

1. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점의 좌표가 (1, 2) 이고 y 절편이 3 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① 0

② 1

③ 2

④ 4

⑤ 5

해설

꼭짓점이 (1, 2) 이므로 주어진 식은

$$y = a(x - 1)^2 + 2$$

y 절편이 3 이므로 (0, 3) 을 대입하면

$$3 = a + 2$$

$$\therefore a = 1$$

따라서 구하는 식은 $y = (x - 1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$

$$\therefore b = -2, c = 3$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

2. 꼭짓점이 (2, 3) 이고, 점(5, -6) 을 지나는 포물선이 y 축과 만나는 점의 좌표는?

① (0, -2)

② (0, 3)

③ (0, 1)

④ (0, 2)

⑤ (0, -1)

해설

$y = a(x - 2)^2 + 3$ 에 (5, -6) 을 대입하면

$$-6 = a(5 - 2)^2 + 3$$

$$9a = -9 \therefore a = -1$$

$$y = -(x - 2)^2 + 3$$

$$x = 0 \text{ 일 때 } y = -1$$

$$\therefore (0, -1)$$

3. x 축에 접하고 축의 방정식이 $x = 2$, y 절편이 -2 인 이차함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$

② $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2$

③ $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$

④ $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2$

⑤ $y = 2(x-2)^2 - 2$

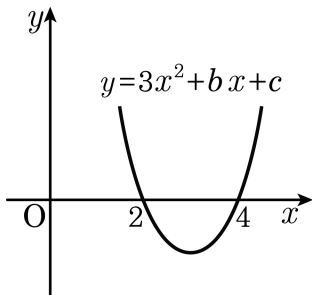
해설

$$y = a(x-2)^2 \text{ 의 } y \text{ 절편 } 4a = -2$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}(x-2)^2$$

4. 다음 그림은 이차함수 $y = 3x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 이 때, b , c 의 값을 각각 구하여라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $b = -18$

▷ 정답 : $c = 24$

해설

(2, 0) 을 대입하면 $0 = 12 + 2b + c \rightarrow 2b + c = -12$

(4, 0) 을 대입하면 $0 = 48 + 4b + c \rightarrow 4b + c = -48$

두 식을 연립하여 풀면 $b = -18$, $c = 24$

5. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11

② 21

③ 25

④ 81

⑤ 100

해설

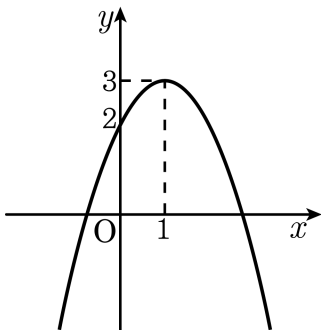
합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

6. 다음 그림은 이차함수의 그래프를 그린 것이다. 이 이차함수의 식을 구하면?



① $y = -2x^2 + 4x + 2$

② $y = -x^2 + 2x + 2$

③ $y = -2x^2 - 4x + 2$

④ $y = -x^2 - 2x + 2$

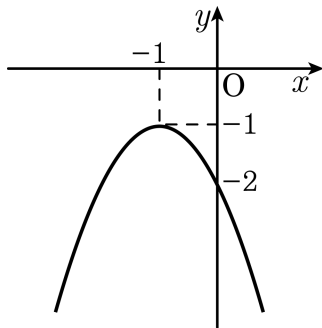
⑤ $y = -3x^2 - 6x + 2$

해설

$y = a(x - 1)^2 + 3$ 가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로
 $2 = a(0 - 1)^2 + 3$, $a = -1$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore y &= -(x - 1)^2 + 3 \\ &= -x^2 + 2x + 2\end{aligned}$$

7. 다음 포물선의 함수식을 바르게 나타낸 것은?



① $y = -(x + 1)^2 - 1$

② $y = -(x - 1)^2 - 1$

③ $y = -2(x + 1)^2 - 2$

④ $y = -2(x - 1)^2 - 1$

⑤ $y = -2(x + 1)^2 - 1$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1, -1)$ 이고 지나는 점은 $(0, -2)$ 이므로
 $y = a(x + 1)^2 - 1$ 에 지나는 점 $(0, -2)$ 를 대입하면 $-2 = a(0 + 1)^2 - 1$, $a = -1$ 이다.

따라서 $y = -(x + 1)^2 - 1$ 이 된다.

8. 꼭짓점의 좌표가 $(1, -2)$ 인 포물선이 두 점 $(2, -3)$, $(m, -6)$ 을 지날 때, 다음 중 m 의 값은?

①

-1

② 5

③ -3

④ -6

⑤ -9

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1, -2)$ 이므로

$y = a(x-1)^2 - 2$ 이고 점 $(2, -3)$ 을 지나므로 $-3 = a(2-1)^2 - 2$
 $a = -1$ 이다.

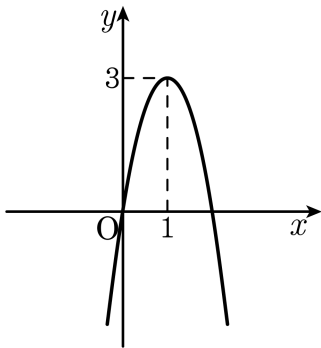
$$y = -(x-1)^2 - 2$$

점 $(m, -6)$ 을 지나므로

$$-6 = -(m-1)^2 - 2$$

$$\therefore m = 3 \text{ 또는 } m = -1$$

9. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 이 때, $a + b - c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = a(x - 1)^2 + 3$ 이 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = a(0 - 1)^2 + 3, a = -3$$

$$y = -3(x - 1)^2 + 3 = -3x^2 + 6x$$

$$a = -3, b = 6, c = 0$$

$$\therefore a + b - c = -3 + 6 - 0 = 3$$

10. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프의 꼭짓점이 $(-2, 2)$ 이고 점 $(0, 4)$ 를 지날 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점이 $(-2, 2)$ 이므로

$$y = a(x + 2)^2 + 2$$

점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 = a(0 + 2)^2 + 2, \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2 \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, \quad b = 2, \quad c = 4 \qquad \therefore abc = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

11. 세 점 $(0, -6)$, $(2, 0)$, $(-2, 4)$ 를 지나는 이차함수의 식은?

① $y = 2x^2 - x - 6$

② $y = 2x^2 + x - 6$

③ $y = 2x^2 + x + 6$

④ $y = -2x^2 - x - 6$

⑤ $y = -2x^2 + x + 6$

해설

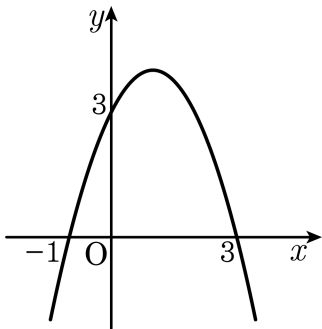
$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점을 대입하면

$$c = -6, 4a + 2b + c = 0, 4a - 2b + c = 4$$

$$a = 2, b = -1, c = -6$$

$$\therefore y = 2x^2 - x - 6$$

12. 다음은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. $(1, k)$ 가 이 그래프 위의 점일 때, k 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점 $(-1, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$ 을 각각 대입하여 a, b, c 를 구하면

$$a = -1, b = 2, c = 3$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3$$

$(1, k)$ 를 대입하면 $k = 4$ 이다.

13. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 세 점 $(0, 12)$, $(-2, -2b)$, $(1, 1 - 4a)$ 를 지날 때, $a - b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점을 대입하면 $c = 12$

$$-2b = 4a - 2b + c \cdots \textcircled{㉠}$$

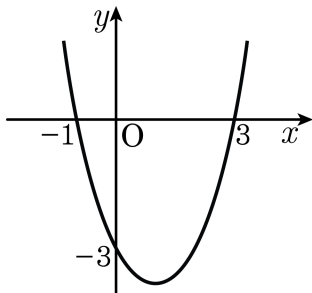
$$1 - 4a = a + b + c \cdots \textcircled{㉡}$$

$c = 12$ 를 ㉠에 대입하면 $a = -3$

$a = -3$, $c = 12$ 를 ㉡에 대입하면 $b = 4$

$$\therefore a - b + c = -3 - 4 + 12 = 5$$

14. 다음 그림과 같이 나타내어지는 포물선의 식은?



① $y = 3x^2 - 3x - 6$

② $y = -x^2 + 6x - 8$

③ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2$

④ $y = x^2 - 2x - 3$

⑤ $y = -x^2 + 5x - 4$

해설

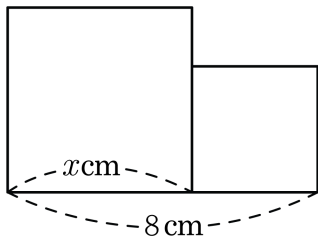
$y = a(x - 3)(x + 1)$ 이고, $(0, -3)$ 을 지난다.

$$-3 = -3a$$

$$a = 1$$

$$\text{따라서 } y = (x - 3)(x + 1) = x^2 - 2x - 3$$

15. 다음 그림과 같이 길이가 8cm 인 선분을 둘로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형을 만들었다. 두 정사각형의 넓이의 합을 $y\text{cm}^2$ 라 할 때, 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 하는 $x(\text{cm})$ 의 값과 그 때의 넓이 $y(\text{cm}^2)$ 를 구하여라.



- ① $x = 2, y = 12$ ② $x = 2, y = 14$ ③ $x = 2, y = 16$
 ④ $x = 4, y = 32$ ⑤ $x = 4, y = 34$

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (8-x)^2 \\ &= 2(x^2 - 8x + 16 - 16) + 64 \\ &= 2(x-4)^2 + 32 \end{aligned}$$

따라서 $x = 4$ 일 때 $y = 32$ 이다.

16. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 16

② 20

③ 36

④ 55

⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a , 넓이를 b 라 하면

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a) \\ &= -a^2 + 8a \\ &= -(a^2 - 8a + 16 - 16) \\ &= -(a - 4)^2 + 16 \end{aligned}$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.

따라서 $ab = 64$ 이다.

17. 지면으로부터 60m 되는 높이에서 초속 60m 로 곧바로 위로 쏘아 올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라고 하면 대략 $y = -5x^2 + 60x + 60$ 인 관계가 성립한다. 그 물체의 높이가 최대가 되는 것은 쏘아 올린 지 몇 초 후인가? 또한, 그 때의 높이를 구하여라.

▶ **답:** 초

▶ **중**: m

▶ 정답 : 6초

▶ 정답 : 240 m

해설

$$y = -5x^2 + 60x + 60 = -5(x - 6)^2 + 240$$

따라서 $x = 6$ 일 때, 최댓값 240을 갖는다.

18. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이고, 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점의 x 좌표가 3, -2 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$x = 2$ 에 대하여 대칭이므로 $y = a(x - 2)^2 + q$ 이고,

$y = x - 1$ 에서 $(3, 2)$, $(-2, -3)$ 을 지나므로,

$a + q = 2$, $16a + q = -3$ 에서

$a = -\frac{1}{3}$, $q = \frac{7}{3}$ 이므로

$$y = -\frac{1}{3}(x - 2)^2 + \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

따라서 $y = a + b + c = 2$ 이다.

19. 세 점 $(-1, -5)$, $(0, 5)$, $(2, 13)$ 을 지나는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (p, q) 일 때, $p - q$ 의 값은?

① 1

② 5

③ -5

④ -1

⑤ -11

해설

이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라고 놓으면

$(-1, -5)$ 를 지나므로 $-5 = a - b + c$

$(0, 5)$ 를 지나므로 $5 = c$

$(2, 13)$ 을 지나므로 $13 = 4a + 2b + c$

$\therefore a = -2, b = 8, c = 5$

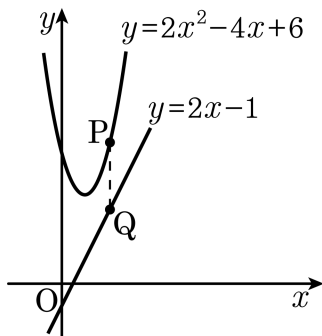
따라서 주어진 이차함수의 식은

$y = -2x^2 + 8x + 5 = -2(x - 2)^2 + 13$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $(2, 13)$ 이므로

$p - q = -11$ 이다.

20. 다음 그림과 같이 $y = 2x^2 - 4x + 6$ 과 $y = 2x - 1$ 이 y 축에 평행인 직선과 만나는 점을 P, Q 라 할 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이 때, 점 P 의 좌표를 $(t, 2t^2 - 4t + 6)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t, 2t - 1)$ 이다.

$$\overline{PQ} = 2t^2 - 4t + 6 - (2t - 1) = 2t^2 - 6t + 7 = 2 \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{5}{2}$$

$\therefore t = \frac{3}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{5}{2}$

21. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + 4a$ 의 최댓값은 음수이고, 그 그래프가 점 $(-a, 2a - 7)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{3}$

해설

$$\begin{aligned}y &= -3x^2 + 6x + 4a \\&= -3(x-1)^2 + 3 + 4a\end{aligned}$$

$y = -3(x-1)^2 + 3 + 4a$ 의 그래프가 점 $(-a, 2a-7)$ 을 지나므로
 $2a-7 = -3(-a-1)^2 + 3 + 4a$ 을 정리하면 $3a^2 + 4a - 7 = 0$,
 $(3a+7)(a-1) = 0$

$$\therefore a = -\frac{7}{3} \text{ or } 1$$

그런데 최댓값 $3 + 4a$ 의 값이 음수이므로 $a = -\frac{7}{3}$ 이다.

22. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② $-\frac{3}{8}$

③ $\frac{3}{8}$

④ 3

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\&= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\&= 2(x - 2)^2 - 12 + 3a\end{aligned}$$

$y = 2(x - 2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지나므로

$$8a + 5 = 2(2a - 2)^2 - 12 + 3a$$

$$8a^2 - 21a - 9 = 0, (8a + 3)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{8} \text{ 또는 } 3$$

그런데 최솟값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

i) $a = -\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

ii) $a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$

따라서 $a = 3$ 이다.

23. $x = 2$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x - p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}y &= a(x - 2)^2 - 1 \\&= a(x^2 - 4x + 4) - 1 \\&= ax^2 + 4ax + 4a - 1\end{aligned}$$

$$4a - 1 = 3$$

$$a = 1$$

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

$$apq = 1 \times 2 \times (-1) = -2$$

24. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -3 을 갖고, 그래프가 점 $(-1, 6)$ 을 지난다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2, -3)$ 이므로 $y = a(x - 2)^2 - 3$

점 $(-1, 6)$ 을 대입하면 $a = 1$

$y = (x - 2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ 에서

$a = 1, b = -4, c = 1$

따라서 $a + b + c = -2$ 이다.

25. 이차함수 $y = x^2 + mx + m$ 의 최솟값을 M 이라 할 때, M 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y = x^2 + mx + m = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + m$$

$$\text{최솟값 } M = -\frac{m^2}{4} + m$$

$$M = -\frac{m^2}{4} + m = -\frac{1}{4}(m-2)^2 + 1$$

$m = 2$ 일 때, M 은 최댓값 1 을 갖는다.

26. $x + y = 10$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 10

② 24

③ 40

④ 45

⑤ 50

해설

$$y = 10 - x$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$$

$$= x^2 + x^2 - 20x + 100$$

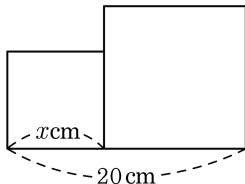
$$= 2x^2 - 20x + 100$$

$$= 2(x^2 - 10x + 25 - 25) + 100$$

$$= 2(x - 5)^2 + 50$$

따라서 $x = 5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

27. 다음 그림과 같이 길이가 20cm 인 선분을 두 부분으로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형 두 개를 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 10 cm

해설

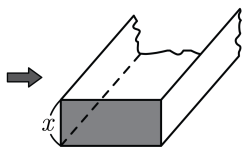
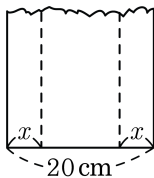
작은 정사각형의 한 변의 길이를 x , 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $20 - x$,

넓이를 y 라고 하면

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (20 - x)^2 \\ &= 2x^2 - 40x + 400 \\ &= 2(x - 10)^2 + 200 \end{aligned}$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 최솟값 200 을 갖는다.

28. 그림과 같이 너비가 20 cm 인 철판의 양쪽을 접어 물받이를 만들려고 한다. 색칠한 부분의 넓이가 최대가 되게 하려면 높이를 몇 cm 로 해야 하는지 구하여라.



답 :

cm



정답 : 5 cm

해설

색칠한 부분의 넓이를 y 라 하면

$$y = x(20 - 2x)$$

$$= -2x^2 + 20x$$

$$= -2(x - 5)^2 + 50$$

따라서 높이는 5 cm 로 해야 한다.

29. 밑변의 길이와 높이의 합이 28 cm 인 삼각형의 최대 넓이는?

① 90 cm^2

② 92 cm^2

③ 94 cm^2

④ 96 cm^2

⑤ 98 cm^2

해설

삼각형의 밑변의 길이를 $x \text{ cm}$, 높이를 $y \text{ cm}$ 라 하면

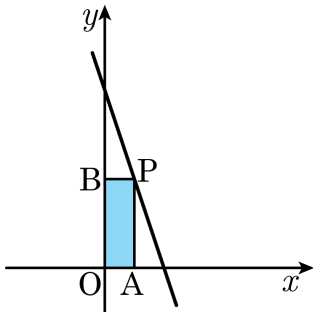
$$y = \frac{1}{2}x(28 - x)$$

$$= \frac{1}{2}(-x^2 + 28x)$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 28x)$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 14)^2 + 98$$

30. 다음 그림과 같이 일차함수 $y = -x + 4$ 의 그래프 위의 한 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 할 때, 직사각형 OAPB 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

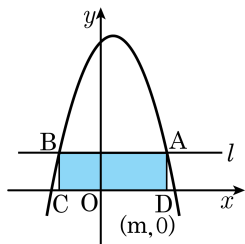
해설

A 의 좌표를 $(t, 0)$ 이라고 하면 P 의 좌표는 $(t, -t + 4)$ 이고 B 의 좌표는 $(0, -t + 4)$

$$\therefore \square OAPB = t \times (-t + 4) = -t^2 + 4t = -(t - 2)^2 + 4$$

$t = 2$ 일 때, 넓이의 최댓값 4

31. $y = -x^2 + x + 6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, $\square ABCD$ 의 둘레의 길이의 최댓값은? $\left(\frac{1}{2} < m < 3\right)$



① $\frac{11}{2}$

② $\frac{31}{4}$

③ 10

④ $\frac{49}{4}$

⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y = -x^2 + x + 6 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m, -m^2 + m + 6)$ 이다.

직사각형의 가로 길이는 $2\left(m - \frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로 길이는 $-m^2 + m + 6$
($\square ABCD$ 둘레의 길이)

$$= 2\left\{2\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2 + m + 6\right\}$$

$$= 2(2m - 1 - m^2 + m + 6)$$

$$= 2(-m^2 + 3m + 5)$$

$$= -2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{2}$$

$m = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

32. 지상 22m 되는 위치에서 초속 30m 로 위로 던져 올린 공의 t 초 후의 높이를 h m 라 하면 $h = -5t^2 + 30t + 22$ 인 관계가 성립한다. 이 공은 몇 초 후에 최고 높이에 도달하는가?

① 1 초

② 2 초

③ 3 초

④ 4 초

⑤ 5 초

해설

$$\begin{aligned} h &= -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 22 \\ &= -5(t - 3)^2 + 67 \end{aligned}$$

$t = 3$ 일 때, 최댓값 $h = 67$

33. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 4(a-1)x + a - 2b = 0$ 이 중근을 가질 때, b 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{17}{32}$

해설

$x^2 - 4(a-1)x + a - 2b = 0$ 가 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = 4(a-1)^2 - (a-2b) = 4a^2 - 9a + 4 + 2b = 0$$

$$\therefore b = -2a^2 + \frac{9}{2}a - 2 = -2\left(a - \frac{9}{8}\right)^2 + \frac{17}{32}$$

따라서 $a = \frac{9}{8}$ 일 때, b 는 최댓값 $\frac{17}{32}$ 을 갖는다.

34. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ 가 두 점 $(1, a + b)$, $(-3, -3a + b)$ 에서 만날 때, 함수 $h(x) = g(x) - f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

두 함수의 그래프의 교점의 x 좌표가 1 과 -3 이므로 $ax + b = x^2 + cx + d$,

즉, $x^2 + (c - a)x + (d - b) = 0$ 은 두 근이 1, -3 이다.

근과 계수의 관계에 의해

$$a - c = -2, d - b = -3$$

$$\begin{aligned}\therefore h(x) &= g(x) - f(x) \\ &= x^2 + (c - a)x + (d - b) \\ &= x^2 + 2x - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4\end{aligned}$$

따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

35. 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = -x + 2$ 에 대하여 $h(g(f(x)))$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, $h(g(f(M)))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -16

해설

$$g(f(x)) = 2(2x - 1)^2,$$

$$h(g(f(x))) = -2(2x - 1)^2 + 2 \text{ 이므로}$$

$$M = 2$$

$$\therefore h(g(f(m))) = -2(2M - 1)^2 + 2 = -16$$

36. 함수 $y = x^2 - px$ 와 $y = -x^2 + px$ 의 그래프에 의하여 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값이 26 일 때, p 의 값을 구하여라. (단, $p > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

포물선의 축이 $x = \frac{p}{2}$ 이므로 직사각형은 직선 $x = \frac{p}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

직사각형이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 t ($t > \frac{p}{2}$) 라 하면

가로의 길이는 $2 \times \left(t - \frac{p}{2}\right) = 2t - p$,

세로의 길이는 $(-t^2 + pt) - (t^2 - pt) = -2t^2 + 2pt$

이므로 직사각형의 둘레의 길이는

$2(-2t^2 + 2pt + 2t - p) = -4\left(t - \frac{p+1}{2}\right)^2 + p^2 + 1$ 이다.

따라서 $t = \frac{p+1}{2}$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $p^2 + 1 = 26$ 이므로 $p = 5$ 이다.

37. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$ 을 지나고
최솟값이 -3 일 때, 상수 a , b , c 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = \frac{1}{3}$

▷ 정답 : $b = \frac{2}{3}$

▷ 정답 : $c = -\frac{8}{3}$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$ 을 각각
지나므로

$$16a - 4b + c = 0$$

$$4a + 2b + c = 0$$

$$\therefore b = 2a, c = -8a$$

또 주어진 함수의 최솟값이 -3 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= ax^2 + 2ax - 8a \\ &= a(x+1)^2 - 9a \end{aligned}$$

$$\therefore -9a = -3$$

따라서 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{8}{3}$ 이다.

38. 이차함수 $y = ax^2 + 2bx + 4c$ 의 그래프가 두 점 $(-2, 0)$, $(4, 0)$ 을 지나고 최솟값이 -6 일 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{4}{3}$

해설

$y = ax^2 + 2bx + 4c$ 의 그래프가 두 점 $(-2, 0)$, $(4, 0)$ 을 각각 지나므로

$$4a - 4b + 4c = 0$$

$$a - b + c = 0$$

$$16a + 8b + 4c = 0$$

$$4a + 2b + c = 0$$

$$\therefore b = -a, c = -2a$$

또 주어진 함수의 최솟값이 -6 이므로

$$y = ax^2 + 2bx + 4c$$

$$= ax^2 - 2ax - 8a$$

$$= a(x - 1)^2 - 9a$$

$$\therefore -9a = -6$$

따라서 $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = -\frac{4}{3}$ 이므로 $a + b + c = -\frac{4}{3}$ 이다.

39. 이차함수 $y = x^2 - 2(m+1)x + 4m$ 의 최솟값을 a 이라 할 때, a 의 최댓값은?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 2(m+1)x + 4m \\&= \{x^2 - 2(m+1)x + (m+1)^2 - (m+1)^2\} + 4m \\&= \{x - (m+1)\}^2 - (m+1)^2 + 4m \\ \therefore \text{최솟값 } M &= -(m+1)^2 + 4m \\&= -m^2 + 2m - 1 \\&= -(m^2 - 2m + 1) \\&= -(m-1)^2\end{aligned}$$

따라서 a 의 최댓값은 0 이다.

40. 이차함수 $y = x^2 - px + p^2 - 2p + 5$ 의 최솟값을 k 이라 할 때, k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{11}{3}$

해설

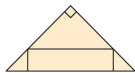
$$\begin{aligned}y &= x^2 - px + p^2 - 2p + 5 \\&= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + p^2 - 2p + 5 \\&= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}k &= \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5 \\&= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{4} \times \frac{16}{9} + 5 \\&= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{4}{3}$ 일 때, 최솟값 $\frac{11}{3}$ 을 갖는다.

41. 빗변의 길이가 40 인 직각이등변삼각형에 다음 그림과 같이 직사각형을 그릴 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

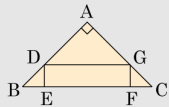


▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

다음 그림에서 선분 DE 의 길이를 x 라 하면
 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이고 $\angle B = 45^\circ$ 이므로
 $\overline{BE} = x$ 이다.



마찬가지로 $\overline{FC} = x$

$$\therefore \overline{EF} = 40 - x - x = 40 - 2x$$

직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= x(40 - 2x) \\ &= -2x^2 + 40x \\ &= -2(x - 10)^2 + 200 \end{aligned}$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값은 200 이다.

42. 가을 전어철을 맞아 전어의 어획량은 매일 현재 어획량의 10% 씩 늘어나고, 마리당 판매 가격은 매일 현재 가격의 5% 씩 줄어들고 있다. 며칠 후에 전어를 한꺼번에 팔아야 최대의 수입을 얻을 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : 5 일

▷ 정답 : 5 일

해설

현재의 전어의 양과 가격을 각각 m 마리, p 원 라고 할 때, x 일 후의 전어의 양과 가격은 각각

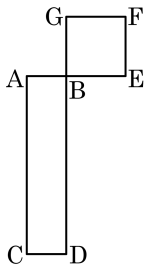
$m\left(1 + \frac{1}{10}x\right)$ 마리, $p\left(1 - \frac{1}{20}x\right)$ 원 이다.

이때, x 일 후의 수입을 y 원이라고 하면

$$\begin{aligned} y &= mp\left(1 + \frac{1}{10}x\right)\left(1 - \frac{1}{20}x\right) \\ &= mp\left(1 + \frac{1}{20}x - \frac{1}{200}x^2\right) \\ &= -\frac{mp}{200}(x^2 - 10x - 200) \\ &= -\frac{mp}{200}(x - 5)^2 + \frac{9}{8}mp \end{aligned}$$

따라서 $x = 5$ 일 때, y 는 최댓값을 가지므로 5 일 후에 팔면 최대의 수입을 얻을 수 있다.

43. 다음 그림과 같이 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{AB} : \overline{BE} = 2 : 3$ 이 되도록 점 E를 잡고 선분 BE를 한 변으로 하는 정사각형 BEFG를 그릴 때, 선분 GD의 길이는 12이다. 이때 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{576}{13}$

해설

$\overline{AB} = x$ 라 하면

$\overline{AB} : \overline{BE} = 2 : 3$ 이므로

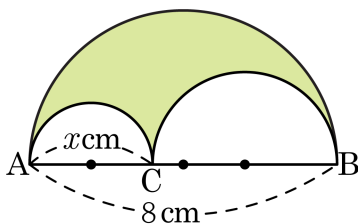
$$\overline{BE} = \frac{3}{2}x = \overline{BG}$$

$$\overline{BD} = 12 - \overline{BG} = 12 - \frac{3}{2}x = \overline{AC}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= x^2 + \left(12 - \frac{3}{2}x\right)^2 \\ &= \frac{13}{4} \left(x - \frac{72}{13}\right)^2 + \frac{576}{13}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ 의 최솟값은 $\frac{576}{13}$ 이다.

44. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{AB}$ 의 길이가 8cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi\text{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{AC} = x\text{cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (8 - x)\text{cm}$ 이다.

따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는

(전체 반원의 넓이 - 작은 두 반원의 넓이의 합)이다.

$$\frac{1}{2} \times 4^2\pi - \left\{ \frac{1}{2}\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{8-x}{2}\right)^2 \right\} = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{64 - 16x + x^2}{8}\pi \right) = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{2x^2 - 16x + 64}{8} \right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 2x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 8x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 8x + 16 - 16) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x - 4)^2 + 4\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 4cm 일 때, 넓이는 최댓값 $4\pi\text{cm}$ 를 갖는다.

45. 둘레의 길이가 10 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

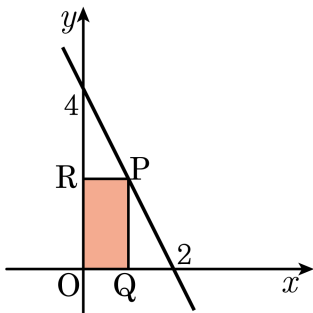
부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 $2r + l = 10$, $l = 10 - 2r$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(10 - 2r) \\ &= -r^2 + 5r \\ &= -\left(r - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

따라서 반지름이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 넓이가 최대가 된다.

46. 직선 $y = -2x + 4$ 위의 제1 사분면에 있는 한 점 P 에서 x 축, y 축에 수선을 그어 그때의 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값은?



① 2

② 3

③ 4

④ 5

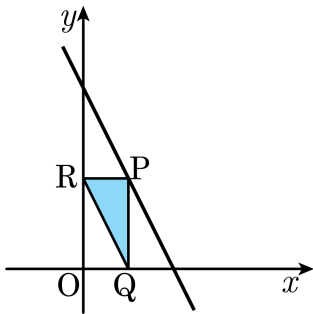
⑤ 7

해설

$$\begin{aligned}
 y &= x(-2x + 4) \quad (0 < x < 2) \\
 &= -2x^2 + 4x \\
 &= -2(x^2 - 2x + 1 - 1) \\
 &= -2(x - 1)^2 + 2
 \end{aligned}$$

$x = 1$ 일 때 최댓값 2

47. 다음 그림과 같이 직선 $y = -2x + 6$ 위의 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, $\triangle PRQ$ 의 넓이의 최댓값을 구하면? (단, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이다.)



① $\frac{9}{4}$

② $\frac{7}{4}$

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{9}{2}$

⑤ $\frac{7}{2}$

해설

점 P 의 x 좌표를 a 라 하면

$$P(a, -2a + 6), Q(a, 0), R(0, -2a + 6)$$

$\triangle PRQ$ 의 넓이를 y 라 하면

$$y = \frac{1}{2}a(-2a + 6)$$

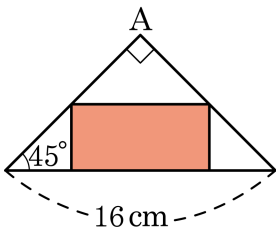
$$= -a^2 + 3a$$

$$= -\left(a^2 - 3a + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right)$$

$$= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$$a = \frac{3}{2} \text{ 일 때 최댓값 } \frac{9}{4}$$

48. 빗변의 길이가 16cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 그 넓이의 최댓값은?



① 16cm^2

② 20cm^2

③ 24cm^2

④ 28cm^2

⑤ 32cm^2

해설

세로의 길이를 x , 넓이를 y 라 하면

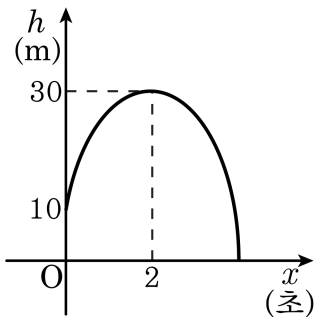
$$y = (16 - 2x)x = 2(-x^2 + 8x)$$

$$= -2(x^2 - 8x + 16 - 16)$$

$$= -2(x - 4)^2 + 32$$

$x = 4$ 일 때 최댓값 32

49. 다음 그림은 지면으로부터 10m 높이에서 던져 올린 물체의 운동을 나타내는 그래프이다. 던진 후 몇 초 만에 다시 지면으로 떨어지는가?



① 4 초

② $(\sqrt{6} - 2)$ 초

③ $(2 + \sqrt{6})$ 초

④ 5 초

⑤ 6 초

해설

$y = a(x - 2)^2 + 30$ 이고, $(0, 10)$ 을 지난다.

$$10 = 4a + 30$$

$$\therefore a = -5$$

$$\therefore y = -5(x - 2)^2 + 30 = -5x^2 + 20x + 10$$

$$x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\therefore x = 2 + \sqrt{6} \quad (\because x > 0)$$

50. 지면으로부터 20 m 높이의 옥상에서 초속 20 m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}h &= 20t - t^2 + 20 \\&= -(t^2 - 20t) + 20 \\&= -(t - 10)^2 + 120\end{aligned}$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.