

1. 다음 중 이차함수인 것은?

① $y = x^2 + x - x^2$

② $y = 0 \cdot x^2 + 3$

③ $y = x^2(-x^2 + 4x + 5)$

④ $y = x^2 + x + 3 - 2x^2$

⑤ $y = \frac{1}{x^2} + x - 1$

해설

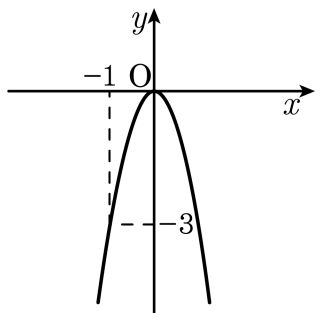
① $y = x^2 + x - x^2 = x$ 이므로 일차함수이다.

② $y = 0 \cdot x^2 + 3 = 3$ 이므로 상수함수이다.

③ $y = x^2 + (-x^2 + 4x + 5) = 4x + 5$ 이므로 일차함수이다.

⑤ $y = \frac{1}{x^2} + x - 1$ 는 분수함수이다.

2. 다음 그림과 같은 그래프가 나타내는 이차함수의 식은?



① $y = -3x^2$

② $y = -x^2$

③ $y = 3x^2$

④ $y = \frac{1}{3}x^2$

⑤ $y = -\frac{1}{3}x^2$

해설

$y = ax^2$ 에서 $(-1, -3)$ 을 지나므로 $-3 = a \times (-1)^2, a = -3$
 $\therefore y = -3x^2$

3. 다음 중 $y = x^2$ 의 그래프와 $y = -x^2$ 의 공통점이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 3 개)
- ① 원점을 지난다.
 - ② 아래로 볼록하다.
 - ③ y 축에 대하여 대칭이다.
 - ④ 그래프가 제 1 사분면을 지난다.
 - ⑤ $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

해설

x^2 의 계수가 양수면 아래로 볼록, 음수면 위로 볼록하다.

4. 다음 포물선을 꼭이 좁은 것부터 차례로 쓴 것을 고르면?

㉠ $y = x^2$	㉡ $y = 4x^2$
㉢ $y = \frac{3}{2}x^2$	㉣ $y = \frac{1}{4}x^2$

- ① ㉠-㉡-㉢-㉣
- ② ㉡-㉣-㉠-㉢
- ③ ㉡-㉢-㉠-㉣
- ④ ㉢-㉠-㉣-㉡
- ⑤ ㉣-㉡-㉢-㉠

해설

이차항의 계수의 절댓값이 클수록 포물선의 폭은 좁아진다.

5. 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동 시키면 점 $(1, p)$ 를 지난다. p 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동 시키면

$$y = -(x - 3)^2$$

$$\therefore p = -(1 - 3)^2 = -4$$

6. 이차함수 $f : R \rightarrow R$ 에서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ 이다. $f(2a) = 2a - 1$ 일 때, 상수 a 의 값은? (단, R 은 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2a) = 2a - 1$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times (2a)^2 - 2a + 1 = 2a - 1, \quad 2a^2 - 4a + 2 = 0, \quad a^2 - 2a + 1 =$$

$$0, \quad (a - 1)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

7. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프가 제 3사분면 위의 점 $(a, 3a)$ 를 지날 때, $2a$ 의 값은?

① -3 ② 3 ③ -4 ④ 4 ⑤ -2

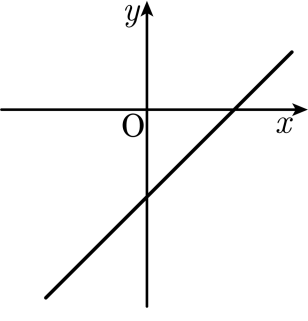
해설

$$3a = -2a^2, 2a \left(a + \frac{3}{2} \right) = 0$$

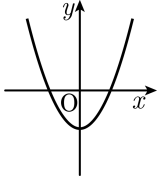
$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = -\frac{3}{2}$$

따라서 점 $(a, 3a)$ 가 제 3 사분면 위의 점이므로 $2a = 2 \times \left(-\frac{3}{2} \right) = -3$ 이다.

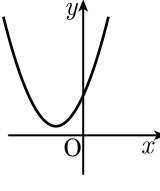
8. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y = bx^2 + a$ 의 그래프는?



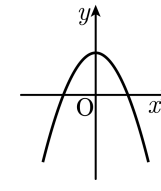
①



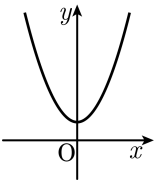
②



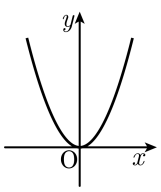
③



④



⑤



해설

$y = ax + b$ 그래프에서 $a > 0$, $b < 0$ 이므로 이차함수 $y = bx^2 + a$ 는 위로 볼록하고 y 절편이 양수이다.

9. 다음 이차함수의 그래프 중 위로 볼록하면서 폭이 가장 좁은 것을 골라라.

㉠ $y = 3x^2 - 1$	㉡ $y = -x^2 - 2$
㉢ $y = -\frac{1}{2}x^2$	㉣ $y = \frac{1}{3}x^2$
㉤ $y = -5x^2 + \frac{1}{3}$	㉥ $y = 5x^2$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉤

해설

x^2 의 계수가 음수이면서 절댓값이 가장 큰 이차함수를 찾는다.

10. 이차함수 $y = -(x+2)^2 + 1$ 의 그래프는 $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이다. $m - n$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ -1 ④ 3 ⑤ -3

해설

$$m = -2, n = 1$$

$$\therefore m - n = (-2) - 1 = -3$$

11. 이차함수 $y = -x^2 + 2x - 3$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값이 감소하는 x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x > 1$

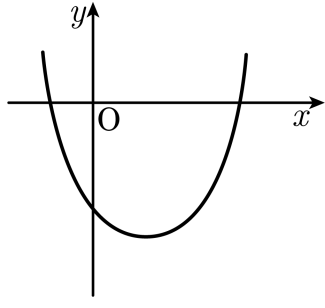
해설

$$y = -x^2 + 2x - 3$$

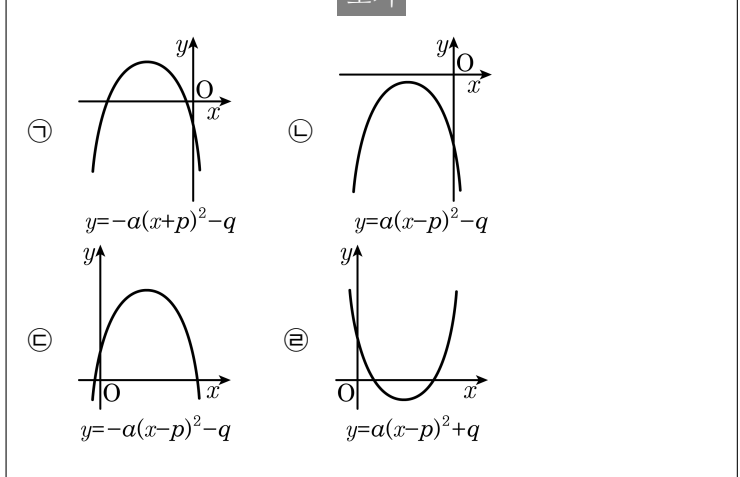
$$y = -(x-1)^2 - 2$$

따라서 꼭짓점이 $(1, -2)$ 인 위로 볼록한 그래프이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값이 감소하는 x 의 범위는 $x > 1$

12. 다음은 이차함수의 $y = 3a(x + p)^2 - q$ 의 그래프이다. 이 이차함수와 a, p, q 의 부호가 모두 같은 이차함수의 그래프를 보기에서 골라라.



보기



▶ 답 :

▶ 정답 : C

해설

$y = 3a(x + p)^2 - q$ 의 그래프에서
 $3a > 0, a > 0$ 이고 $-p > 0, p < 0$ 이고 $-q < 0, q > 0$ 이다.
 C의 $y = -a(x - p)^2 - q$ 의 그래프에서 $-a < 0, a > 0$ 이고 $p < 0$ 이고
 $-q < 0, q > 0$ 이므로
 두 그래프의 a, p, q 의 부호가 모두 같다.

13. 이차함수 $y = 3(x + 1)^2 + q$ 의 그래프가 모든 사분면을 지나기 위한 상수 q 의 범위는?

① $q < -1$

② $q < -2$

③ $q < -3$

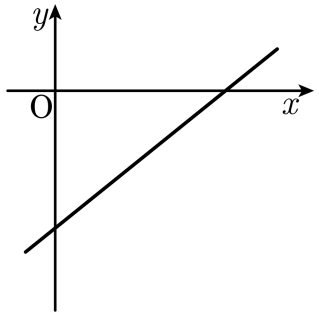
④ $q < -4$

⑤ $q < -5$

해설

꼭짓점은 $(-1, q)$ 로 아래로 볼록한 그래프이다.
모든 사분면을 지나려면 $3 + q < 0$ 이어야 한다.
 $\therefore q < -3$

14. 다음 그림은 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 이 때, 이차함수 $y = -(x + a)^2 + b$ 의 꼭짓점이 위치하는 사분면을 구하여라.



▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 3사분면

해설

일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프는 기울기는 양수이고 y 절편은 음수이다.

따라서 $a > 0, b < 0$ 이다.

이차함수 $y = -(x + a)^2 + b$ 의 꼭짓점은 $(-a, b)$ 이다.

따라서 $-a < 0, b < 0$ 이므로 꼭짓점은 제3 사분면에 위치한다.

15. $y = x^2 + 4x - 7$ 을 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼴로 고쳤을 때, $a + p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 4x - 7 \\ &= (x^2 + 4x + 4 - 4) - 7 \\ &= (x + 2)^2 - 11 \\ \therefore a &= 1, p = -2, q = -11 \\ \therefore a + p + q &= 1 - 2 - 11 = -12 \end{aligned}$$

16. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ 의 그래프는 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다. k 의 값은?

① -13 ② -5 ③ 3 ④ 11 ⑤ 13

해설

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 \\&= -\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16 - 16) + 3 \\&= -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 8 + 3 \\&= -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 11\end{aligned}$$

따라서 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축으로 4 만큼

y 축으로 11 만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore k = 11$$

17. $y = -x^2 + 2x + 3$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하는 x 의 범위는?

㉠ $x > 1$

㉡ $x < 1$

㉢ $x > 0$

㉣ $x > -1$

㉤ $x < -1$

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2x + 3 \\ &= -(x-1)^2 + 4 \end{aligned}$$

위로 볼록한 모양의 포물선이고 축의 방정식 $x = 1$ 이므로 따라서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하는 x 의 범위는 $\{x \mid x > 1\}$ 이다.

18. 이차함수 $y = -\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 a 만큼 평행이동하면 점 $(-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ 을 지난다고 할 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = -\frac{1}{4}x^2 + a$ 에 점 $(-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ 을 대입하면

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(-\sqrt{2})^2 + a$$

$$\therefore a = 1$$

19. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, $\frac{a^2}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

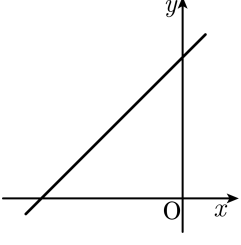
$$y = x^2 - ax + b = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b,$$

꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right)$ 가 x 축 위에 있으므로 $-\frac{a^2}{4} + b = 0$,

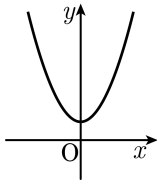
$$b = \frac{a^2}{4},$$

$$\frac{a^2}{b} = a^2 \times \frac{1}{b} = a^2 \times \frac{4}{a^2} = 4$$

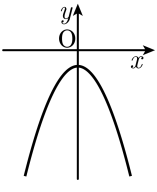
20. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프의 개형은?



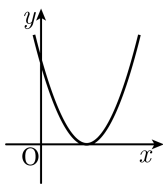
①



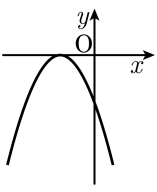
②



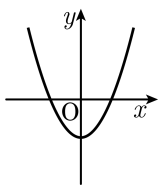
③



④



⑤



해설

$y = ax + b$ 의 그래프에서 $a > 0, b > 0$ 이다.

21. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 y 절편은 -3 이고, $f(-3) = f(1)$, $a + b = 3$ 을 만족할 때, $a - b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 y 절편은 -3 이므로 $c = -3$

$f(-3) = f(1)$ 이므로

$$9a - 3b + c = a + b + c$$

$$2a = b$$

또한 $a + b = 3$ 이므로 $a = 1$, $b = 2$

$$\therefore a - b + c = 1 - 2 - 3 = -4$$

22. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프는 $x = 1$ 인 직선에 대해 대칭이고 x 절편은 3 이다. $a + b = -2$ 를 만족할 때, $2a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \text{ 의 그래프가 } x = 1$$

인 직선에 대해 대칭이면

꼭짓점의 x 좌표가 1 이므로 $-\frac{b}{2a} = 1$,

$$b = -2a \cdots \textcircled{A}$$

$$a + b = -2 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에 의하여 $a = 2$, $b = -4$

또한 x 절편이 3 이므로 $9a + 3b + c = 0$

$$\therefore c = -6$$

따라서 $2a + b + c = 4 - 4 - 6 = -6$ 이다.

23. 포물선 $f(x) = ax^2 + bx + 4$ 는 점 $(-1, 4)$ 를 지나고, $g(x) = mx^2 + nx + p$ 는 점 $(5, -2)$ 를 지난다. 두 포물선이 y 축에 대하여 대칭일 때, 포물선 $g(x)$ 의 꼭짓점의 좌표를 구하면?

- ① $\left(\frac{1}{2}, \frac{61}{16}\right)$
 ② $\left(\frac{1}{2}, \frac{31}{8}\right)$
 ③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{63}{16}\right)$
- ④ $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$
 ⑤ $\left(\frac{1}{2}, \frac{163}{40}\right)$

해설

두 포물선 $f(x)$, $g(x)$ 가 y 축에 대하여 대칭이므로 $f(x)$ 는 점 $(-1, 4)$ 와 점 $(-5, -2)$ 를 지난다.

$f(x) = ax^2 + bx + 4$ 에 두 점 $(-1, 4), (-5, -2)$ 를 대입하면 $a - b + 4 = 4$ 이므로 $a = b$ 이다.

$$25a - 5b + 4 = -2$$

$$20a = -6$$

$$a = b = -\frac{3}{10}$$

$$f(x) = -\frac{3}{10}x^2 - \frac{3}{10}x + 4 = -\frac{3}{10}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{163}{40}$$

따라서 $f(x)$ 의 꼭짓점의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{163}{40}\right)$ 이므로 $g(x)$ 의

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{163}{40}\right)$ 이다.

24. 이차함수 $y = x^2 + 2x + 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하였더니 $x = -2$ 일 때, 최솟값 3 을 가졌다. 이 때, a , b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

▷ 정답 : $b = 1$

해설

$y = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y = (x + 1 - a)^2 + 2 + b = (x + 2)^2 + 3$$

$$\therefore a = -1, b = 1$$

25. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 $y = ax^2$ 의 그래프가 3 번째로 폭이 넓을 때, $|a|$ 의 범위는?

보기

㉠ $y = -\frac{3}{2}x^2$

㉡ $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$

㉢ $y = 2x^2 - x$

㉣ $-3(x+2)^2$

㉤ $y = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$

㉠ $1 < |a| < \frac{1}{2}$

㉡ $1 < |a| < \frac{3}{2}$

㉢ $1 < |a| < \frac{5}{2}$

㉣ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$

㉤ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{5}{2}$

해설

a 의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어진다.
 a 의 절댓값을 각각 구하면
 ㉠ $\frac{3}{2}$ ㉡ $\frac{1}{2}$ ㉢ 2 ㉣ 3 ㉤ 1 이므로 폭이 넓은 순서는 ㉡, ㉣, ㉠, ㉢, ㉤ 이다. 따라서 두 번째인 1과 세 번째인 $\frac{3}{2}$ 사이에 있어야 하므로
 ㉣ $1 < |a| < \frac{3}{2}$ 이다.

26. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + 2$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (a, b) 이고,
y 축과의 교점의 y 좌표가 q 일 때, $\frac{a+b}{q}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -3x^2 - 6x + 2$ 의 식을 $y = a(x+p)^2 + q$ 의 꼴로 바꾸면
 $y = -3(x^2 + 2x + 1 - 1) + 2$

$y = -3(x+1)^2 + 5$ 이므로

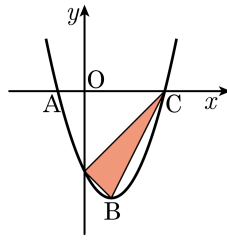
i) 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 5) \therefore a = -1, b = 5$

ii) y 축과 만나는 점의 x 좌표는 0 이므로 $x = 0$ 을 대입하면

$q = 2$

따라서 $\frac{a+b}{q} = \frac{(-1)+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ 이다.

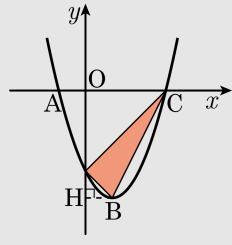
27. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 A, 꼭짓점을 B, x 축과 만나는 한 점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설



i) $A(0, -3)$

ii) $y = x^2 - 2x - 3$
 $= (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3$
 $= (x - 1)^2 - 4$

$\therefore B(1, -4)$

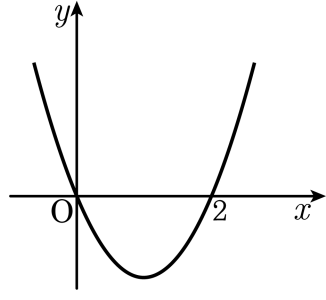
iii) $0 = x^2 - 2x - 3$
 $= (x - 3)(x + 1)$

$\therefore x = 3$ 또는 $x = -1$

양수인 x 절편이므로 $C(3, 0)$ 이다.

iv) $\triangle ABC$
 $= \square OHBC - \triangle OAC - \triangle AHB$
 $= \frac{1}{2} \times (3 + 1) \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1$
 $= 8 - \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 3$

28. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 의 그래프는 몇 사분면을 지나는가?

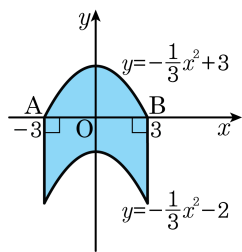


- ① 제 1, 2, 3 사분면
- ② 제 1, 3 사분면
- ③ 제 2, 4 사분면
- ④ 제 2, 3, 4 사분면
- ⑤ 제 1, 2 사분면

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에서 $c = 0$
또한, $y = ax\left(x + \frac{b}{a}\right)$ 에서
 $-\frac{b}{a} = 2 > 0$
 $\therefore \frac{b}{a} < 0$
그러므로 $ax + by + c = 0$ 에서
 $y = -\frac{a}{b}x$
 $\therefore -\frac{a}{b} > 0 \left(\because \frac{b}{a} < 0\right)$
따라서 제1, 3 사분면을 지난다.

29. 다음 그림은 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$, $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$ 의 그래프이다. 이차함수 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ 의 그래프가 x 축과 두 점 A, B에서 만날 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



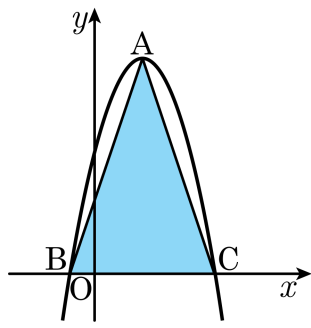
▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

색칠한 부분 중 $y > 0$ 인 부분을 잘라 아래에 붙이면 직사각형 모양이 된다. 가로 길이는 6 이고, $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$ 에 $x = 3$ 를 대입하면 $y = -5$ 이므로 높이는 5 이다. 따라서 색칠한 부분의 넓이는 $6 \times 5 = 30$ 이다.

30. 다음 이차함수 $y = -x^2 + 4x + 5$ 의 그래프에서 점 A 는 꼭짓점, 두 점 B 와 C 는 x 축과의 교점일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



- ① 15 ② 21 ③ 27 ④ 33 ⑤ 39

해설

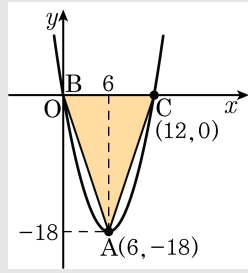
$y = -x^2 + 4x + 5 = -(x - 2)^2 + 9$ 에서 꼭짓점의 좌표는 A (2, 9)
 $y = 0$ 일 때, $0 = -x^2 + 4x + 5$, $x^2 - 4x - 5 = 0$ $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5$ 또는 $x = -1$
따라서 두 점 B, C 의 좌표는 B (-1, 0), C (5, 0) 이므로 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$ 이다.

31. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x$ 의 꼭짓점을 A, y 축과 만나는 점을 B, 점 B의 포물선의 축에 대하여 대칭인 점을 C라 할 때 $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 108

해설

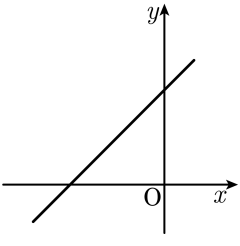


$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 12 \times 18 = 108$$

32. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $y = ax^2 - bx$ 의 그래프의 꼭짓점은 어느 위치에 있는가?

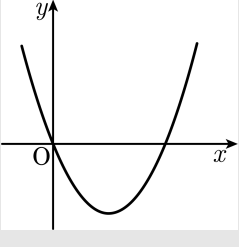
- ① x 축 위
- ② y 축 위
- ③ 제 1 사분면
- ④ 제 2 사분면

⑤ 제 4 사분면



해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 $y = ax^2 - bx$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점과 축은 y 축의 오른쪽에 있으며 원점을 지난다.



33. 이차함수 $f(x) = x^2 - 1$ 에 대하여 $f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1} = f(f^n(x))$ 라 할 때, $f^{2009}(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f^1(-1) = 0$$

$$f^2(-1) = f(f^1(-1)) = f(0) = -1$$

$$f^3(-1) = f(f^2(-1)) = f(-1) = 0$$

$$f^4(-1) = f(f^3(-1)) = f(0) = -1$$

⋮

$$\therefore f^{2009}(-1) = 0$$

34. 이차함수 $f(x) = x^2 - 3$ 에 대하여 $f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1} = f(f^n(x))$ 라 할 때, $f^{1111}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$f^1(1) = -2$$

$$f^2(1) = f(-2) = 1$$

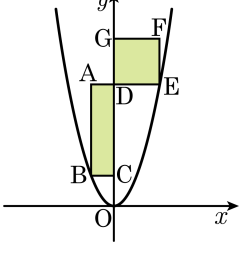
$$f^3(1) = f(1) = -2$$

$$f^4(1) = f(-2) = 1$$

⋮

$$\therefore f^{1111}(1) = -2$$

35. 다음 그림에서 포물선은 $y = 2x^2$ 이고, 직사각형 ABCD의 넓이와 정사각형 DEFG의 넓이는 같다. $\overline{DE} = 2\overline{AD}$ 일 때, 점 E의 x 좌표값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{3}$

해설

점 E의 x 좌표값을 p 라 하면 $\overline{DE} = 2\overline{AD} = p$ 이다.

$\square ABCD = \square DEFG$ 에서 $\overline{AD} \times \overline{CD} = \overline{DE}^2$,

$$\frac{1}{2}\overline{DE} \times \overline{CD} = \overline{DE}^2$$

$$\therefore \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{CD}, \overline{CD} = 2p \dots \textcircled{A}$$

또, $\overline{BC} = \overline{AD} = \frac{p}{2}$ 이므로 점 $B\left(-\frac{p}{2}, \frac{p^2}{2}\right)$, $\overline{OC} = \frac{p^2}{2}$,

$\overline{DE} = p$ 에서 점 $E(p, 2p^2)$, $\overline{OD} = 2p^2$

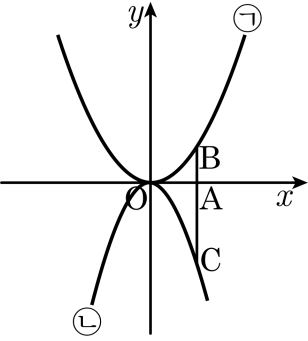
$$\therefore \overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = 2p^2 - \frac{p^2}{2} = \frac{3}{2}p^2 \dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B}\text{에서 } \frac{3}{2}p^2 = 2p, p(3p - 4) = 0$$

$$\therefore p = \frac{4}{3} (\because p > 0)$$

따라서 점 E의 x 좌표값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

36. 그림과 같이 2 개의 포물선 $y = \frac{1}{2}x^2 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$, $y = -x^2 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$ 이 있다.
점 $A(a, 0)$ 을 지나며, x 축에 수직인 직선이 포물선 $\textcircled{\text{㉠}}$ 과 만나는 점을 B , 포물선 $\textcircled{\text{㉡}}$ 과 만나는 점을 C 라 한다. $\overline{BC} = \frac{4}{3}$ 일 때, a 의 값을 구하면?

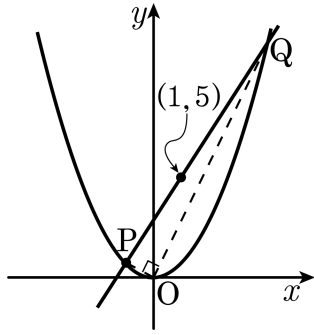


- ① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

해설

$$\begin{aligned} & B\left(a, \frac{1}{2}a^2\right), C(a, -a^2) \\ \overline{BC} &= \frac{1}{2}a^2 - (-a^2) = \frac{3}{2}a^2 = \frac{4}{3} \\ \therefore a &= \frac{2\sqrt{2}}{3} (\because a > 0) \end{aligned}$$

37. 다음 그림과 같이 점 $(1, 5)$ 를 지나는 직선이 포물선 $y = x^2$ 과 원점이 아닌 두 점 P, Q에서 만난다. $\angle POQ = 90^\circ$ 일 때, 직선 PQ의 방정식은?



- ① $y = x + 4$ ② $y = 2x + 3$ ③ $y = 3x + 2$
 ④ $y = 4x + 1$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

해설

직선 PQ의 기울기를 a 라 하면 점 $(1, 5)$ 를 지나므로 $y - 5 = a(x - 1)$
 $\therefore y = ax - a + 5$
 $y = x^2$, $y = ax - a + 5$ 의 교점의 x 좌표를 α , β 라 할 때,
 α , β 는 방정식 $x^2 = ax - a + 5$, 즉 $x^2 - ax + a - 5 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ 의 근이다.
 점 $P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ 이고, 직선 PO와 QO의 기울기는 각각 $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$ 이고,
 $\overline{PO} \perp \overline{QO}$ 이므로 $\alpha\beta = -1 \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 의하여 $a - 5 = -1$ ($\therefore$ 근과 계수관계)
 $\therefore a = 4$
 따라서 구하는 직선의 방정식은 $y = 4x + 1$

38. 이차함수 $y = \frac{1}{2}(x+a)^2 + b$ 의 그래프는 $x < -2$ 이면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하고, $x > -2$ 이면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다. 이 그래프가 점 $(-1, 3)$ 을 지날 때, 꼭짓점의 좌표를 구하면?

① $(-2, 1)$

② $(3, 5)$

③ $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$

④ $(2, 5)$

⑤ $\left(-1, \frac{2}{5}\right)$

해설

$x = -2$ 를 기준으로 x 값에 따른 y 값의 변화가 달라지므로, 축의 방정식은 $x = -2$, $\therefore a = 2$

$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + b$ 의 그래프가 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로 $3 =$

$$\frac{1}{2}(-1+2)^2 + b, \therefore b = \frac{5}{2}$$

따라서 $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{5}{2}$ 에서 꼭짓점의 좌표는 $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$ 이다.

39. $y = 2(x - 3)^2 - 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 , y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동 한 이차함수의 그래프 위에 두 점 A(2, 8), B(a , b) 의 y 축에 대하여 대칭인 점을 각각 C, D 라 하고, 원점을 O 라 한다. $\triangle ABC$ 와 $\triangle BOD$ 의 넓이의 비가 $2 : a^2$ 일 때, a 의 값을 구하면? (단, $0 < a < 2$)

- ① $a = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$
 ③ $a = \frac{-1 + \sqrt{10}}{2}$
 ⑤ $a = \frac{2}{3}$
- ② $a = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$
 ④ $a = \frac{-1 - \sqrt{10}}{2}$

해설

$y = 2(x - 3)^2 - 5$ 의 그래프를 평행이동하면 $y = 2x^2$ 이다. 점 A(2, 8) 의 y 축에 대하여 대칭인 점 C 의 좌표는 (-2, 8) 이고, 점 B(a , b) 의 y 축에 대하여 대칭인 점 D 의 좌표는 (- a , b) 이다. 이 때, $\triangle ABC$ 의 $\overline{AC}$ 를 밑변, 점 A, B 의 y 좌표의 차를 높이로 하면 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times (8 - b)$
 이 식에 $b = 2a^2$ 을 대입하면 ($\because (a, b)$ 는 $y = 2x^2$ 위의 점)
 $\frac{1}{2} \times 4 \times (8 - 2a^2) = 4(4 - a^2)$
 또한, $\triangle BOD = \frac{1}{2} \times 2a \times 2a^2 = 2a^3$
 $\triangle ABC$ 와 $\triangle BOD$ 의 넓이의 비가 $2 : a^2$ 이므로 $4(4 - a^2) : 2a^3 = 2 : a^2$
 $\therefore a^2(4 - a^2) = a^3, a^2 + a - 4 = 0$ 에서 $a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$
 여기서 $0 < a < 2$ 이므로 $a = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

40. x 축 위의 두 점 A(5, 0), B(-3, 0)과 이차함수 $y = a(x+1)^2$ 의 그래프와 직선 $y = -12$ 와의 두 교점 C, D를 연결한 사각형은 평행사변형일 때, 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{3}{4}$

해설

□ABCD는 평행사변형이므로 마주 보는 두 변의 길이가 같다.

$$\overline{AB} = \overline{CD} = 8$$

점 C와 D는 직선 $x = -1$ 을 중심으로 좌우대칭이므로 B(-5, -12), C(3, -12)

점 C와 점 D는 $y = a(x+1)^2$ 위의 점이므로

$$-12 = 16a$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4}$$

41. 이차함수 $y = -\frac{2}{3}(x-2)^2$ 의 그래프와 직선 $y = -6$ 과의 두 교점 A, B와 x 축 위의 두 점 C(-2, 0), D(p , 0)을 연결한 사각형이 평행사변형일 때, 상수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = -\frac{2}{3}(x-2)^2$ 의 그래프와 직선 $y = -6$ 과의 두 교점 A, B는

$-6 = -\frac{2}{3}(x-2)^2$ 에서 $x = 5, -1$ 이다.

∴ $\overline{AB} = 6$

□ABCD는 평행사변형이므로 마주 보는 두 변의 길이가 같다.

따라서 $\overline{AB} = \overline{CD} = 6$ 이다.

점 C의 좌표가 (-2, 0)이므로 점 D의 좌표는 (4, 0)이다.

∴ $p = 4$

42. 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프가 점 (1, 2)를 지나고, 이 그래프와 원점에 대하여 대칭인 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (-2, 4)일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

$y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼭짓점의 좌표는 (p, q)

원점 대칭하면 $(-p, -q) = (-2, 4)$

$\therefore p = 2, q = -4$

$y = a(x - 2)^2 - 4$ 의 그래프가 점 (1, 2)를 지나므로

$2 = a(1 - 2)^2 - 4$

$\therefore a = \frac{3}{2}$

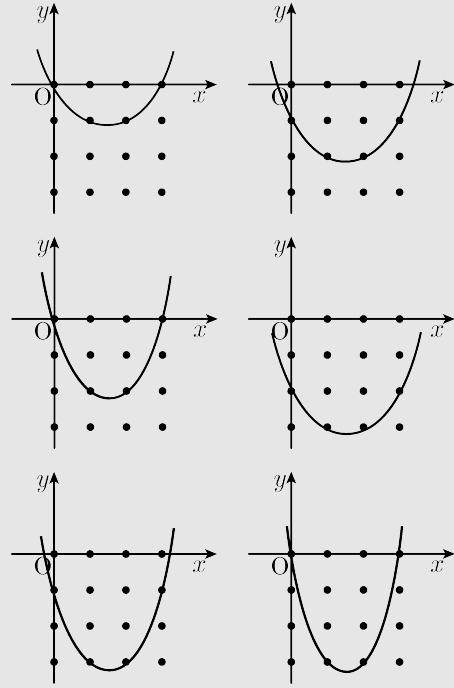
43. 좌표평면 위의 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$, $-\frac{7}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ 의 영역에서 x , y 좌표가 모두 정수인 점 중 원점을 포함한 4개의 점을 지나는 서로 다른 이차함수의 그래프는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12개

해설

주어진 범위에서 x 좌표가 될 수 있는 정수는 0, 1, 2, 3 이고
 y 좌표가 될 수 있는 정수는 -3, -2, -1, 0이다.
 포물선이 아래로 볼록한 경우에 아래 그림과 같이 모두 6개를
 그릴 수 있다.



포물선이 위로 볼록한 경우도 마찬가지로 6개의 포물선을 그릴 수 있다.
따라서 구하는 포물선의 개수는 12개이다.

44. $f(-3) = 15$, $f(x^2) \cdot (x^2 + x + 3) = f(x)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(-9)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{125}{93}$

해설

$f(x^2) \cdot (x^2 + x + 3) = f(x)$ 에서 $x = -3$ 을 대입하면 $9f(9) = f(-3) = 15$

$$\therefore f(9) = \frac{5}{3}$$

따라서

$f(x^2) \cdot (x^2 + x + 3) = f(x)$ 에서 $f(x^2) = \frac{f(x)}{(x^2 + x + 3)}$ 이고

$f(x^2) \cdot (x^2 - x + 3) = f(-x)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x^2) \cdot (x^2 - x + 3) \\ &= \frac{f(x)}{(x^2 + x + 3)} \cdot (x^2 - x + 3) \end{aligned}$$

이 식에 $x = 9$ 를 대입하면

$$f(-9) = \frac{5}{93} \times 75 = \frac{125}{93} \text{ 이다.}$$

45. 두 이차함수 $f(x) = x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x^2 - 2$ 에 대하여 $h(x) = \frac{g(x+1)}{f(x)}$ 이라고 할 때, $h(1)h(2)h(3) \cdots h(30)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{511}$

해설

$f(x) = (x+2)^2 - 2, g(x) = x^2 - 2$ 이므로
 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
 $y = g(x)$ 의 그래프가 되므로
 $\therefore g(x) = f(x-2)$
 $\therefore h(1)h(2)h(3) \cdots h(30)$
 $= \frac{g(2)g(3)g(4) \cdots g(31)}{f(1)f(2)f(3) \cdots f(30)}$
 $= \frac{f(0)f(1)f(2) \cdots f(29)}{f(1)f(2)f(3) \cdots f(30)}$
 $= \frac{f(0)}{f(30)} = \frac{2}{1022} = \frac{1}{511}$

46. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + p$ 의 그래프에서 x 축과의 두 교점을 A, B 라 하자. $\overline{AB} = 4$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표는?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$y = -x^2 - 2x + p = -(x + 1)^2 + p + 1$$

축의 방정식이 $x = -1$ 이고 $\overline{AB} = 4$ 이므로

$$\therefore A(-3, 0), B(1, 0)$$

$$B(1, 0) \text{ 을 } y = -x^2 - 2x + p \text{ 에 대입하면 } -1^2 - 2 + p = 0, \therefore p = 3$$

$$\therefore y = -(x + 1)^2 + 4$$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 4)$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표는 -1 이다.

48. 이차함수 $y = 4x^2$ 의 그래프 위의 점 P와 점 Q는 좌표의 y값이 같다. 두 점 P와 Q 그리고 A(3, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQA의 넓이가 32일 때, 점 P와 점 Q의 y 좌표값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

점 P의 좌표를 $(a, 4a^2)$ 이라 하면 점 Q의 좌표는 $(-a, 4a^2)$

이므로

삼각형 PQA는 밑변이 $2a$, 높이는 $4a^2$ 이다.

$$\Delta PQA = \frac{1}{2} \times 2a \times 4a^2 = 4a^3 = 32$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 점 P와 점 Q의 y 좌표값은 16이다.

49. 다음 보기 중 이차함수에 대한 설명이 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 는 $x = b$ 를 축으로 하고 점 $(0, a)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
- ㉡ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서 $|a|$ 의 값이 같으면 폭도 같다.
- ㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 좁아진다.
- ㉤ $y = -x^2$ 에서 $x < 0$ 일 때, x 값이 증가하면 y 값도 증가한다.
- ㉥ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

- ① ㉠,㉡,㉠

② ㉠,㉡,㉤

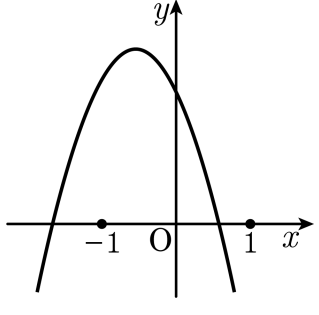
③ ㉠,㉡,㉥
- ④ ㉡,㉢,㉤

⑤ ㉡,㉤,㉥

해설

- ㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 은 $x = 0$ 을 축으로 하고 점 $(0, b)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
- ㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 넓어진다.
- 따라서 옳은 것은 ㉡,㉤,㉥이다.

50. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 다음 중 옳은 것을 구하면?



- ① $a > 0$
- ② $b < 0$
- ③ $c < 0$
- ④ $a + b + c > 0$
- ⑤ $a - b + c < 0$

해설

- ① 위로 볼록하므로 $a < 0$
- ② 축이 y 축의 왼쪽에 있으므로 $ab > 0$ 따라서 $b < 0$ 이다.
- ③ y 절편이 양수이므로 $c > 0$
- ④ $x = 1$ 일 때, $y = a + b + c < 0$
- ⑤ $x = -1$ 일 때, $y = a - b + c > 0$