1. 다음 중 이차함수인 것은?

① $y = x^2 + x - x^2$

② $y = 0 \cdot x^2 + 3$

③ $y = x^2(-x^2 + 4x + 5)$

④ $y = x^2 + x + 3 - 2x^2$

⑤ $y = \dfrac{1}{x^2} + x - 1$

해설

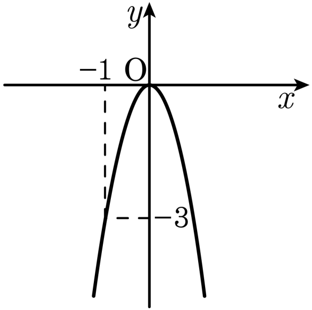
① $y = x^2 + x - x^2 = x$ 이므로 일차함수이다.

② $y = 0 \cdot x^2 + 3 = 3$ 이므로 상수함수이다.

③ $y = x^2 + (-x^2 + 4x + 5) = 4x + 5$ 이므로 일차함수이다.

⑤ $y = \dfrac{1}{x^2} + x - 1$ 는 분수함수이다.

2. 다음 그림과 같은 그래프가 나타내는 이차함수의 식은?



① $y=-3x^2$ ② $y=-x^2$ ③ $y=3x^2$

④ $y=\frac{1}{3}x^2$ ⑤ $y=-\frac{1}{3}x^2$

해설

$y=ax^2$ 에서 $(-1,\ -3)$ 을 지나므로 $-3=a\times(-1)^2$, $a=-3$

$\therefore y=-3x^2$

3. 다음 중 $y = x^2$ 의 그래프와 $y = -x^2$ 의 공통점이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 3 개)

① 원점을 지난다.

② 아래로 볼록하다.

③ y 축에 대하여 대칭이다.

④ 그래프가 제 1 사분면을 지난다.

⑤ $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

해설

x^2 의 계수가 양수면 아래로 볼록, 음수면 위로 볼록하다.

4. 다음 포물선을 폭이 좁은 것부터 차례로 쓴 것을 고르면?

㉠ $y = x^2$	㉡ $y = 4x^2$
㉢ $y = \frac{3}{2}x^2$	㉣ $y = \frac{1}{4}x^2$

① ㉠-㉡-㉢-㉣ ② ㉡-㉣-㉠-㉢ ③ ㉡-㉢-㉠-㉣

④ ㉢-㉠-㉣-㉡ ⑤ ㉣-㉡-㉢-㉠

해설

이차항의 계수의 절댓값이 클수록 포물선의 폭은 좁아진다.

5. 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동 시키면 점 $(1, p)$를 지난다. p의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 3만틈 평행이동 시키면

$y = -(x-3)^2$

$\therefore p = -(1-3)^2 = -4$

6. 이차함수 $f : R \to R$ 에서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ 이다. $f(2a) = 2a - 1$ 일 때, 상수 a 의 값은? (단, R은 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2a) = 2a - 1$ 이므로

$\frac{1}{2} \times (2a)^2 - 2a + 1 = 2a - 1, \quad 2a^2 - 4a + 2 = 0, \quad a^2 - 2a + 1 = 0, \quad (a-1)^2 = 0$

$\therefore \ a = 1$

7. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프가 제 3사분면 위의 점 $(a,\ 3a)$ 를 지날 때, $2a$ 의 값은?

① -3　② 3　③ -4　④ 4　⑤ -2

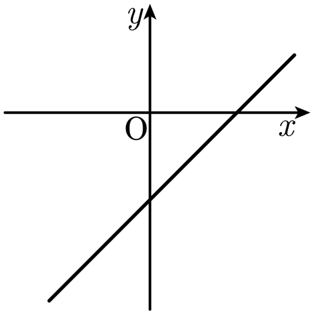
해설

$3a = -2a^2,\ 2a\left(a + \dfrac{3}{2}\right) = 0$

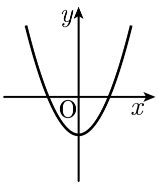
$\therefore\ a = 0$ 또는 $a = -\dfrac{3}{2}$

따라서 점 $(a,\ 3a)$ 가 제 3 사분면 위의 점이므로 $2a = 2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -3$ 이다.

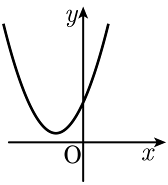
8. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y = bx^2 + a$ 의 그래프는?



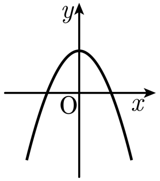
①



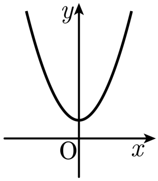
②



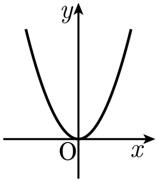
③



④



⑤



해설

$y = ax+b$ 그래프에서 $a > 0,\ b < 0$ 이므로 이차함수 $y = bx^2+a$ 는 위로 볼록하고 y 절편이 양수이다.

9. 다음 이차함수의 그래프 중 위로 볼록하면서 폭이 가장 좁은 것을 골라라.

㉠ $y = 3x^2 - 1$	㉡ $y = -x^2 - 2$
㉢ $y = -\frac{1}{2}x^2$	㉣ $y = \frac{1}{3}x^2$
㉤ $y = -5x^2 + \frac{1}{3}$	㉥ $y = 5x^2$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉤

해설

x^2 의 계수가 음수이면서 절댓값이 가장 큰 이차함수를 찾는다.

10. 이차함수 $y=-(x+2)^2+1$ 의 그래프는 $y=-x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이다. $m-n$ 의 값은?

① 1　② 2　③ -1　④ 3　⑤ -3

해설

$m=-2,\ n=1$

$\therefore\ m-n=(-2)-1=-3$

11. 이차함수 $y = -x^2 + 2x - 3$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값이 감소하는 x 의 범위를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $x > 1$

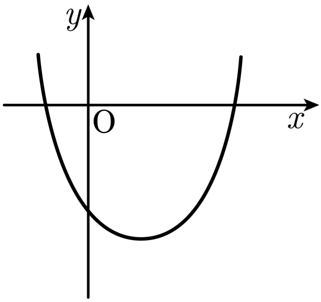
해설

$y = -x^2 + 2x - 3$

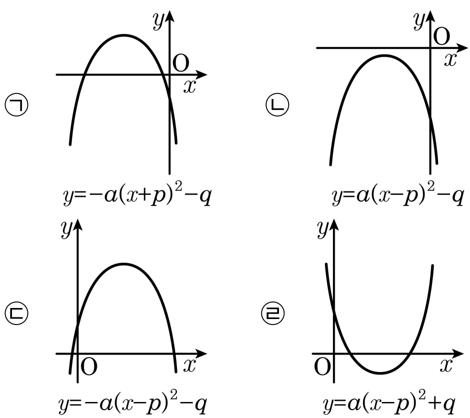
$y = -(x-1)^2 - 2$

따라서 꼭짓점이 $(1,\ -2)$ 인 위로 볼록한 그래프이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값이 감소하는 x 의 범위는 $x > 1$

12. 다음은 이차함수의 $y=3a(x+p)^2-q$ 의 그래프이다. 이 이차함수와 $a,\ p,\ q$ 의 부호가 모두 같은 이차함수의 그래프를 보기에서 골라라.



보기



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$y=3a(x+p)^2-q$ 의 그래프에서
$3a>0,\ a>0$ 이고 $-p>0,\ p<0$ 이고 $-q<0,\ q>0$ 이다.
㉢의 $y=-a(x-p)^2-q$ 의 그래프에서 $-a<0,\ a>0$ 이고 $p<0$ 이고
$-q<0,\ q>0$ 이므로
두 그래프의 $a,\ p,\ q$ 의 부호가 모두 같다.

13. 이차함수 $y = 3(x+1)^2 + q$ 의 그래프가 모든 사분면을 지나기 위한 상수 q 의 범위는?

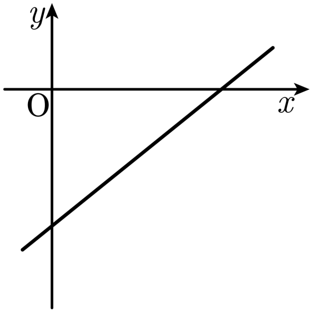
① $q < -1$　② $q < -2$　③ $q < -3$

④ $q < -4$　⑤ $q < -5$

해설

꼭짓점은 $(-1,\ q)$ 로 아래로 볼록한 그래프이다.
모든 사분면을 지나려면 $3 + q < 0$ 이어야 한다.
$\therefore q < -3$

14. 다음 그림은 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 이 때, 이차함수 $y = -(x+a)^2 + b$ 의 꼭짓점이 위치하는 사분면을 구하여라.



▶ **답 :** ______사분면

▷ **정답 :** 제 3사분면

해설

일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프는 기울기는 양수이고 y 절편은 음수이다.

따라서 $a > 0, b < 0$ 이다.

이차함수 $y = -(x+a)^2 + b$ 의 꼭짓점은 $(-a, b)$ 이다.

따라서 $-a < 0, b < 0$ 이므로 꼭짓점은 제3 사분면에 위치한다.

15. $y=x^2+4x-7$ 을 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 고쳤을 때, $a+p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2+4x-7 \\ &= \left(x^2+4x+4-4\right)-7 \\ &= (x+2)^2-11 \end{aligned}$$

$\therefore\ a=1,\ p=-2,\ q=-11$

$\therefore\ a+p+q=1-2-11=-12$

16. 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2-4x+3$ 의 그래프는 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다. k 의 값은?

① -13　② -5　③ 3　④ 11　⑤ 13

해설

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2-4x+3 \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-8x+16-16)+3 \\ &= -\frac{1}{2}(x-4)^2+8+3 \\ &= -\frac{1}{2}(x-4)^2+11 \end{aligned}$$

따라서 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축으로 4 만큼

y 축으로 11 만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore k=11$

17. $y = -x^2 + 2x + 3$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하는 x 의 범위는?

① $x > 1$　② $x < 1$　③ $x > 0$

④ $x > -1$　⑤ $x < -1$

해설

$$y = -x^2 + 2x + 3$$
$$= -(x-1)^2 + 4$$

위로 볼록한 모양의 포물선이고 축의 방정식 $x = 1$ 이므로
따라서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하는 x 의 범위는
$\{x \mid x > 1\}$ 이다.

18. 이차함수 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 a 만큼 평행이동하면 점 $\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 을 지난다고 할 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y=-\frac{1}{4}x^2+a$ 에 점 $\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 을 대입하면

$$\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(-\sqrt{2})^2+a$$

$\therefore a=1$

19. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, $\frac{a^2}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

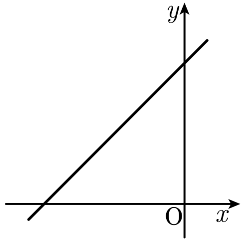
$y = x^2 - ax + b = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$,

꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, \ -\frac{a^2}{4} + b\right)$ 가 x 축 위에 있으므로 $-\frac{a^2}{4} + b = 0$,

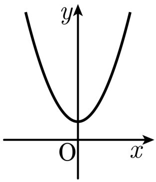
$b = \frac{a^2}{4}$,

$\frac{a^2}{b} = a^2 \times \frac{1}{b} = a^2 \times \frac{4}{a^2} = 4$

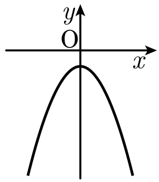
20. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프의 개형은?



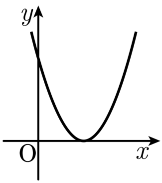
①



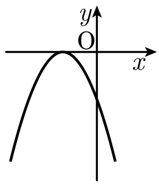
②



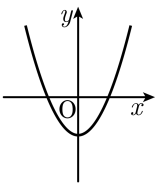
③



④



⑤



해설

$y = ax + b$ 의 그래프에서

$a > 0, b > 0$ 이다.

21. 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 y 절편은 -3 이고, $f(-3)=f(1)$, $a+b=3$ 을 만족할 때, $a-b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$f(x)=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 y 절편은 -3 이므로 $c=-3$

$f(-3)=f(1)$ 이므로

$9a-3b+c=a+b+c$

$2a=b$

또한 $a+b=3$ 이므로 $a=1,\ b=2$

$\therefore\ a-b+c=1-2-3=-4$

22. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프는 $x = 1$ 인 직선에 대해 대칭이고 x 절편은 3 이다. $a + b = -2$ 를 만족할 때, $2a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + c$ 의 그래프가 $x = 1$ 인 직선에 대해 대칭이면

꼭짓점의 x 좌표가 1 이므로 $-\dfrac{b}{2a} = 1$,

$b = -2a \ \cdots$ ㉠

$a + b = -2 \ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a = 2,\ b = -4$

또한 x 절편이 3 이므로 $9a + 3b + c = 0$

$\therefore\ c = -6$

따라서 $2a + b + c = 4 - 4 - 6 = -6$ 이다.

23. 포물선 $f(x) = ax^2+bx+4$ 는 점 $(-1, 4)$ 를 지나고, $g(x) = mx^2+nx+p$ 는 점 $(5, -2)$ 를 지난다. 두 포물선이 y 축에 대하여 대칭일 때, 포물선 $g(x)$ 의 꼭짓점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1}{2}, \frac{61}{16}\right)$ ② $\left(\frac{1}{2}, \frac{31}{8}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{63}{16}\right)$
④ $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{2}, \frac{163}{40}\right)$

해설

두 포물선 $f(x)$, $g(x)$ 가 y 축에 대하여 대칭이므로 $f(x)$ 는 점 $(-1, 4)$ 와 점 $(-5, -2)$ 를 지난다.
$f(x) = ax^2 + bx + 4$ 에 두 점 $(-1, 4), (-5, -2)$ 를 대입하면 $a - b + 4 = 4$ 이므로 $a = b$ 이다.

$25a - 5b + 4 = -2$

$20a = -6$

$a = b = -\frac{3}{10}$

$$f(x) = -\frac{3}{10}x^2 - \frac{3}{10}x + 4 = -\frac{3}{10}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{163}{40}$$

따라서 $f(x)$ 의 꼭짓점의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{163}{40}\right)$ 이므로 $g(x)$ 의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{163}{40}\right)$ 이다.

24. 이차함수 $y = x^2 + 2x + 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하였더니 $x = -2$ 일 때, 최솟값 3 을 가졌다. 이 때, a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

▷ 정답 : $b = 1$

해설

$y = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 ,y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$y = (x+1-a)^2 + 2 + b = (x+2)^2 + 3$

$\therefore a = -1,\ b = 1$

25. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 $y = ax^2$ 의 그래프가 3 번째로 폭이 넓을 때, $|a|$ 의 범위는?

보기

㉠ $y = -\frac{3}{2}x^2$

㉡ $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$

㉢ $y = 2x^2 - x$

㉣ $-3(x+2)^2$

㉤ $y = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$

① $1 < |a| < \frac{1}{2}$
② $1 < |a| < \frac{3}{2}$
③ $1 < |a| < \frac{5}{2}$
④ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$
⑤ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{5}{2}$

해설

a 의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어진다.
a 의 절댓값을 각각 구하면
㉠ $\frac{3}{2}$ ㉡ $\frac{1}{2}$ ㉢ 2 ㉣ 3 ㉤ 1 이므로 폭이 넓은 순서는 ㉡, ㉤, ㉠, ㉢, ㉣ 이다. 따라서 두 번째인 1과 세 번째인 $\frac{3}{2}$ 사이에 있어야 하므로 ④ $1 < |a| < \frac{3}{2}$ 이다.

26. 이차함수 $y=-3x^2-6x+2$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (a, b) 이고, y 축과의 교점의 y 좌표가 q 일 때, $\frac{a+b}{q}$ 의 값은?

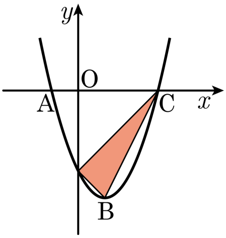
① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y=-3x^2-6x+2$ 의 식을 $y=a(x+p)^2+q$ 의 꼴로 바꾸면
$y=-3(x^2+2x+1-1)+2$
$y=-3(x+1)^2+5$ 이므로
i) 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 5)$ $\therefore a=-1, b=5$
ii) y 축과 만나는 점의 x 좌표는 0 이므로 $x=0$ 을 대입하면
$q=2$

따라서 $\frac{a+b}{q}=\frac{(-1)+5}{2}=\frac{4}{2}=2$ 이다.

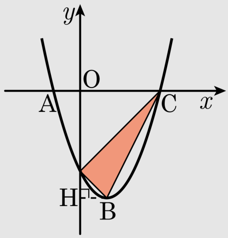
27. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 A, 꼭짓점을 B, x 축과 만나는 한 점을 C 라 할 때, $\triangle$ABC 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설



i) A$(0,\ -3)$

ii) $y = x^2 - 2x - 3$

$= (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3$

$= (x - 1)^2 - 4$

$\therefore$ B$(1,\ -4)$

iii) $0 = x^2 - 2x - 3$

$= (x - 3)(x + 1)$

$\therefore\ x = 3$ 또는 $x = -1$

양수인 x 절편이므로 C$(3,\ 0)$ 이다.

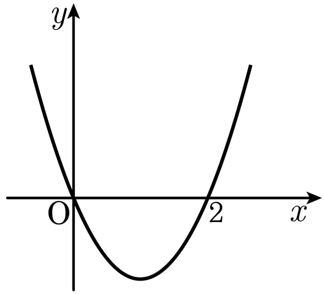
iv) $\triangle$ABC

$= \square$OHBC $- \triangle$OAC $- \triangle$AHB

$= \dfrac{1}{2} \times (3 + 1) \times 4 - \dfrac{1}{2} \times 3 \times 3 - \dfrac{1}{2} \times 1 \times 1$

$= 8 - \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2} = 3$

28. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 의 그래프는 몇 사분면을 지나는가?



① 제 1, 2, 3 사분면

② 제 1, 3 사분면

③ 제 2, 4 사분면

④ 제 2, 3, 4 사분면

⑤ 제 1, 2 사분면

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에서 $c = 0$

또한, $y = ax\left(x + \frac{b}{a}\right)$ 에서

$-\frac{b}{a} = 2 > 0$

$\therefore \frac{b}{a} < 0$

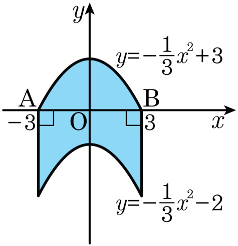
그러므로 $ax + by + c = 0$ 에서

$y = -\frac{a}{b}x$

$\therefore -\frac{a}{b} > 0 \left(\because \frac{b}{a} < 0\right)$

따라서 제1, 3 사분면을 지난다.

29. 다음 그림은 $y=-\frac{1}{3}x^2+3$, $y=-\frac{1}{3}x^2-2$ 의 그래프이다. 이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2+3$ 의 그래프가 x 축과 두 점 A, B 에서 만날 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



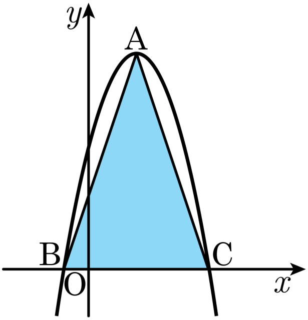
▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

색칠한 부분 중 $y>0$ 인 부분을 잘라 아래에 붙이면 직사각형 모양이 된다. 가로의 길이는 6 이고, $y=-\frac{1}{3}x^2-2$ 에 $x=3$ 를 대입하면 $y=-5$ 이므로 높이는 5 이다. 따라서 색칠한 부분의 넓이는 $6\times5=30$ 이다.

30. 다음 이차함수 $y=-x^2+4x+5$ 의 그래프에서 점 A 는 꼭짓점, 두 점 B 와 C 는 x 축과의 교점일 때, △ABC 의 넓이는?



① 15 ② 21 ③ 27 ④ 33 ⑤ 39

해설

$y=-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9$ 에서 꼭짓점의 좌표는 A $(2,9)$

$y=0$ 일 때, $0=-x^2+4x+5$, $x^2-4x-5=0$ $(x-5)(x+1)=0$

$\therefore x=5$ 또는 $x=-1$

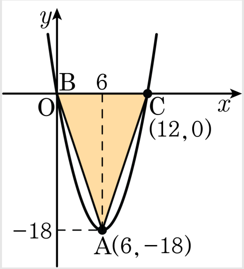
따라서 두 점 B , C 의 좌표는 B $(-1,0)$, C $(5,0)$ 이므로 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\times 9=27$ 이다.

31. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x$ 의 꼭짓점을 A , y 축과 만나는 점을 B , 점 B 의 포물선의 축에 대하여 대칭인 점을 C 라 할 때 $\triangle$ABC 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

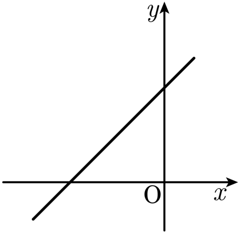
▷ 정답 : 108

해설



$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times 12 \times 18 = 108$$

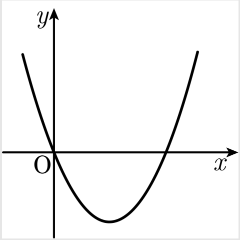
32. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $y = ax^2 - bx$ 의 그래프의 꼭짓점은 어느 위치에 있는가?



① x 축 위
② y 축 위
③ 제 1 사분면
④ 제 2 사분면
⑤ 제 4 사분면

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 $y = ax^2 - bx$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점과 축은 y축의 오른쪽에 있으며 원점을 지난다.



33. 이차함수 $f(x) = x^2 - 1$에 대하여 $f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1} = f(f^n(x))$라 할 때, $f^{2009}(-1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f^1(-1) = 0$
$f^2(-1) = f(f'(-1)) = f(0) = -1$
$f^3(-1) = f(f^2(-1)) = f(-1) = 0$
$f^4(-1) = f(f^3(-1) = f(0) = -1$
$\vdots$
$\therefore\ f^{2009}(-1) = 0$

34. 이차함수 $f(x) = x^2 - 3$에 대하여 $f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1} = f(f^n(x))$라 할 때, $f^{1111}(1)$의 값을 구하여라.

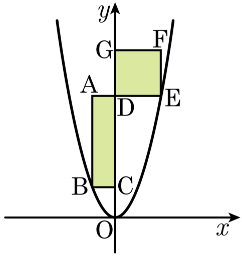
▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f^1(1) = -2$
$f^2(1) = f(-2) = 1$
$f^3(1) = f(1) = -2$
$f^4(1) = f(-2) = 1$
$\vdots$
$\therefore\ f^{1111}(1) = -2$

35. 다음 그림에서 포물선은 $y = 2x^2$ 이고, 직사각형 ABCD 의 넓이와 정사각형 DEFG 의 넓이는 같다. $\overline{DE} = 2\overline{AD}$ 일 때, 점 E 의 x 좌표값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{4}{3}$

해설

점 E 의 x 좌표값을 p 라 하면 $\overline{DE} = 2\overline{AD} = p$ 이다.

$\square ABCD = \square DEFG$ 에서 $\overline{AD} \times \overline{CD} = \overline{DE}^2$,

$\dfrac{1}{2}\overline{DE} \times \overline{CD} = \overline{DE}^2$

$\therefore\ \overline{DE} = \dfrac{1}{2}\overline{CD}$, $\overline{CD} = 2p \quad \cdots$ ㉠

또, $\overline{BC} = \overline{AD} = \dfrac{p}{2}$ 이므로 점 B$\left(-\dfrac{p}{2},\ \dfrac{p^2}{2}\right)$, $\overline{OC} = \dfrac{p^2}{2}$,

$\overline{DE} = p$ 에서 점 E$(p,\ 2p^2)$, $\overline{OD} = 2p^2$

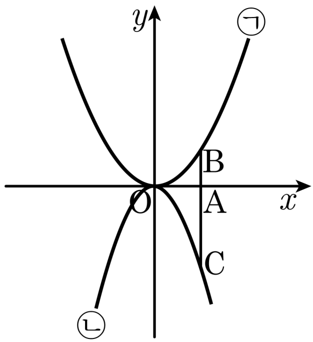
$\therefore\ \overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = 2p^2 - \dfrac{p^2}{2} = \dfrac{3}{2}p^2 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{3}{2}p^2 = 2p$, $p(3p-4) = 0$

$\therefore\ p = \dfrac{4}{3} (\because\ p > 0)$

따라서 점 E 의 x 좌표값은 $\dfrac{4}{3}$ 이다.

36. 그림과 같이 2 개의 포물선 $y=\frac{1}{2}x^2 \cdots$ ㉠ , $y=-x^2 \cdots$ ㉡ 이 있다. 점 $A(a,\ 0)$ 을 지나며, x 축에 수직인 직선이 포물선 ㉠ 과 만나는 점을 B , 포물선 ㉡과 만나는 점을 C 라 한다. $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{4}{3}$ 일 때, a 의 값을 구하면?



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

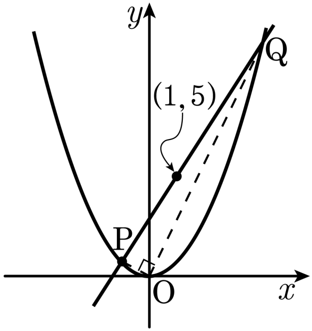
해설

$\mathrm{B}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right),\ \mathrm{C}(a,\ -a^2)$

$\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}a^2-(-a^2)=\frac{3}{2}a^2=\frac{4}{3}$

$\therefore a=\frac{2\sqrt{2}}{3}(\because a>0)$

37. 다음 그림과 같이 점 $(1,\ 5)$를 지나는 직선이 포물선 $y = x^2$과 원점이 아닌 두 점 P, Q에서 만난다. $\angle \mathrm{POQ} = 90^\circ$ 일 때, 직선 PQ의 방정식은?



① $y = x + 4$ ② $y = 2x + 3$ ③ $y = 3x + 2$

④ $y = 4x + 1$ ⑤ $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2}$

해설

직선 PQ의 기울기를 a라 하면 점 $(1,\ 5)$를 지나므로 $y - 5 = a(x - 1)$

$\therefore y = ax - a + 5$

$y = x^2,\ y = ax - a + 5$의 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta$라 할 때,

$\alpha,\ \beta$는 방정식 $x^2 = ax - a + 5$, 즉 $x^2 - ax + a - 5 = 0 \cdots\cdots$ ㉠의 근이다.

점 $\mathrm{P}\left(\alpha,\ \alpha^2\right)$, $\mathrm{Q}\left(\beta,\ \beta^2\right)$이고, 직선 PO와 QO의 기울기는 각각

$\dfrac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha,\ \dfrac{\beta^2}{\beta} = \beta$이고,

$\overline{\mathrm{PO}} \perp \overline{\mathrm{QO}}$이므로 $\alpha\beta = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a - 5 = -1$ ($\because$근과 계수관계)

$\therefore a = 4$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y = 4x + 1$

38. 이차함수 $y = \frac{1}{2}(x+a)^2 + b$ 의 그래프는 $x < -2$ 이면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하고, $x > -2$ 이면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다. 이 그래프가 점 $(-1,\ 3)$ 을 지날 때, 꼭짓점의 좌표를 구하면?

① $(-2,\ 1)$
② $(3,\ 5)$
③ $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$
④ $(2,\ 5)$
⑤ $\left(-1,\ \frac{2}{5}\right)$

해설

$x = -2$를 기준으로 x 값에 따른 y 값의 변화가 달라지므로, 축의 방정식은 $x = -2$, $\therefore a = 2$

$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + b$ 의 그래프가 점 $(-1,\ 3)$ 을 지나므로 $3 = \frac{1}{2}(-1+2)^2 + b$, $\therefore b = \frac{5}{2}$

따라서 $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{5}{2}$ 에서 꼭짓점의 좌표는 $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$ 이다.

39. $y=2(x-3)^2-5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 , y축의 방향으로 5 만큼 평행이동 한 이차함수의 그래프 위에 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 8)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점을 각각 C , D 라 하고, 원점을 O 라 한다. $\triangle\mathrm{ABC}$ 와 $\triangle\mathrm{BOD}$ 의 넓이의 비가 $2\ :\ a^2$ 일 때, a 의 값을 구하면? (단, $0<a<2$)

① $a=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ② $a=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

③ $a=\dfrac{-1+\sqrt{10}}{2}$ ④ $a=\dfrac{-1-\sqrt{10}}{2}$

⑤ $a=\dfrac{2}{3}$

해설

$y=2(x-3)^2-5$ 의 그래프를 평행이동하면 $y=2x^2$ 이다. 점 $\mathrm{A}(2,8)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점 C 의 좌표는 $(-2,8)$ 이고, 점 $\mathrm{B}(a,b)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점 D 의 좌표는 $(-a,b)$ 이다. 이 때, $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 $\overline{\mathrm{AC}}$ 를 밑변, 점 A, B 의 y 좌표의 차를 높이로 하면 $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times4\times(8-b)$

이 식에 $b=2a^2$ 을 대입하면 ($\because$ $(a,\ b)$ 는 $y=2x^2$ 위의 점)

$\dfrac{1}{2}\times4\times(8-2a^2)=4(4-a^2)$

또한, $\triangle\mathrm{BOD}=\dfrac{1}{2}\times2a\times2a^2=2a^3$

$\triangle\mathrm{ABC}$ 와 $\triangle\mathrm{BOD}$ 의 넓이의 비가 $2:a^2$ 이므로 $4(4-a^2):2a^3=2:a^2$

$\therefore\ a^2(4-a^2)=a^3, a^2+a-4=0$ 에서 $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

여기서 $0<a<2$ 이므로 $a=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

40. x축 위의 두 점 A(5, 0), B(−3, 0)과 이차함수 $y = a(x+1)^2$의 그래프와 직선 $y = -12$와의 두 교점 C, D를 연결한 사각형은 평행사변형일 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{3}{4}$

해설

□ABCD는 평행사변형이므로 마주 보는 두 변의 길이가 같다.

$\overline{AB} = \overline{CD} = 8$

점 C와 D는 직선 $x = -1$을 중심으로 좌우대칭이므로 B(−5, −12), C(3, −12)

점 C와 점 D는 $y = a(x+1)^2$ 위의 점이므로

$-12 = 16a$

$\therefore\ a = -\frac{3}{4}$

41. 이차함수 $y=-\frac{2}{3}(x-2)^2$ 의 그래프와 직선 $y=-6$과의 두 교점 A, B와 x 축 위의 두 점 $\mathrm{C}(-2,\ 0)$, $\mathrm{D}(p,\ 0)$을 연결한 사각형이 평행사변형일 때, 상수 p의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y=-\frac{2}{3}(x-2)^2$ 의 그래프와 직선 $y=-6$과의 두 교점 A, B는

$-6=-\frac{2}{3}(x-2)^2$ 에서 $x=5,\ -1$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=6$

□ABCD는 평행사변형이므로 마주 보는 두 변의 길이가 같다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=6$이다.

점 C의 좌표가 $(-2,\ 0)$이므로 점 D의 좌표는 $(4,\ 0)$이다.

$\therefore\ p=4$

42. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나고, 이 그래프와 원점에 대하여 대칭인 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 4)$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

$y=a(x-p)^2+q$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ q)$

원점 대칭하면 $(-p,\ -q)=(-2,\ 4)$

$\therefore\ p=2,\ q=-4$

$y=a(x-2)^2-4$ 의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=a(1-3)^2-4$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

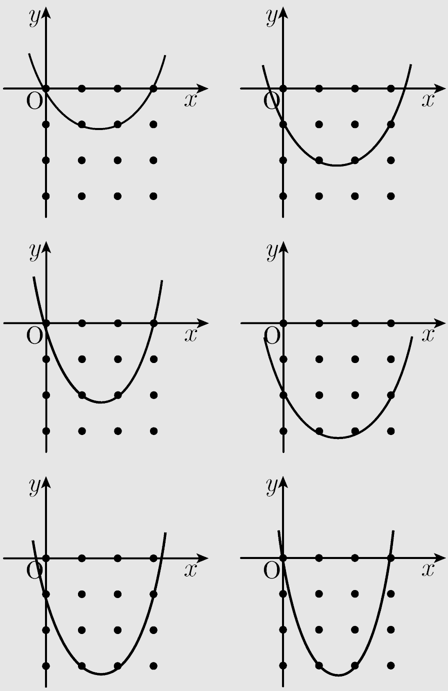
43. 좌표평면 위의 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{7}{2}, -\frac{7}{2} \le y \le \frac{1}{2}$ 의 영역에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점 중 원점을 포함한 4개의 점을 지나는 서로 다른 이차함수의 그래프는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12개

해설

주어진 범위에서 x 좌표가 될 수 있는 정수는 0, 1, 2, 3이고
y 좌표가 될 수 있는 정수는 -3, -2, -1, 0이다.
포물선이 아래로 볼록한 경우에 아래 그림과 같이 모두 6개를 그릴 수 있다.



포물선이 위로 볼록한 경우도 마찬가지로 6개의 포물선을 그릴 수 있다.
따라서 구하는 포물선의 개수는 12개이다.

44. $f(-3)=15,\ f(x^2)\cdot(x^2+x+3)=f(x)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(-9)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $\dfrac{125}{93}$

해설

$f(x^2)\cdot(x^2+x+3)=f(x)$ 에서 $x=-3$ 을 대입하면 $9f(9)=f(-3)=15$

$\therefore\ f(9)=\dfrac{5}{3}$

따라서

$f(x^2)\cdot(x^2+x+3)=f(x)$ 에서 $f(x^2)=\dfrac{f(x)}{(x^2+x+3)}$ 이고

$f(x^2)\cdot(x^2-x+3)=f(-x)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x^2)\cdot(x^2-x+3) \\ &= \frac{f(x)}{(x^2+x+3)}\cdot(x^2-x+3) \end{aligned}$$

이 식에 $x=9$ 를 대입하면

$f(-9)=\dfrac{\frac{5}{3}}{93}\times 75=\dfrac{125}{93}$ 이다.

45. 두 이차함수 $f(x) = x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x^2 - 2$ 에 대하여 $h(x) = \dfrac{g(x+1)}{f(x)}$ 이라고 할 때, $h(1)h(2)h(3)\cdots h(30)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{511}$

해설

$f(x) = (x+2)^2 - 2, g(x) = x^2 - 2$ 이므로

$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면

$y = g(x)$ 의 그래프가 되므로

$\therefore\ g(x) = f(x-2)$

$\therefore h(1)h(2)h(3)\cdots h(30)$

$$= \frac{g(2)g(3)g(4)\cdots g(31)}{f(1)f(2)f(3)\cdots f(30)}$$

$$= \frac{f(0)f(1)f(2)\cdots f(29)}{f(1)f(2)f(3)\cdots f(30)}$$

$$= \frac{f(0)}{f(30)} = \frac{2}{1022} = \frac{1}{511}$$

46. 이차함수 $y=-x^2-2x+p$ 의 그래프에서 x축과의 두 교점을 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표는?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y=-x^2-2x+p=-(x+1)^2+p+1$

축의 방정식이 $x=-1$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=4$ 이므로

$\therefore \mathrm{A}(-3,\ 0), \mathrm{B}(1,\ 0)$

$\mathrm{B}(1,\ 0)$ 을 $y=-x^2-2x+p$ 에 대입하면 $-1^2-2+p=0,\ \ \therefore p=3$

$\therefore y=-(x+1)^2+4$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 4)$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표는 -1 이다.

47. x 의 범위가 $0 < x < 5$ 일 때, $x = \dfrac{1}{x - [x]}$ 을 만족시키는 x 의 개수를 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대정수이다.)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$x^2 - x[x] - 1 = 0$ 에서

(1) $0 < x < 1$ 일 때,

$[x] = 0, \quad x^2 - 1 = 0, x = \pm 1$ $0 < x < 1$ 이므로 부적합

(2) $1 \le x < 2$ 일 때,

$[x] = 1, \quad x^2 - x - 1 = 0, \quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $2 \le x < 2$ 이므로

$x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(3) $2 \le x < 3$ 일 때,

$[x] = 2, \quad x^2 - 2x - 1 = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{2}$ $2 \le x < 3$ 이므로

$x = 1 + \sqrt{2}$

(4) $3 \le x < 4$ 일 때,

$[x] = 3, \quad x^2 - 3x - 1 = 0, \quad x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ $3 \le x < 4$ 이므로

$x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$

(5) $4 \le x < 5$ 일 때,

$[x] = 4, \quad x^2 - 4x - 1 = 0, \quad x = 2 \pm \sqrt{5}$ $4 \le x < 5$ 이므로

$x = 2 + \sqrt{5}$

(1), (2), (3), (4), (5) 로 부터 $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x = 1 + \sqrt{2}$, $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$, $x = 2 + \sqrt{5}$ 의 4 개

48. 이차함수 $y = 4x^2$ 의 그래프 위의 점 P와 점 Q는 좌표의 y값이 같다. 두 점 P와 Q 그리고 A(3, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQA의 넓이가 32일 때, 점 P와 점 Q의 y 좌표값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

점 P의 좌표를 $(a,\ 4a^2)$이라 하면 점 Q 의 좌표는 $(-a,\ 4a^2)$ 이므로

삼각형 PQA는 밑변이 $2a$, 높이는 $4a^2$ 이다.

$$\triangle PQA = \frac{1}{2} \times 2a \times 4a^2 = 4a^3 = 32$$

$\therefore\ a = 2$

따라서 점 P 와 점 Q 의 y 좌표값은 16이다.

49. 다음 보기 중 이차함수에 대한 설명이 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$는 $x = b$를 축으로 하고 점 $(0,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

㉡ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서 $|a|$ 의 값이 같으면 폭도 같다.

㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 좁아진다.

㉣ $y = -x^2$ 에서 $x < 0$ 일 때, x 값이 증가하면 y 값도 증가한다.

㉤ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

① ㉠,㉡,㉠ ② ㉠,㉡,㉣ ③ ㉠,㉡,㉤

④ ㉡,㉢,㉣ ⑤ ㉡,㉣,㉤

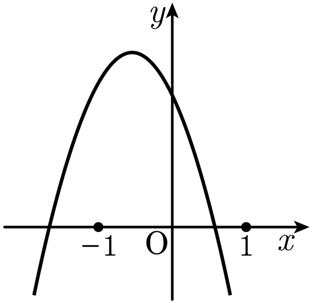
해설

㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 은 $x = 0$을 축으로 하고 점 $(0,\ b)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 넓어진다.

따라서 옳은 것은 ㉡,㉣,㉤이다.

50. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 다음 중 옳은 것을 구하면?



① $a > 0$ ② $b < 0$ ③ $c < 0$

④ $a + b + c > 0$ ⑤ $a - b + c < 0$

해설

① 위로 볼록하므로 $a < 0$

② 축이 y 축의 왼쪽에 있으므로 $ab > 0$

따라서 $b < 0$ 이다.

③ y 절편이 양수이므로 $c > 0$

④ $x = 1$ 일 때, $y = a + b + c < 0$

⑤ $x = -1$ 일 때, $y = a - b + c > 0$