3y^2}{x}\right)^3 = -\frac{27y^6}{x^3}$

7. $2^{x+2} + 2^x = 160$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$2^{x+2} + 2^x = 5 \times 2^x = 160$$

$$2^x = 32 = 2^5$$

$$\therefore x = 5$$

8. $a = 3^{x+1}$ 일 때, 81^x 을 a 에 관한 식으로 바르게 나타낸 것은?

- ① $\frac{a}{3}$ ② $\frac{a^2}{9}$ ③ $\frac{a^3}{27}$ ④ $\frac{a^4}{81}$ ⑤ $\frac{a^5}{243}$

해설

$$a = 3^{x+1}, a = 3 \cdot 3^x, 3^x = \frac{a}{3},$$

$$81^x = (3^4)^x = (3^x)^4 = \left(\frac{a}{3}\right)^4 = \frac{a^4}{81}$$

9. 다음 중 가장 큰 수는?

① $2^{10} \times 5^9 \times 7$

② $2^{12} \times 3 \times 5^{11}$

③ $2^{10} \times 5^{11}$

④ $2^{10} \times 5^9$

⑤ $2^9 \times 5^8 \times 13$

해설

① $2^{10} \times 5^9 \times 7 = 14 \times 10^9$ 이므로 11 자리의 수

② $2^{12} \times 3 \times 5^{11} = 6 \times 10^{11}$ 이므로 12 자리의 수

③ $2^{10} \times 5^{11} = 5 \times 10^{10}$ 이므로 11 자리의 수

④ $2^{10} \times 5^9 = 2 \times 10^9$ 이므로 10 자리의 수

⑤ $2^9 \times 5^8 \times 13 = 26 \times 10^8$ 이므로 10 자리의 수

10. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 27^{x+2}$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$3^{-2x+1} = (3^3)^{x+2}$$

$$-2x + 1 = 3x + 6, x = -1$$

11. 다음 보기 중 계산 결과가 옳은 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $6a^4 \div 3ab = \frac{2a^3}{b}$

㉡ $\frac{2}{3}x^2y \div \frac{1}{6}xy^2 = \frac{4x}{y}$

㉢ $(2x^2)^5 \div (-2x^3)^2 = 8x^4$

㉤ $(-2x^2y)^3 \div \left(-\frac{2}{3}xy\right)^2 = 18x^4y$

㉥ $(-2x^3y)^3 \div (4xy^3)^2 = -\frac{x^7}{2y^3}$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 없다

해설

㉤ $(-2x^2y)^3 \div \left(-\frac{2}{3}xy\right)^2 = -18x^4y$

12. $a \neq 0, b \neq 0$ 이고 x, y 가 자연수일 때, $a^{(x-y)}b^{(y-x)} \div b^{(x-y)}a^{(y-x)}$ 을 간단히 하여라. (단, $x > y$)

① 2

② $\frac{a}{b}$

③ $\frac{b^{2x}}{a^{2y}}$

④ $\left(\frac{a}{b}\right)^{2x-2y}$

⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^{2x+2y}$

해설

$$\begin{aligned} a^{(x-y)}b^{(y-x)} \div b^{(x-y)}a^{(y-x)} &= a^{2x-2y}b^{2y-2x} \\ &= \frac{a^{2x-2y}}{b^{2x-2y}} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{2x-2y} \end{aligned}$$

13. 다음 그림과 같이 밑면인 원의 반지름의 길이가 $2a$, 높이가 b 인 통조림 ㉠과 밑면인 원의 반지름의 길이가 $5a$ 인 통조림 ㉡의 부피가 서로 같을 때, 통조림 ㉡의 높이를 구하여라.



㉠



㉡

▶ 답:

▶ 정답: $\frac{4b}{25}$

해설

통조림은 원기둥의 부피를 구하는 공식은 (부피) = $\pi(\text{반지름})^2 \times (\text{높이})$ 이다.

$$(\text{㉠의 부피}) = \pi(2a)^2 \times b = 4a^2b\pi$$

$$(\text{㉡의 부피}) = \pi(5a)^2 \times (\text{높이}) = 25a^2\pi \times (\text{높이})$$

$$4a^2b\pi = 25a^2\pi \times (\text{높이})$$

$$(\text{높이}) = \frac{4b}{25}$$

14. 다음 중 계산 결과가 옳지 않은 것은?

$$\textcircled{1} (-2xy^2) \times (3x)^2 \div (6y)^2 = -\frac{x^3}{2}$$

$$\textcircled{2} 14a^2 \div (-2b^2)^2 \times (2ab^2)^2 = 14a^4$$

$$\textcircled{3} \left(\frac{2}{3}a^2\right)^2 \times (3b^2)^2 \div (4ab^2)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\textcircled{4} (10a)^2 \times (-ab^2)^2 \div \left(-\frac{1}{3}ab^2\right)^2 = 25a^2$$

$$\textcircled{5} (-4x^2y) \div \left(-\frac{2}{3}y^2\right) \times (2xy^2)^3 = 48x^5y^5$$

해설

$$\textcircled{1} (-2xy^2) \times 9x^2 \times \frac{1}{36y^2} = -\frac{x^3}{2}$$

$$\textcircled{2} 14a^2 \div 4b^4 \times 4a^2b^4 = 14a^4$$

$$\textcircled{3} \frac{4}{9}a^4 \times 9b^4 \times \frac{1}{16a^2b^4} = \frac{a^2}{4}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} (10a)^2 \times (-ab^2)^2 \div \left(-\frac{1}{3}ab^2\right)^2 \\ = 100a^2 \times a^2b^4 \div \frac{1}{9}a^2b^4 = 900a^2\end{aligned}$$

$$\textcircled{5} (-4x^2y) \times \left(-\frac{3}{2y^2}\right) \times 8x^3y^6 = 48x^5y^5$$

15. $(-2x^3y)^a \div 4x^by \times 2x^5y^2 = cx^2y^3$ 일 때, $|a + c - b|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$(-2x^3y)^a \div 4x^by \times 2x^5y^2 = cx^2y^3$$

$$\frac{(-2)^a x^{3a} y^a}{4x^by} \times 2x^5y^2 = cx^2y^3$$

$$\frac{(-2)^a}{2} \times x^{3a+5-b} \times y^{a+1} = cx^2y^3$$

$$\frac{(-2)^a}{2} = c, \quad 3a + 5 - b = 2, \quad a + 1 = 3$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 9, \quad c = 2$$

$$\therefore |a + c - b| = |2 + 2 - 9| = 5$$

16. 안에 알맞은 식을 구하면? (단, > 0)

$$(2a^4b^2)^3 \div (\text{})^2 = 2a^2b \times a^8b$$

① ab

② a^2b

③ $2a^2b$

④ $2ab^2$

⑤ ab^2

해설

$$(\text{})^2 = 8a^{12}b^6 \div 2a^{10}b^2 = 4a^2b^4$$

$$(\text{})^2 = (2ab^2)^2$$

$$\therefore \text{} = 2ab^2$$

17. 다음 식을 만족하는 x, y 를 구하여라.

$$48^4 = (2^x \times 3)^4 = 2^y \times 3^4$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 4$

▷ 정답 : $y = 16$

해설

$$48^4 = (2^x \times 3)^4 = 2^y \times 3^4$$

$$48^4 = (2^4 \times 3)^4 = 2^{16} \times 3^4$$

$$\therefore x = 4, y = 16$$

18. 다음 안에 들어갈 알맞은 수는?

$$3^{2x+3} = \text{} \times 9^x$$

① 3

② 6

③ 9

④ 27

⑤ 81

해설

$$3^{2x+3} = 3^{2x} \times 3^3 = 9^x \times 27$$

안에 들어갈 수는 27이다.

19. $(a^2)^x \times (b^4)^y \times a \times b^6 = a^9 b^{14}$ 이 성립할 때, xy 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$(a^2)^x \times (b^4)^y \times a \times b^6 = a^{2 \times x + 1} b^{4 \times y + 6} = a^9 b^{14}$$

$$2x + 1 = 9, \quad 4y + 6 = 14$$

$$\therefore x = 4, \quad y = 2$$

$$xy = 4 \times 2 = 8$$

20. $180^3 = 2^x \times 3^y \times 5^z$ 일 때, $x + y + z$ 값을 구하면?

① 10

② 15

③ 20

④ 25

⑤ 30

해설

$$180^3 = (2^2 \times 3^2 \times 5)^3 = 2^6 \times 3^6 \times 5^3 = 2^x \times 3^y \times 5^z$$

$$x = 6, y = 6, z = 3$$

$$\therefore x + y + z = 15$$

21. $\left(\frac{-5x^a}{y}\right)^b = \frac{-125x^9}{y^{3c}}$ 일 때, $a + b - c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\left(\frac{-5x^a}{y}\right)^b = \frac{(-1)^b 5^b x^{ab}}{y^b} = \frac{-125x^9}{y^{3c}}$$

$$5^b = 125, b = 3$$

$$x^{3a} = x^9, a = 3$$

$$b = 3c = 3, c = 1$$

$$\therefore a + b - c = 3 + 3 - 1 = 5$$

22. 다음 중 알맞은 수를 찾아 $A + B + C - D$ 의 값을 구하여라.

$$\left(-\frac{x^A y^B}{Cz^2}\right)^D = \frac{x^{12} y^{20}}{16z^8}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\left(-\frac{x^A y^B}{Cz^2}\right)^D = \frac{x^{12} y^{20}}{16z^8}$$

$$(z^2)^D = z^8, D = 4$$

$$\left(-\frac{x^3 y^5}{2z^2}\right)^4$$

$$A = 3, B = 5, C = 2$$

$$\therefore A + B + C - D = 3 + 5 + 2 - 4 = 6$$

23. 다음 ㉠ ~ ㉣ 안에 알맞은 수를 넣어라.

$$\left(\frac{x^2 z^{\boxed{\text{㉠}}}}{\boxed{\text{㉡}} y^5} \right)^{\boxed{\text{㉢}}} = \frac{x^8 z^{12}}{16 y^{20}}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠: 3

▷ 정답 : ㉡: 2

▷ 정답 : ㉢: 4

해설

$$2 \times \boxed{\text{㉢}} = 8, \therefore \boxed{\text{㉢}} = 4$$

$$\boxed{\text{㉠}} \times 4 = 12, \therefore \boxed{\text{㉠}} = 3$$

$$\boxed{\text{㉡}}^4 = 16, \therefore \boxed{\text{㉡}} = 2$$

24. 다음 안에 들어갈 알맞은 수를 구하여라.

$$3^{19} = 27^{\square+1} \div 9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

지수끼리의 비교를 위하여 밑을 3으로 맞추어 주면 $3^{19} = 3^{3(\square+1)} \div 3^2$ 이 되므로 지수만을 가지고 계산하면, $19 = 3(\square + 1) - 2$ 이므로

$19 = 3\square + 1$, $\square = 6$ 이다.

25. 다음 등식을 만족하는 a , b 에 대하여 $2a - 3b$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

$$2^a \times 4^2 \div 8 = 2^5$$

$$(-1)^{n+2} \times (-1)^{n+3} = b$$

- ① 11 ② -11 ③ -5 ④ 5 ⑤ 8

해설

첫 번째 식

$$\because 2^a \times 2^4 \div 2^3 = 2^{a+4-3} = 2^5 \therefore a = 4$$

두 번째 식

$$\because (-1)^{n+2+n+3} = (-1)^{2n+5} = b \therefore b = -1$$

$$\therefore 2a - 3b = 8 + 3 = 11$$

26. $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{2009} + (-1)^{2010}$ 의 값은?

① -2009

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2010

해설

$$(-1) = -1, (-1)^2 = 1, (-1)^3 = -1, (-1)^4 = 1 \cdots (-1)^{2009} = -1, (-1)^{2010} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore & (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{2009} + (-1)^{2010} \\ &= (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots + (-1 + 1) + (-1 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

27. 자연수 n 에 대하여, 다음 식을 계산하면 얼마인가?

$$1^{2n} + (-1)^{2n} + 1^{4n} + (-1)^{4n} + 1^{6n} + (-1)^{6n}$$

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$1^n = 1$, $(-1)^{2n} = \{(-1)^2\}^n = 1^n = 1$ 이므로,

$1^{2n} + (-1)^{2n} + 1^{4n} + (-1)^{4n} + 1^{6n} + (-1)^{6n} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$
이다.

28. 자연수 a 에 대하여 $a^{a+3} = a^{3a-1}$ 를 만족하는 a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

해설

$a^{a+3} = a^{3a-1}$ 에서

㉠ 밑이 같으면 지수가 같아야 등호가 성립하므로

$$a + 3 = 3a - 1, \therefore a = 2$$

㉡ 1 의 거듭제곱은 지수와 관계없이 항상 1 이므로 등호가 성립한다.

즉, $a = 1$ 일 때, $1^4 = 1^2$ 이다. $\therefore a = 1$

따라서 a 의 값은 1 과 2 이다.

29. $x_1 = 97$, $x_2 = \frac{2}{x_1}$, $x_3 = \frac{3}{x_2}$, $x_4 = \frac{4}{x_3}$, $\cdots$, $x_{10} = \frac{10}{x_9}$ 이라 할 때,
 $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3840

해설

$x_1 = 97$ 이고, $x_1 \times x_2 = 2$ 이고, $x_3 \times x_4 = 4$ 이다. 따라서
 $x_9 \times x_{10} = 10$ 이 된다.

$$\begin{aligned} & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_{10} \\ &= (x_1 \cdot x_2) \times (x_3 \cdot x_4) \times \cdots \times (x_9 \cdot x_{10}) \\ &= 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 = 3840 \end{aligned}$$

30. $4xy \div (x^2y) \times \left(\frac{xy}{2}\right)^2$ 을 계산하면?

① $\frac{16}{x^3y^2}$

② $\frac{8}{x^3y^2}$

③ $2xy^2$

④ xy^2

⑤ x^2y^2

해설

$$4xy \times \frac{1}{x^2y} \times \frac{x^2y^2}{4} = xy^2$$

31. $a = -\frac{1}{3}$, $b = 4$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$\left(-\frac{1}{4}ab\right)^3 \div (-ab^2)^2 \times 24ab^2$$

▶ 답 :

▶ 정답 : $-\frac{1}{6}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= -\frac{1}{64}a^3b^3 \times \frac{1}{a^2b^4} \times 24ab^2 = -\frac{3}{8}a^2b \\ &= -\frac{3}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \times 4 = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

32. 밑면의 반지름의 길이가 a cm, 높이가 b cm 인 원뿔 V_1 과 밑면의 반지름의 길이가 b cm, 높이가 a cm 인 원뿔 V_2 가 있다. V_1 의 부피는 V_2 의 부피의 몇 배인가?

- ① a 배 ② b 배 ③ ab 배 ④ $\frac{a^2}{b}$ 배 ⑤ $\frac{a}{b}$ 배

해설

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi a^2 b, V_2 = \frac{1}{3}\pi b^2 a \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{V_2} &= \frac{\frac{1}{3}\pi a^2 b}{\frac{1}{3}\pi b^2 a} \\ &= \frac{1}{3} \pi a^2 b \times \frac{3}{\pi b^2 a} \\ &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

따라서 V_1 의 부피는 V_2 의 부피의 $\frac{a}{b}$ 배이다.

33. $2^{2x} \times 8^x = 4^2 \times 2^x$ 를 만족하는 x 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{4}{3}$

③ 1

④ 3

⑤ 4

해설

$$2^{2x} \times 2^{3x} = (2^2)^2 \times 2^x$$

$$2^{5x} = 2^{x+4}$$

$$\therefore x = 1$$

34. $3^2 \times 9^2 = 27 \times 3^a$ 를 만족하는 a 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$3^2 \times 9^2 = 27 \times 3^a$$

$$3^2 \times (3^2)^2 = 3^3 \times 3^a$$

$$3^2 \times 3^4 = 3^6 = 3^{3+a}$$

$$\therefore a = 3$$

35. $3^{x+1} \times 9^{x+1} = 81^{x-1}$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$3^{x+1} \times 3^{2(x+1)} = 3^{4(x-1)}$$

$$x + 1 + 2(x + 1) = 4(x - 1)$$

$$\therefore x = 7$$

36. $3^{2x-3} \div 3^{x+1} = 243$ 에서 x 의 값은?

① 3

② 4

③ 6

④ 7

⑤ 9

해설

$$3^{2x-3-(x+1)} = 3^{x-4} = 3^5$$

$$\therefore x - 4 = 5 \quad \therefore x = 9$$

37. $81^4 \div 27^n = 9^2$ 일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$(3^4)^4 \div 3^{3n} = 3^4 \text{ 이므로 } 16 - 3n = 4$$

$\therefore n = 4$ 이다.

38. 양의 정수 a, b, c 에 대하여 $(x^a y^b z^c)^d = x^6 y^{12} z^{18}$ 이 성립하는 가장 큰 양의 정수 d 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 12

⑤ 18

해설

$$(x^a y^b z^c)^d = x^{ad} y^{bd} z^{cd} = x^6 y^{12} z^{18}$$

$$ad = 6, bd = 12, cd = 18$$

d 는 6, 12, 18 의 최대공약수

$$\therefore d = 6$$

39. $\frac{27^n}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ 일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{27^n}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \text{ 에서 } 27^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \times 9,$$

$$3^{3n} = (3^{-1})^{-4} \times 3^2 = 3^4 \times 3^2 = 3^6$$

$$\therefore 3n = 6, n = 2$$

40. 자연수 n 에 대하여 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 으로 정의한다. 이 때, $n \times 9! \times 6! \times 3!$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 가장 작은 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$n \times 9! \times 6! \times 3!$$

$$\begin{aligned} &= n \times (9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \\ &\quad \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) \\ &= n \times 3^2 \times 2^3 \times 7 \times (2 \times 3) \times 5 \times 2^2 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &\quad \times (2 \times 3) \times 5 \times 2^2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= n \times 2^{12} \times 3^7 \times 5^2 \times 7 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식이 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서는 소인수들의 지수가 짝수가 되어야 하므로 가장 작은 자연수 n 은 $3 \times 7 = 21$ 이다.

$$\therefore n = 21$$

41. n 이 자연수일 때, $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \cdots + (-1)^{2n-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$(\text{준식}) = (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots (-1 + 1) - 1 = -1$$

42. $\left(\frac{16^4 + 4^{11}}{8^4 + 4^9}\right)^2$ 의 값을 2 의 거듭제곱으로 나타내어라.

▶ 답:

▷ 정답: 2^8

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{16^4 + 4^{11}}{8^4 + 4^9}\right)^2 &= \left(\frac{(2^4)^4 + (2^2)^{11}}{(2^3)^4 + (2^2)^9}\right)^2 \\&= \left(\frac{2^{16} + 2^{22}}{2^{12} + 2^{18}}\right)^2 \\&= \left(\frac{2^{16}(1 + 2^6)}{2^{12}(1 + 2^6)}\right)^2 \\&= \left(\frac{2^{16}}{2^{12}}\right)^2 \\&= (2^4)^2 = 2^8\end{aligned}$$

43. 함수 $f(x) = x - 10\left[\frac{x}{10}\right]$ 라 하고 $g(x) = 3^x$ 라 할 때, $f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(1000))$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5000

해설

$$f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(1000)) = f(3^1) + f(3^2) + f(3^3) + \cdots + f(3^{1000})$$

$$\text{예를 들어 } f(125) = 125 - 10\left[\frac{125}{10}\right] = 125 - 10 \times 12 = 5, \quad f(79) = 79 - 10 \times 7 = 9$$

즉, 함수 $f(x)$ 의 값은 x 의 일의 자리의 숫자이다.

따라서 $f(3^1) = 3, f(3^2) = 9, f(3^3) = 7, f(3^4) = 1, f(3^5) = 3, \dots$ 이므로 3^n 의 일의 자리 숫자 3, 9, 7, 1 이 반복된다.

1000 = 4 × 250 이므로

$$\begin{aligned} f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(1000)) \\ = f(3^1) + f(3^2) + f(3^3) + \cdots + f(3^{1000}) \\ = (3 + 9 + 7 + 1) \times 250 = 20 \times 250 = 5000 \end{aligned}$$

44. 0.8^{10} 을 소수로 나타내어라. (단, $2^{10} \approx 1000$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{10}$

해설

$$0.8^{10} = \left(\frac{8}{10}\right)^{10} = \left(\frac{2^3}{10}\right)^{10} = \frac{(2^{10})^3}{10^{10}}$$

$2^{10} \approx 10^3$ 이므로

$$(\text{준식}) = \frac{(2^{10})^3}{10^{10}} = \frac{(10^3)^3}{10^{10}} = \frac{10^9}{10^{10}} = \frac{1}{10}$$

따라서 주어진 식을 소수로 나타내면 0.1 이다.

45. 임의의 자연수 a, b 에 대하여 $x^a y^b = (3^{-1})^{b-a}$ 와 $x^b y^a = (3^{-1})^{a-b}$ 일 때, xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x^a y^b = (3^{-1})^{b-a} \dots \textcircled{㉠}$$

$$x^b y^a = (3^{-1})^{a-b} \dots \textcircled{㉡} \text{ 이라 할 때}$$

두 식을 좌변끼리 우변끼리 각각 곱하면

$$\begin{aligned}(3^{-1})^{b-a} \times (3^{-1})^{a-b} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{b-a} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{a-b} \\&= \left(\frac{1}{3}\right)^{b-a+a-b} \\&= \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\&= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^a y^b \times x^b y^a &= x^{a+b} \times y^{a+b} \\&= (xy)^{a+b}\end{aligned}$$

$a + b$ 가 자연수 이므로 $(xy)^{a+b} = 1$ 을 만족하는 xy 는 1이다.

46. $\left(\frac{x^3}{y}\right)^2 \div (x^a y^{-2})^3 \times \left(\frac{2y}{x^2}\right)^2 = \frac{4y^b}{x}$ 에서 자연수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = 6$

해설

$$\begin{aligned}
 (\text{좌변}) &= \left(\frac{x^3}{y}\right)^2 \div (x^a y^{-2})^3 \times \left(\frac{2y}{x^2}\right)^2 \\
 &= \frac{x^6}{y^2} \times \frac{1}{x^{3a} y^{-6}} \times \frac{4y^2}{x^4} \\
 &= \frac{4x^6 y^2}{x^{3a+4} y^{-4}} = 4 \times x^{6-3a-4} \times y^{2-(-4)} \\
 &= 4 \times x^{2-3a} \times y^6
 \end{aligned}$$

$$(\text{우변}) = \frac{4y^b}{x} = 4 \times x^{-1} \times y^b$$

따라서 $a = 1$, $b = 6$ 이다.

47. $a = 8^2$, $b = 9^4$ 이라 할 때, $(a^{-1}b^2)^3 \div \left\{ \left(\frac{1}{ab} \right)^3 \right\}^2 \times a^4b^{-5} = 2^n \times 3^m$ 이 성립한다. 이때, $m - n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\begin{aligned} & (a^{-1}b^2)^3 \div \left\{ \left(\frac{1}{ab} \right)^3 \right\}^2 \times a^4b^{-5} \\ &= 2^n \times 3^m \\ &= a^{-3}b^6 \times a^6b^6 \times a^4b^{-5} \\ &= \frac{b^6}{a^3} \times a^6b^6 \times \frac{a^4}{b^5} = (ab)^7 \end{aligned}$$

따라서 $a = 8^2 = (2^3)^2 = 2^6$, $b = 9^4 = (3^2)^4 = 3^8$ 을 주어진 식에 대입하면

$$(ab)^7 = (2^6 \times 3^8)^7 = 2^{42} \times 3^{56}$$

따라서 $n = 42$, $m = 56$ 이므로 $m - n = 14$ 이다.

48. 세 수 a, b, c 에 대하여 $\langle a, b, c \rangle = a^4 b^3 c^2 \div \frac{a^4 b^2 c^3}{4}$ 이라고 정의할 때, $\langle p, 7, 2 \rangle + \langle q, 6, 4 \rangle$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$$a^4 b^3 c^2 \div \frac{a^4 b^2 c^3}{4} = a^4 b^3 c^2 \times \frac{4}{a^4 b^2 c^3} = \frac{4b}{c}$$

이므로 $\langle a, b, c \rangle = \frac{4b}{c}$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \langle p, 7, 2 \rangle + \langle q, 6, 4 \rangle &= \frac{4 \times 7}{2} + \frac{4 \times 6}{4} \\ &= 14 + 6 = 20 \end{aligned}$$

49. A 가 양의 정수일 때, 한 변의 길이가 A 인 정육면체의 높이를 1만큼 짧게 했더니 부피가 648 이 되었다. 이 때, A 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$648 = 2^3 \times 3^4$ 이고,
높이 A 를 1 만큼 짧게하면 높이는 $A - 1$
따라서 부피는 $A^2 \times (A - 1)$ 이다.

$$\begin{aligned} A^2 \times (A - 1) &= 2^3 \times 3^4 \\ &= (3^2)^2 \times 2^3 \\ &= 9^2 \times (9 - 1) \end{aligned}$$

$$\therefore A = 9$$

50. 두 자연수 x, y 에 대하여 $x = y^z$ 을 $\langle x : y \rangle = z$ 으로 나타내기로 할 때, $\langle 81 : a \rangle + \langle 64 : 2 \rangle = b$ 를 만족하는 $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a 는 소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$\langle 81 : a \rangle$ 에서 $81 = 3^4$ 이므로 $a = 3$

$\therefore \langle 81 : 3 \rangle = 4$

$\langle 64 : 2 \rangle$ 에서 $64 = 2^6$ 이므로 $\langle 64 : 2 \rangle = 6$

따라서 $\langle 81 : 3 \rangle + \langle 64 : 2 \rangle = 4 + 6 = 10$ 이므로 $b = 10$

$\therefore a + b = 3 + 10 = 13$