1. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 2)$ 이고 y 절편이 3 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면? (단, a , b , c 는 상수이다.)

① 0　② 1　③ 2　④ 4　⑤ 5

해설

꼭짓점이 $(1, 2)$ 이므로 주어진 식은
$y = a(x-1)^2 + 2$
y 절편이 3 이므로 $(0,\ 3)$ 을 대입하면
$3 = a + 2$
$\therefore a = 1$
따라서 구하는 식은 $y = (x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$
$\therefore\ b = -2, c = 3$
$\therefore a + b + c = 2$

2. 꼭짓점이 $(2,\ 3)$ 이고, 점$(5, -6)$ 을 지나는 포물선이 y 축과 만나는 점의 좌표는?

① $(0, -2)$　② $(0,\ 3)$　③ $(0,\ 1)$
④ $(0,\ 2)$　⑤ $(0, -1)$

해설
$y = a(x-2)^2 + 3$ 에 $(5, -6)$ 을 대입하면
$-6 = a(5-2)^2 + 3$
$9a = -9 \therefore a = -1$
$y = -(x-2)^2 + 3$
$x = 0$ 일 때 $y = -1$
$\therefore\ (0,\ -1)$

3. x 축에 접하고 축의 방정식이 $x = 2$, y 절편이 -2 인 이차함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$
② $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2$
③ $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$
④ $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2$
⑤ $y = 2(x-2)^2 - 2$

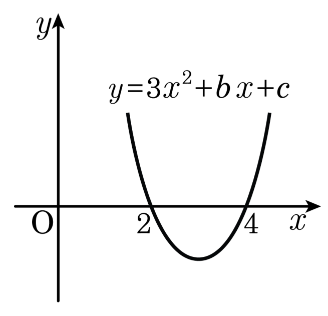
해설

$y = a(x-2)^2$ 의 y 절편 $4a = -2$

$a = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ y = -\frac{1}{2}(x-2)^2$

4. 다음 그림은 이차함수 $y = 3x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 이 때, b, c 의 값을 각각 구하여라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $b = -18$

▷ 정답 : $c = 24$

해설

$(2,\ 0)$ 을 대입하면 $0 = 12 + 2b + c \rightarrow 2b + c = -12$
$(4,\ 0)$ 을 대입하면 $0 = 48 + 4b + c \rightarrow 4b + c = -48$
두 식을 연립하여 풀면 $b = -18$, $c = 24$

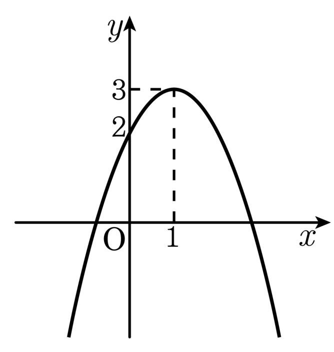
5. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.
$y=x(18-x)=-x^2+18x=-(x^2-18x+81)+81$
$y=-(x-9)^2+81$
따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

6. 다음 그림은 이차함수의 그래프를 그린 것이다. 이 이차함수의 식을 구하면?



① $y=-2x^2+4x+2$ ② $y=-x^2+2x+2$

③ $y=-2x^2-4x+2$ ④ $y=-x^2-2x+2$

⑤ $y=-3x^2-6x+2$

해설

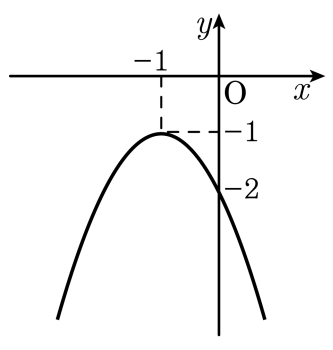
$y=a(x-1)^2+3$ 가 점 $(0,\ 2)$ 를 지나므로

$2=a(0-1)^2+3,\ a=-1$ 이다.

$\therefore y=-(x-1)^2+3$

$=-x^2+2x+2$

7. 다음 포물선의 함수식을 바르게 나타낸 것은?



① $y=-(x+1)^2-1$　② $y=-(x-1)^2-1$

③ $y=-2(x+1)^2-2$　④ $y=-2(x-1)^2-1$

⑤ $y=-2(x+1)^2-1$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -1)$ 이고 지나는 점은 $(0,\ -2)$ 이므로 $y=a(x+1)^2-1$ 에 지나는 점 $(0,\ -2)$를 대입하면 $-2=a(0+1)^2-1$, $a=-1$ 이다.
따라서 $y=-(x+1)^2-1$ 이 된다.

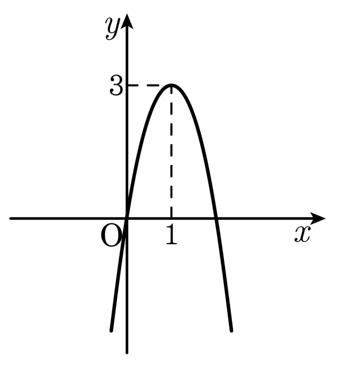
8. 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$ 인 포물선이 두 점 $(2,\ -3)$, $(m, -6)$ 을 지날 때, 다음 중 m 의 값은?

① -1 ② 5 ③ -3 ④ -6 ⑤ -9

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$ 이므로
$y = a(x-1)^2 - 2$ 이고 점 $(2,\ -3)$ 을 지나므로 $-3 = a(2-1)^2 - 2$
$a = -1$ 이다.
$y = -(x-1)^2 - 2$
점 $(m, -6)$ 을 지나므로
$-6 = -(m-1)^2 - 2$
$\therefore m = 3$ 또는 $m = -1$

9. 다음 그림은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프이다. 이 때, $a+b-c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y=a(x-1)^2+3$이 $(0,0)$ 을 지나므로
$0=a(0-1)^2+3,\ a=-3$
$y=-3(x-1)^2+3=-3x^2+6x$
$a=-3,\ b=6, c=0$
$\therefore a+b-c=-3+6-0=3$

10. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프의 꼭짓점이 $(-2,\ 2)$ 이고 점 $(0,\ 4)$ 를 지날 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점이 $(-2,\ 2)$ 이므로
$y = a(x+2)^2 + 2$
점 $(0,\ 4)$ 를 지나므로
$4 = a(0+2)^2 + 2,\ a = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

$\therefore\ a = \frac{1}{2},\ b = 2,\ c = 4 \qquad \therefore\ abc = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$

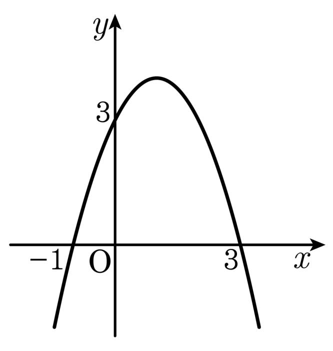
11. 세 점 $(0,\ -6)$, $(2,\ 0)$, $(-2,\ 4)$를 지나는 이차함수의 식은?

① $y=2x^2-x-6$
② $y=2x^2+x-6$
③ $y=2x^2+x+6$
④ $y=-2x^2-x-6$
⑤ $y=-2x^2+x+6$

해설

$y=ax^2+bx+c$ 에 세 점을 대입하면
$c=-6,\ 4a+2b+c=0,\ 4a-2b+c=4$
$a=2,\ b=-1,\ c=-6$
$\therefore\ y=2x^2-x-6$

12. 다음은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. $(1, k)$ 가 이 그래프 위의 점일 때, k 의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점 $(-1, 0), (0, 3), (3, 0)$ 을 각각 대입하여 a, b, c 를 구하면

$a = -1, b = 2, c = 3$

$\therefore y = -x^2 + 2x + 3$

$(1, k)$ 를 대입하면 $k = 4$ 이다.

13. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 세 점 $(0,\ 12)$, $(-2,\ -2b)$, $(1,\ 1-4a)$를 지날 때, $a - b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점을 대입하면 $c = 12$

$-2b = 4a - 2b + c \cdots$ ㉠

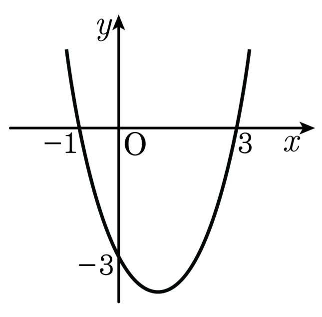
$1 - 4a = a + b + c \cdots$ ㉡

$c = 12$ 를 ㉠에 대입하면 $a = -3$

$a = -3,\ c = 12$ 를 ㉡에 대입하면 $b = 4$

$\therefore\ a - b + c = -3 - 4 + 12 = 5$

14. 다음 그림과 같이 나타내어지는 포물선의 식은?



① $y = 3x^2 - 3x - 6$　　② $y = -x^2 + 6x - 8$

③ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2$　　④ $y = x^2 - 2x - 3$

⑤ $y = -x^2 + 5x - 4$

해설

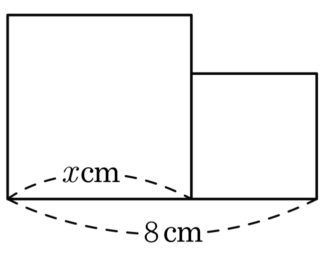
$y = a(x-3)(x+1)$ 이고, $(0,\ -3)$ 을 지난다.

$-3 = -3a$

$a = 1$

따라서 $y = (x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$

15. 다음 그림과 같이 길이가 8cm 인 선분을 둘로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형을 만들었다. 두 정사각형의 넓이의 합을 $y\text{cm}^2$ 라 할 때, 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 하는 $x(\text{cm})$ 의 값과 그 때의 넓이 $y(\text{cm}^2)$ 를 구하여라.



① $x = 2, y = 12$　② $x = 2, y = 14$　③ $x = 2, y = 16$
④ $x = 4, y = 32$　⑤ $x = 4, y = 34$

해설

$$y = x^2 + (8 - x)^2$$
$$= 2(x^2 - 8x + 16 - 16) + 64$$
$$= 2(x - 4)^2 + 32$$

따라서 $x = 4$ 일 때 $y = 32$ 이다.

16. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 16 ② 20 ③ 36 ④ 55 ⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a, 넓이를 b 라 하면

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a) \\ &= -a^2 + 8a \\ &= -(a^2 - 8a + 16 - 16) \\ &= -(a - 4)^2 + 16 \end{aligned}$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.
따라서 $ab = 64$ 이다.

17. 지면으로부터 60m 되는 높이에서 초속 60m 로 곧바로 위로 쏘아 올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 대략 $y = -5x^2 + 60x + 60$ 인 관계가 성립한다. 그 물체의 높이가 최대가 되는 것은 쏘아 올린 지 몇 초 후인가? 또한, 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 답: m

▷ 정답: 6초

▷ 정답: 240m

해설

$y = -5x^2 + 60x + 60 = -5(x-6)^2 + 240$
따라서 $x = 6$ 일 때, 최댓값 240을 갖는다.

18. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이고, 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점의 x 좌표가 3 , -2 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$x = 2$ 에 대하여 대칭이므로 $y = a(x-2)^2 + q$ 이고,
$y = x - 1$ 에서 $(3, 2)$, $(-2, -3)$ 을 지나므로,
$a + q = 2$, $16a + q = -3$ 에서
$a = -\frac{1}{3}$, $q = \frac{7}{3}$ 이므로
$y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$
따라서 $y = a + b + c = 2$ 이다.

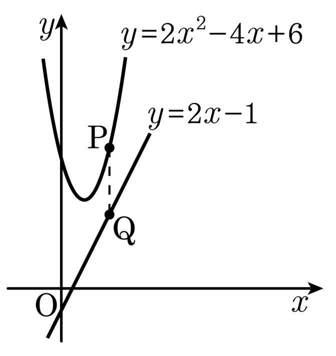
19. 세 점 $(-1,\ -5)$, $(0,\ 5)$, $(2,\ 13)$ 을 지나는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$ 일 때, $p-q$ 의 값은?

① 1 ② 5 ③ -5 ④ -1 ⑤ -11

해설

이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라고 놓으면
$(-1,-5)$를 지나므로 $-5=a-b+5$
$(0,5)$를 지나므로 $5=c$
$(2,13)$ 을 지나므로 $13=4a+2b+5$
$\therefore a=-2,\ b=8,\ c=5$
따라서 주어진 이차함수의 식은
$y=-2x^2+8x+5=-2(x-2)^2+13$ 이므로
꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 13)$ 이므로
$p-q=-11$ 이다.

20. 다음 그림과 같이 $y = 2x^2 - 4x + 6$ 과 $y = 2x - 1$ 이 y 축에 평행인 직선과 만나는 점을 P, Q 라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이 때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ 2t^2 - 4t + 6)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ 2t - 1)$ 이다.

$$\overline{\mathrm{PQ}} = 2t^2 - 4t + 6 - (2t - 1) = 2t^2 - 6t + 7 = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

$\therefore t = \frac{3}{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 $\frac{5}{2}$

21. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + 4a$ 의 최댓값은 음수이고, 그 그래프가 점 $(-a,\ 2a-7)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{3}$

해설

$y = -3x^2 + 6x + 4a$
$= -3(x-1)^2 + 3 + 4a$

$y = -3(x-1)^2 + 3 + 4a$ 의 그래프가 점 $(-a, 2a-7)$ 을 지나므로 $2a - 7 = -3(-a-1)^2 + 3 + 4a$ 을 정리하면 $3a^2 + 4a - 7 = 0$, $(3a+7)(a-1) = 0$

$\therefore a = -\frac{7}{3}$ *or* 1

그런데 최댓값 $3 + 4a$ 의 값이 음수이므로 $a = -\frac{7}{3}$ 이다.

22. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3　　② $-\frac{3}{8}$　　③ $\frac{3}{8}$　　④ 3　　⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\ &= 2(x-2)^2 - 12 + 3a \end{aligned}$$

$y = 2(x-2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로

$8a + 5 = 2(2a-2)^2 - 12 + 3a$

$8a^2 - 21a - 9 = 0,\ (8a+3)(a-3) = 0$

$\therefore a = -\frac{3}{8}$ 또는 3

그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

$i)\ a = -\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

$ii) a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$

따라서 $a = 3$ 이다.

23. $x=2$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$y=a(x-2)^2-1$
$\quad =a(x^2-4x+4)-1$
$\quad =ax^2+4ax+4a-1$

$4a-1=3$
$a=1$

$y=(x-2)^2-1$
$apq=1\times2\times(-1)=-2$

24. 이차함수 $y = ax^2+bx+c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -3 을 갖고, 그래프가 점 $(-1,\ 6)$ 을 지난다고 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -3)$ 이므로 $y = a(x-2)^2-3$
점 $(-1,\ 6)$ 을 대입하면 $a = 1$
$y = (x-2)^2-3 = x^2-4x+1$ 에서
$a = 1$, $b = -4$, $c = 1$
따라서 $a+b+c = -2$ 이다.

25. 이차함수 $y=x^2+mx+m$ 의 최솟값을 M 이라 할 때, M 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$y=x^2+mx+m=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+m$

최솟값 $M=-\frac{m^2}{4}+m$

$M=-\frac{m^2}{4}+m=-\frac{1}{4}(m-2)^2+1$

$m=2$ 일 때, M 은 최댓값 1 을 갖는다.

26. $x+y=10$ 일 때, x^2+y^2 의 최솟값을 구하면?

① 10　② 24　③ 40　④ 45　⑤ 50

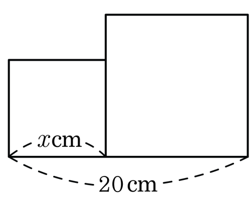
해설

$y = 10 - x$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(10-x)^2 \\ &= x^2+x^2-20x+100 \\ &= 2x^2-20x+100 \\ &= 2(x^2-10x+25-25)+100 \\ &= 2(x-5)^2+50 \end{aligned}$$

따라서 $x=5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

27. 다음 그림과 같이 길이가 20cm 인 선분을 두 부분으로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형 두 개를 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



▶ 답: ______ cm

▷ 정답: 10 cm

해설

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x , 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $20-x$,

넓이를 y 라고 하면

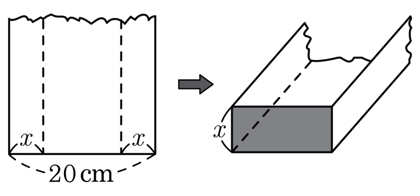
$y = x^2 + (20 - x)^2$

$= 2x^2 - 40x + 400$

$= 2(x - 10)^2 + 200$

따라서 $x = 10$ 일 때, 최솟값 200 을 갖는다.

28. 그림과 같이 너비가 20 cm 인 철판의 양쪽을 접어 물받이를 만들려고 한다. 색칠한 부분의 넓이가 최대가 되게 하려면 높이를 몇 cm 로 해야 하는지 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 5 cm

해설

색칠한 부분의 넓이를 y라 하면

$$y = x(20 - 2x)$$
$$= -2x^2 + 20x$$
$$= -2(x - 5)^2 + 50$$

따라서 높이는 5 cm로 해야한다.

29. 밑변의 길이와 높이의 합이 28 cm 인 삼각형의 최대 넓이는?

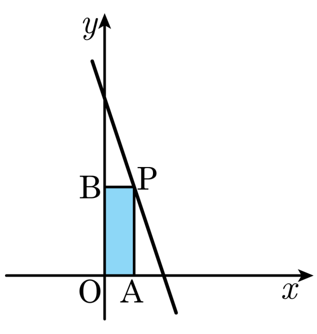
① $90\,\text{cm}^2$　② $92\,\text{cm}^2$　③ $94\,\text{cm}^2$
④ $96\,\text{cm}^2$　⑤ $98\,\text{cm}^2$

해설

삼각형의 밑변의 길이를 $x\,\text{cm}$, 넓이를 $y\,\text{cm}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x(28-x) \\ &= \frac{1}{2}(-x^2+28x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-28x) \\ &= -\frac{1}{2}(x-14)^2+98 \end{aligned}$$

30. 다음 그림과 같이 일차함수 $y = -x + 4$ 의 그래프 위의 한 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 할 때, 직사각형 OAPB 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



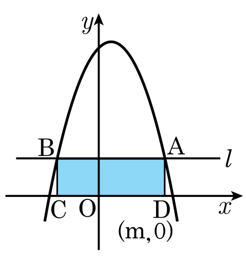
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

A 의 좌표를 $(t,\ 0)$ 이라고 하면 P 의 좌표는
$(t,\ -t+4)$ 이고 B 의 좌표는$(0,\ -t+4)$
$\therefore \square\mathrm{OAPB} = t \times (-t+4) = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4$
$t = 2$ 일 때, 넓이의 최댓값 4

31. $y=-x^2+x+6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은?$\left(\frac{1}{2}<m<3\right)$



① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y=-x^2+x+6=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m,\ -m^2+m+6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2\left(m-\frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2+m+6$

(□ABCD둘레의 길이)

$=2\left\{2\left(\mathrm{m}-\frac{1}{2}\right)-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6\right\}$

$=2(2\mathrm{m}-1-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6)$

$=2(-\mathrm{m}^2+3\mathrm{m}+5)$

$=-2\left(\mathrm{m}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{2}$

$m=\frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

32. 지상 22m 되는 위치에서 초속 30m 로 위로 던져 올린 공의 t 초 후의 높이를 hm 라 하면 $h = -5t^2 + 30t + 22$ 인 관계가 성립한다. 이 공은 몇 초 후에 최고 높이에 도달하는가?

① 1 초 ② 2 초 ③ 3 초 ④ 4 초 ⑤ 5 초

해설

$h = -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 22$
$\quad = -5(t - 3)^2 + 67$

$t = 3$ 일 때, 최댓값 $h = 67$

33. x 에 관한 이차방정식 $x^2-4(a-1)x+a-2b=0$ 이 중근을 가질 때, b 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{17}{32}$

해설

$x^2-4(a-1)x+a-2b=0$ 가 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=4(a-1)^2-(a-2b)=4a^2-9a+4+2b=0$

$\therefore\ b=-2a^2+\frac{9}{2}a-2=-2\left(a-\frac{9}{8}\right)^2+\frac{17}{32}$

따라서 $a=\frac{9}{8}$ 일 때, b 는 최댓값 $\frac{17}{32}$ 을 갖는다.

34. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ 가 두 점 $(1,\ a + b)$, $(-3,\ -3a + b)$ 에서 만날 때, 함수 $h(x) = g(x) - f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

두 함수의 그래프의 교점의 x 좌표가 1 과 -3 이므로 $ax + b = x^2 + cx + d$,
즉, $x^2 + (c - a)x + (d - b) = 0$ 은 두 근이 1, -3 이다.
근과 계수의 관계에 의해
$a - c = -2$, $d - b = -3$

$$\begin{aligned} \therefore\ h(x) &= g(x) - f(x) \\ &= x^2 + (c - a)x + (d - b) \\ &= x^2 + 2x - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

35. 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = -x + 2$ 에 대하여 $h(g(f(x)))$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, $h(g(f(M)))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -16

해설

$g(f(x)) = 2(2x - 1)^2$,
$h(g(f(x))) = -2(2x - 1)^2 + 2$ 이므로
$M = 2$
$\therefore\ h(g(f(m))) = -2(2M - 1)^2 + 2 = -16$

36. 함수 $y = x^2 - px$ 와 $y = -x^2 + px$ 의 그래프에 의하여 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값이 26 일 때, p 의 값을 구하여라. (단, $p > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

포물선의 축이 $x = \frac{p}{2}$ 이므로 직사각형은 직선 $x = \frac{p}{2}$ 에 대하여 대칭이다.
직사각형이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 $t\left(t > \frac{p}{2}\right)$ 라 하면
가로의 길이는 $2 \times \left(t - \frac{p}{2}\right) = 2t - p$,
세로의 길이는 $(-t^2 + pt) - (t^2 - pt) = -2t^2 + 2pt$
이므로 직사각형의 둘레의 길이는
$2(-2t^2 + 2pt + 2t - p) = -4\left(t - \frac{p+1}{2}\right)^2 + p^2 + 1$ 이다.
따라서 $t = \frac{p+1}{2}$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $p^2 + 1 = 26$ 이므로 $p = 5$ 이다.

37. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 두 점 $(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 을 지나고 최솟값이 -3 일 때, 상수 a, b, c 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=\frac{1}{3}$

▷ 정답 : $b=\frac{2}{3}$

▷ 정답 : $c=-\frac{8}{3}$

해설

$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 두 점 $(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 을 각각 지나므로

$16a-4b+c=0$

$4a+2b+c=0$

$\therefore\ b=2a,\ c=-8a$

또 주어진 함수의 최솟값이 -3 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= ax^2+2ax-8a \\ &= a(x+1)^2-9a \end{aligned}$$

$\therefore\ -9a=-3$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=-\frac{8}{3}$ 이다.

38. 이차함수 $y = ax^2 + 2bx + 4c$ 의 그래프가 두 점 $(-2,\ 0)$, $(4,\ 0)$ 을 지나고 최솟값이 -6 일 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{4}{3}$

해설

$y = ax^2 + 2bx + 4c$ 의 그래프가 두 점 $(-2,\ 0)$, $(4,\ 0)$ 을 각각 지나므로

$4a - 4b + 4c = 0$

$a - b + c = 0$

$16a + 8b + 4c = 0$

$4a + 2b + c = 0$

$\therefore\ b = -a,\ c = -2a$

또 주어진 함수의 최솟값이 -6 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 2bx + 4c \\ &= ax^2 - 2ax - 8a \\ &= a(x-1)^2 - 9a \end{aligned}$$

$\therefore\ -9a = -6$

따라서 $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = -\frac{4}{3}$ 이므로 $a + b + c = -\frac{4}{3}$ 이다.

39. 이차함수 $y = x^2 - 2(m+1)x + 4m$ 의 최솟값을 a 이라 할 때, a 의 최댓값은?

① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ 0

해설

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 2(m+1)x + 4m \\
&= \left\{x^2 - 2(m+1)x + (m+1)^2 - (m+1)^2\right\} + 4m \\
&= \left\{x - (m+1)\right\}^2 - (m+1)^2 + 4m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \text{최솟값 } M &= -(m+1)^2 + 4m \\
&= -m^2 + 2m - 1 \\
&= -(m^2 - 2m + 1) \\
&= -(m-1)^2
\end{aligned}
$$

따라서 a 의 최댓값은 0 이다.

40. 이차함수 $y = x^2 - px + p^2 - 2p + 5$ 의 최솟값을 k 이라 할 때, k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{11}{3}$

해설

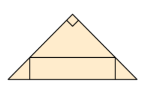
$$y = x^2 - px + p^2 - 2p + 5$$
$$= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + p^2 - 2p + 5$$
$$= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5$$

이므로

$$k = \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5$$
$$= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{4} \times \frac{16}{9} + 5$$
$$= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}$$

따라서 $p = \frac{4}{3}$ 일 때, 최솟값 $\frac{11}{3}$ 을 갖는다.

41. 빗변의 길이가 40 인 직각이등변삼각형에 다음 그림과 같이 직사각형을 그릴 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

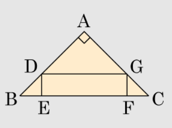


▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

다음 그림에서 선분 DE 의 길이를 x 라 하면
$\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이고 $\angle B = 45°$ 이므로
$\overline{BE} = x$ 이다.



마찬가지로 $\overline{FC} = x$
$\therefore\ \overline{EF} = 40 - x - x = 40 - 2x$
직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= x(40-2x) \\ &= -2x^2 + 40x \\ &= -2(x-10)^2 + 200 \end{aligned}$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값은 200 이다.

42. 가을 전어철을 맞아 전어의 어획량은 매일 현재 어획량의 10% 씩 늘어나고, 마리당 판매 가격은 매일 현재 가격의 5% 씩 줄어들고 있다. 며칠 후에 전어를 한꺼번에 팔아야 최대의 수입을 얻을 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 일

▷ 정답 : 5 일

해설

현재의 전어의 양과 가격을 각각 m마리, p원 라고 할 때, x 일 후의 전어의 양과 가격은 각각

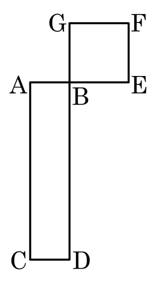
$m\left(1+\frac{1}{10}x\right)$마리, $p\left(1-\frac{1}{20}x\right)$ 원 이다.

이때, x 일 후의 수입을 y 원이라고 하면

$$\begin{aligned} y &= mp\left(1+\frac{1}{10}x\right)\left(1-\frac{1}{20}x\right) \\ &= mp\left(1+\frac{1}{20}x-\frac{1}{200}x^2\right) \\ &= -\frac{mp}{200}(x^2-10x-200) \\ &= -\frac{mp}{200}(x-5)^2+\frac{9}{8}mp \end{aligned}$$

따라서 $x = 5$ 일 때, y 는 최댓값을 가지므로 5 일 후에 팔면 최대의 수입을 얻을 수 있다.

43. 다음 그림과 같이 선분 AB 의 연장선 위에 $\overline{AB} : \overline{BE} = 2 : 3$ 이 되도록 점 E 를 잡고 선분 BE 를 한 변으로 하는 정사각형 BEFG 를 그릴 때, 선분 GD 의 길이는 12 이다. 이때 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{576}{13}$

해설

$\overline{AB} = x$ 라 하면
$\overline{AB} : \overline{BE} = 2 : 3$ 이므로

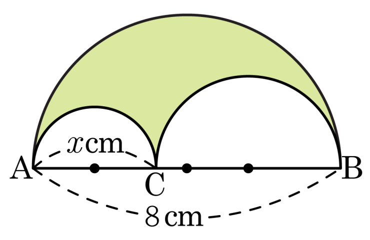
$\overline{BE} = \frac{3}{2}x = \overline{BG}$

$\overline{BD} = 12 - \overline{BG} = 12 - \frac{3}{2}x = \overline{AC}$

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= x^2 + \left(12 - \frac{3}{2}x\right)^2 \\ &= \frac{13}{4}\left(x - \frac{72}{13}\right)^2 + \frac{576}{13}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ 의 최솟값은 $\frac{576}{13}$ 이다.

44. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이가 8cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi\mathrm{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{\mathrm{AC}} = x\mathrm{cm}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BC}} = (8-x)\mathrm{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 반원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2} \times 4^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{64-16x+x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{2x^2-16x+64}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 2x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x+16-16) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x-4)^2 + 4\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 4 cm 일 때, 넓이는 최댓값 4π cm 를 갖는다.

45. 둘레의 길이가 10 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

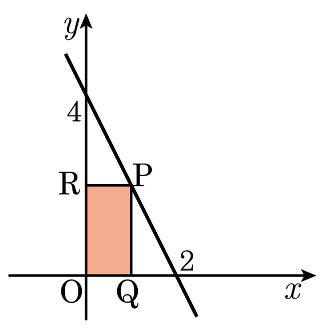
해설

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l 이라고 하면 $2r+l=10$, $l=10-2r$
부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(10-2r) \\ &= -r^2+5r \\ &= -\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4} \end{aligned}$$

따라서 반지름이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 넓이가 최대가 된다.

46. 직선 $y = -2x + 4$ 위의 제1 사분면에 있는 한 점 P 에서 x 축, y 축에 수선을 그어 그때의 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값은?



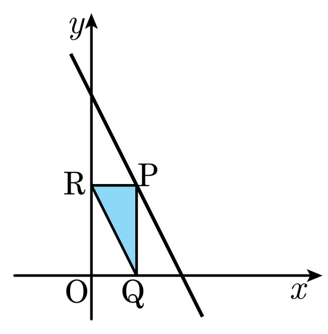
① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} y &= x(-2x+4)(0<x<2) \\ &= -2x^2+4x \\ &= -2(x^2-2x+1-1) \\ &= -2(x-1)^2+2 \end{aligned}$$

$x = 1$ 일 때 최댓값 2

47. 다음 그림과 같이 직선 $y = -2x + 6$ 위의 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, △PRQ 의 넓이의 최댓값을 구하면? (단, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이다.)



① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

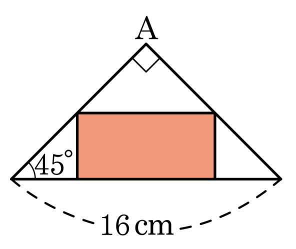
해설

점 P 의 x 좌표를 a 라 하면
$P(a,\ -2a+6),\ Q(a,\ 0),\ R(0, -2a+6)$
△PRQ 의 넓이를 y 라 하면

$$y = \frac{1}{2}a(-2a+6)$$
$$= -a^2 + 3a$$
$$= -\left(a^2 - 3a + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right)$$
$$= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$a = \frac{3}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$

48. 빗변의 길이가 16cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 그 넓이의 최댓값은?



① 16cm^2 ② 20cm^2 ③ 24cm^2

④ 28cm^2 ⑤ 32cm^2

해설

세로의 길이를 x , 넓이를 y 라 하면

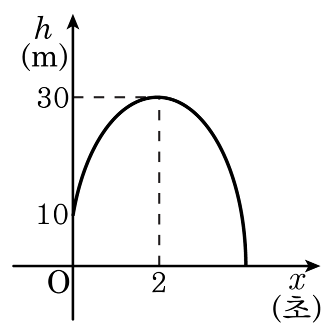
$y = (16-2x)x = 2(-x^2+8x)$

$= -2(x^2-8x+16-16)$

$= -2(x-4)^2+32$

$x=4$ 일 때 최댓값 32

49. 다음 그림은 지면으로부터 10m 높이에서 던져 올린 물체의 운동을 나타내는 그래프이다. 던진 후 몇 초 만에 다시 지면으로 떨어지는가?



① 4 초　　② $(\sqrt{6}-2)$ 초　　③ $(2+\sqrt{6})$ 초

④ 5 초　　⑤ 6 초

해설

$y=a(x-2)^2+30$ 이고, $(0,\ 10)$ 을 지난다.

$10=4a+30$

$\therefore a=-5$

$\therefore y=-5(x-2)^2+30=-5x^2+20x+10$

$x^2-4x-2=0$

$\therefore x=2+\sqrt{6}\ \ (\because x>0)$

50. 지면으로부터 $20\,\mathrm{m}$ 높이의 옥상에서 초속 $20\,\mathrm{m}$ 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 $h\,\mathrm{m}$ 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} h &= 20t - t^2 + 20 \\ &= -(t^2 - 20t) + 20 \\ &= -(t - 10)^2 + 120 \end{aligned}$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.