

1. 이차방정식 $(x-1)^2 = x-3$ 을 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 꼴로 나타낼 때, $a-b+c$ 의 값을 구하면? (단, $a > 0$)

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

주어진 식을 전개하고 정리하면

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -3, c = 4$$

$$\therefore a - b + c = 8$$

2. 이차방정식 $(x-3)^2 = 4x$ 와 공통인 해를 갖는 방정식은?

① $x^2 - 4x + 3 = 0$

② $x^2 - 6x + 9 = 0$

③ $x^2 - 10x = 9$

④ $x^2 + 10x + 9 = 0$

⑤ $2x^2 - 5x - 3 = 0$

해설

$$(x-3)^2 = 4x$$

$$x^2 - 6x + 9 - 4x = 0$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x-1)(x-9) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 9$$

① $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

3. 다음 이차방정식 $(x - a)^2 = b$ 일 때, 다음 중 유리수의 근을 가지는 것은?

① $a = 0, b = -1$

② $a = 0, b = 2$

③ $a = -1, b = -1$

④ $a = -1, b = 2$

⑤ $a = 0, b = 4$

해설

$(x - a)^2 = b$ 에서 유리수의 근을 갖기 위해서는 b 가 0 이상인 제곱수 이면 된다.

따라서 $(x - 0)^2 = 4$ 일 때이므로 $a = 0, b = 4$ 이다.

4. $a > 0$ 일 때, 이차방정식 $(x-3)^2 = a$ 에서 두 근의 합을 구한 것은?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$$(x-3)^2 = a, x-3 = \pm \sqrt{a}$$

$$\therefore x = 3 \pm \sqrt{a}$$

따라서 두 근의 합은 6이다.

5. 다음 이차방정식을 $(x+a)^2 = b$ 의 꼴로 나타낼 때, 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x^2 - 4x = -1, x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 3$$

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore a + b = 1$$

6. 직선 $ax - 2y = -2$ 가 점 $(a + 1, a^2)$ 을 지나고 제 3사분면을 지나지 않을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$ax - 2y = -2$ 에 점 $(a + 1, a^2)$ 을 대입

$$a(a + 1) - 2a^2 = -2$$

$$a^2 + a - 2a^2 + 2 = 0, a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a - 2)(a + 1) = 0$$

$$a = 2 \text{ 또는 } a = -1$$

$ax - 2y = -2$ 가 제 3사분면을 지나지 않으려면 $a < 0$ 이므로

$$a = -1$$

7. $x+9 < 2(x+3)$ 를 만족하는 5보다 작은 자연수 x 에 대하여 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 가 중근을 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x + 9 < 2(x + 3)$ 를 만족하는 5보다 작은 자연수 x 는 4이다.

따라서 4가 $x^2 + ax + b = 0$ 의 중근이므로

$$(x - 4)^2 = x^2 + ax + b$$

$$a = -8, b = 16$$

$$\therefore a + b = 8$$

8. 이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$ 의 한 근이 $1 - \sqrt{5}$ 일 때 a 의 값을 구하면?

① -6

② -4

③ -2

④ 0

⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + a = 0$ 에 $1 - \sqrt{5}$ 를 대입하면

$$(1 - \sqrt{5})^2 - 2(1 - \sqrt{5}) + a = 0$$

$$1 - 2\sqrt{5} + 5 - 2 + 2\sqrt{5} + a = 0$$

$$\therefore a = -4$$

9. p 가 이차방정식 $x^2 - 6x - 3 = 0$ 의 한 근일 때, $p^2 - 6p + 8$ 의 값은?

① 61

② 51

③ 11

④ -11

⑤ -61

해설

x 에 p 를 대입하면 $p^2 - 6p - 3 = 0$ 이므로

$$p^2 - 6p = 3$$

따라서 $p^2 - 6p + 8 = 11$ 이다.

10. $x^2 - \sqrt{7}x + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라 할 때, $\alpha - \frac{1}{\alpha}$ 의 값은?

① ± 1

② 0

③ $\pm \sqrt{3}$

④ $\pm \sqrt{2}$

⑤ $\pm \sqrt{7}$

해설

α 가 주어진 방정식의 근이므로

$$x = \alpha \text{ 를 대입하면 } \alpha^2 - \sqrt{7}\alpha + 1 = 0$$

$$\text{양변을 } \alpha \text{ 로 나누면 } \alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{7}$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 4$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = 7 - 4 = 3$$

$$\therefore \alpha - \frac{1}{\alpha} = \pm \sqrt{3}$$

11. 이차방정식 $x^2 + x + a = 0$ 의 한 근이 2 일 때, a 의 값과 다른 한 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$x^2 + x + a = 0$, $x = 2$ 를 대입하면

$$6 + a = 0, a = -6$$

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

$$x = 2 \text{ 또는 } x = -3$$

$$\therefore (-6) \times (-3) = 18$$

12. x 에 관한 이차방정식 $mx^2 + mx + m + n = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, $m \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 0$

해설

주어진 식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$m - m + m + n = 0$$

$$n + m = 0 \quad \therefore n = -m$$

$$mx^2 + mx = 0$$

$$m(x^2 + x) = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = -1$$

13. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 3 = 0$ 의 해가 $a, 1$ 일 때, $p + a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$$x^2 - px + 2p + 3 = 0 \text{ 에 } x = 1 \text{ 을 대입하면 } p = -4$$

$$x^2 - px + 2p + 3 = 0 \text{ 에 } p = -4 \text{ 를 대입하면}$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x - 1)(x + 5) = 0$$

$$x = -5 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore a = -5$$

$$\therefore p + a = -4 - 5 = -9$$

14. 두 이차방정식 $2x^2 - 2x - 12 = 0$, $3x^2 - 11x + 6 = 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$2x^2 - 2x - 12 = 2(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x = 3 \text{ 또는 } x = -2$$

$$3x^2 - 11x + 6 = (3x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 동시에 만족하는 x 의 값은 3이다.

15. 다음 이차방정식 중에서 해가 중근이 아닌 것은?

① $x^2 = 0$

② $x(x-6) + 9 = 0$

③ $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 8 = 0$

④ $x^2 - 1 = 0$

⑤ $x^2 + 6x + 11 = -(4x + 14)$

해설

(완전제곱식) = 0 의 꼴이어야 중근을 갖는다.

④ $x^2 = 1$ 이므로 $x = \pm 1$

따라서 서로 다른 두 개의 근을 갖는다.

16. 다음 이차방정식 중에서 근의 개수가 1 개가 아닌 것은?

① $-x^2 + 10x - 1 = 24$

② $x^2 - 8x - 14 = -30$

③ $2x^2 - 8x + 18 = 4x$

④ $x^2 + 2x + 15 = -8x - 1$

⑤ $-3x^2 + 18x - 15 = 12$

해설

근의 개수가 1 개이려면 중근을 가져야 하고,
중근을 가지려면 (완전제곱식) = 0 의 꼴이어야 한다.

① $-(x - 5)^2 = 0$

② $(x - 4)^2 = 0$

③ $2(x - 3)^2 = 0$

⑤ $-3(x - 3)^2 = 0$

17. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 12x + a = b$ 가 중근을 가질 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

주어진 방정식이 중근을 가지려면

$x^2 + 12x + a - b = 0$ 이 (완전제곱식) $=0$ 의 꼴이 되어야 하므로
 $(x + 6)^2 = 0$ 이다.

$$\therefore a - b = 36$$

18. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 $\frac{ax^2 + 2x + b}{5x^2 - cx + 3} = 4$ 이라 한다. 이 때, abc 의 값은?

① 100

② 120

③ 240

④ -120

⑤ -100

해설

$$\frac{ax^2 + 2x + b}{5x^2 - cx + 3} = 4 \text{ 를 정리하면,}$$

$$(a - 20)x^2 + (2 + 4c)x + b - 12 = 0$$

이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한
항등식이다.

$$\text{따라서 } a - 20 = 0, 2 + 4c = 0, b - 12 = 0$$

$$\therefore a = 20, b = 12, c = -\frac{1}{2}$$

$$abc = 20 \times 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -120$$

19. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값은?

$$\frac{ax^2 - 3x - b}{4x^2 + cx - 5} = 2$$

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{7}{2}$

③ $\frac{9}{2}$

④ $\frac{11}{2}$

⑤ $\frac{33}{2}$

해설

$$\frac{ax^2 - 3x - b}{4x^2 + cx - 5} = 2 \text{를 정리하면,}$$

$$(a - 8)x^2 + (-3 - 2c)x - b + 10 = 0$$

이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한
항등식이다.

$$\text{따라서 } a - 8 = 0, \quad -3 - 2c = 0, \quad -b + 10 = 0$$

$$\therefore a = 8, \quad b = 10, \quad c = -\frac{3}{2}$$

$$a + b + c = \frac{33}{2} \text{ 이다.}$$

20. $5x + 2 \leq 4x + 5$ 이고 x 는 자연수 일 때, 다음 이차방정식을 풀면?

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

① $x = 1, x = 3$

② $x = 1, x = 5$

③ $x = 1$

④ $x = 2, x = 3$

⑤ $x = 2, x = 5$

해설

$5x + 2 \leq 4x + 5$ 에서 $x \leq 3$ 이다.

따라서 x 의 값은 1, 2, 3이다.

$x^2 - 6x + 5 = 0$ 를 만족하는 x 의 값은 $x = 1, x = 5$ 이므로
이차방정식의 해는 $x = 1$ 이다.

21. 부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 만족시키는 두 자연수가 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① 61

② 51

③ 11

④ -11

⑤ -61

해설

부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 풀면 다음과 같다.

$$4 \leq 2x < 7$$

$$2 \leq x < \frac{7}{2}$$

$$\therefore x = 2, 3$$

이 두 자연수를 근으로 가지므로 이를 이차방정식에 대입하여 풀면

$$a = -5, b = 6$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (-5)^2 - 6^2 = 25 - 36 = -11$$

22. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 한 근을 a 라 할 때, $a^2 + \frac{1}{a^2}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$x = a$ 를 대입하면 $a^2 - 3a + 1 = 0$

양변을 a 로 나누면 $a - 3 + \frac{1}{a} = 0$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = 3$$

$$\therefore a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

23. 다음 중 $\left(\frac{7}{3}x - 14\right)(2y + 8) = 0$ 을 만족하는 것의 개수는?

㉠ $x = 6, y = -4$

㉡ $x = 6, y = 4$

㉢ $x = -6, y = -4$

㉣ $x = -6, y = 4$

㉤ $x = 4, y = 6$

㉥ $x = -4, y = 6$

① 한 개도 없다.

② 2 개

③ 3 개

④ 5 개

⑤ 6 개

해설

$\frac{7}{3}x - 14 = 0$ 또는 $2y + 8 = 0$ 이므로

$x = 6$ 또는 $y = -4$ 인 것을 찾으면

$x = 6$ 인 것은 ㉠, ㉡

$y = -4$ 인 것은 ㉠, ㉢

따라서 만족하는 것의 개수는 ㉠, ㉡, ㉢이므로
3 개이다.

24. 이차방정식 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 의 두 근을 a, b 라고 할 때, 다음 중 $a + 2, b + 2$ 를 두 근으로 갖는 이차항의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2 - 2x - 35 = 0$

② $x^2 + 2x - 35 = 0$

③ $x^2 - 12x + 35 = 0$

④ $x^2 + 12x + 35 = 0$

⑤ $x^2 - 4x - 30 = 0$

해설

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 5)(x - 3) = 0$$

$$a = 5, b = 3$$

$$\therefore a + 2 = 7, b + 2 = 5$$

따라서 5, 7을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$(x - 7)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x^2 - 12x + 35 = 0$$

25. 이차방정식 $5x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근의 합이 1 이고, 큰 근이 작은 근보다 5 가 클 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -25

해설

두 근을 $e, f (e > f)$ 라 하면 $e = f + 5$ 이고, $e + f = 1$ 이므로
연립하면 $e = 3, f = -2$ 이다.

따라서 두 근은 3, -2 이다.

3, -2 를 두 근으로 $5x^2 - ax + b = 0$ 에 대입하여 연립하면
 $a = 5, b = -30$ 가 나온다.

따라서 $a + b = 5 + (-30) = -25$ 이다.

26. x 에 관한 이차방정식 $2x^2 - px - 3p = 0$ ($p \neq 0$)의 한 근이 $2p$ 일 때, x 의 값을 구하면?

① $x = -2$ 또는 $x = 1$

② $x = -\frac{3}{4}$ 또는 $x = 1$

③ $x = \frac{4}{3}$ 또는 $x = 4$

④ $x = \frac{3}{4}$ 또는 $x = 1$

⑤ $x = \frac{3}{4}$ 또는 $x = -1$

해설

$x = 2p$ 를 방정식에 대입하면

$$8p^2 - 2p^2 - 3p = 0$$

$$6p^2 - 3p = 0$$

$$3p(2p - 1) = 0$$

$$p = \frac{1}{2} \quad (\because p \neq 0)$$

$$2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$4x^2 - x - 3 = 0$$

$$(4x + 3)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{4} \text{ 또는 } x = 1$$

27. 이차방정식 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 의 두 근을 각각 m, n 이라고 할 때, $m + 1, n + 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + ax + b = 0$ 이다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x - 3)(x + 1) = 0$$

$x = 3$ 또는 $x = -1$ 이므로

$m + 1, n + 1$ 은 각각 4 또는 0 이므로

$x^2 + ax + b = 0$ 식에 $x = 4$ 와 $x = 0$ 을 대입하여 정리하면

$a = -4, b = 0$ 이다.

따라서 $ab = 0$ 이다.

28. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 9 - 2 + 3 = 10 \end{aligned}$$

29. $x(x-3) = 0$ 을 $(ax+b)^2 = q$ 의 꼴로 바꾸었을 때, abq 의 값을 구하면?

① $\frac{27}{8}$

② $-\frac{27}{8}$

③ $-\frac{25}{8}$

④ $\frac{25}{8}$

⑤ $\frac{23}{8}$

해설

$$x(x-3) = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$a = 1, b = -\frac{3}{2}, q = \frac{9}{4}$$

$$\therefore abq = -\frac{27}{8}$$

30. 다음 이차방정식 $x^2 - 2ax + a^2 - 10 = 0$ 의 해가 $x = 7 \pm \sqrt{b}$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답: 70

해설

$$x^2 - 2ax = -a^2 + 10$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = -a^2 + 10 + a^2 = 10$$

$$(x - a)^2 = 10 \text{ 이므로}$$

$$x - a = \pm \sqrt{10}$$

$$\therefore x = a \pm \sqrt{10}$$

따라서 $a = 7$, $b = 10$ 이므로 $ab = 70$ 이다.

31. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $k = -6$ 이면 근이 2개이다.
- ② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.
- ③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.
- ④ $k = 1$ 이면 근이 1개이다.
- ⑤ $k = 3$ 이면 중근을 갖는다.

해설

$$(x-1)^2 = 3-k, \quad x-1 = \pm\sqrt{3-k}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3-k}$$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0개

$k = 3$: 근이 1개

$3 < k$: 근이 2개

32. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $k = -6$ 이면 근이 2 개이다.
- ② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.
- ③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.
- ④ $k = 2$ 이면 근이 1 개이다.
- ⑤ $k = 4$ 이면 근이 없다.

해설

$$(x-1)^2 = 3-k, \quad x-1 = \pm\sqrt{3-k}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3-k}$$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0 개

$k = 3$: 근이 1 개

$3 < k$: 근이 2 개

33. 이차방정식 $x^2 + 2x + A = 0$ 의 근이 $x = 2$ 또는 $x = -4$ 일 때, A 의 값을 구하여라.

① -8

② -6

③ -2

④ 6

⑤ 8

해설

$$(x - 2)(x + 4) = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0, A = -8$$

34. 이차방정식 $x - \frac{5}{x} = 7$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 7\alpha + 7)(\beta^2 - 7\beta + 3)$ 의 값을 구하면?

① 21

② 35

③ 60

④ 96

⑤ 140

해설

$$x - \frac{5}{x} = 7 \text{ 에서 양변에 } x \text{ 를 곱하면 } x^2 - 7x - 5 = 0$$

이 식에 $x = \alpha, \beta$ 를 각각 대입하면

$$\alpha^2 - 7\alpha - 5 = 0 \text{ 에서 } \alpha^2 - 7\alpha = 5$$

$$\beta^2 - 7\beta - 5 = 0 \text{ 에서 } \beta^2 - 7\beta = 5$$

$$\therefore (\alpha^2 - 7\alpha + 7)(\beta^2 - 7\beta + 3) = (5 + 7)(5 + 3) = 96$$

35. $a^2x + 2ax - 8x = a + 4$ 를 만족하는 x 의 값이 없을 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$a^2x + 2ax - 8x = a + 4$$

$$(a^2 + 2a - 8)x = a + 4$$

해가 없을 때이므로

$$a^2 + 2a - 8 = 0, a + 4 \neq 0 \text{ 이다.}$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0, (a + 4)(a - 2) = 0$$

$$a + 4 \neq 0 \text{ 이므로 } a - 2 = 0, a = 2 \text{ 이다.}$$

36. 직선 $ax - 3y = -3$ 이 점 $(a + 1, a^2)$ 을 지나고 제 4 사분면을 지나지 않을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = \frac{3}{2}$

해설

$ax - 3y = -3$ 이 점 $(a + 1, a^2)$ 을 지나므로

$$a(a + 1) - 3a^2 = -3$$

$$a^2 + a - 3a^2 + 3 = 0$$

$$-2a^2 + a + 3 = 0, 2a^2 - a - 3 = 0$$

$$(a + 1)(2a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$ax - 3y = -3, y = \frac{a}{3}x + 1$ 이므로

$a > 0$ 일 때, 제 4 사분면을 지나지 않는다.

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

37. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ 이고, $k = f(1) + f(2) + \cdots + f(23) + f(24)$ 이다.

k 가 x 에 관한 이차방정식 $(a+1)x^2 + (a^2-2)x + 8 = 0$ 의 한 근일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} \\ &= \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(23) + f(24) \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{25} - \sqrt{24} \\ &= -\sqrt{1} + \sqrt{25} \\ &= -1 + 5 = 4 \end{aligned}$$

$(a+1)x^2 + (a^2-2)x + 8 = 0$ 에 $x = 4$ 를 대입

$$16a + 16 + 4a^2 - 8 + 8 = 0$$

$$4a^2 + 16a + 16 = 0, \quad a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

$a = -2$ 를 식에 대입하면

$$-x^2 + 2x + 8 = 0, \quad -(x+2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

38. 이차방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 의 한 근 p 가 $1 - \frac{2}{p^2} + \frac{a}{p} + \frac{2}{p} = 0$ 을 만족할 때, ap 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = p$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$p^2 + ap + 2 = 0, p^2 + ap = -2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$1 - \frac{2}{p^2} + \frac{a}{p} + \frac{2}{p} = 0$ 의 양변에 p^2 을 곱하면

$$p^2 - 2 + ap + 2p = 0, p^2 + ap = 2 - 2p \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -2 = 2 - 2p \quad \therefore p = 2$$

$p = 2$ 를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$\therefore a = -3$$

$$\therefore ap = (-3) \times 2 = -6$$

39. a 는 이차방정식 $2x^2 - 8x - 7 = 0$ 의 한 근이고, b 는 이차방정식 $x^2 + 6x - 5 = 0$ 의 한 근일 때, $a^2 + 2b^2 - 4a + 12b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{27}{2}$

해설

$2x^2 - 8x - 7 = 0$ 의 한 근이 a 이므로 x 에 a 를 대입하면

$$2a^2 - 8a - 7 = 0, \quad a^2 - 4a = \frac{7}{2} \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2 + 6x - 5 = 0$ 의 한 근이 b 이므로 x 에 b 를 대입하면 $b^2 + 6b - 5 =$

$$0, \quad b^2 + 6b = 5 \cdots \textcircled{㉡}$$

주어진 식을 변형하면

$$\begin{aligned} a^2 + 2b^2 - 4a + 12b &= a^2 - 4a + 2b^2 + 12b \\ &= (a^2 - 4a) + 2(b^2 + 6b) \\ &= \frac{27}{2} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

40. $11_{(m)}$ 에 3 배를 하여 3을 더하면 $120_{(m)}$ 이 된다. 이 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$11_{(m)} = 1 \times m + 1 \text{ 이므로}$$

$11_{(m)}$ 에 3 배를 하여 3을 더하면

$$3(m + 1) + 3 = 3m + 6$$

$$\text{또한, } 120_{(m)} = 1 \times m^2 + 2 \times m + 0 \times 1 = m^2 + 2m$$

$$\text{따라서 } m^2 + 2m = 3m + 6$$

$$m^2 - m - 6 = 0$$

$$(m + 2)(m - 3) = 0$$

이므로 $m = 3$ ($\because m > 0$) 이다.

41. $x > 0$ 일 때, 이차방정식 $\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} - 14 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{7}$

해설

$$\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} - 14 = 0 \text{ 에서 } \frac{1}{x} = A \text{ 라 하면}$$

$$4A^2 + A - 14 = 0$$

$$(A + 2)(4A - 7) = 0$$

$$A = \frac{7}{4} \left(\because \frac{1}{x} > 0 \right)$$

$$\therefore x = \frac{4}{7}$$

42. $a > 0$ 인 상수 a 에 대하여 이차방정식 $x^2 + 2(2a-1)x + (3a^2 - 4a + 1) = 0$ 의 두 근 중 작은 근이 이차방정식 $4x^2 - 12px + 9p^2 = 0$ 의 근과 같을 때, $2a + p$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{3}$

해설

$$x^2 + 2(2a-1)x + (3a^2 - 4a + 1) = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + 2(2a-1)x + (3a-1)(a-1) = 0$$

$$(x+3a-1)(x+a-1) = 0$$

$$\therefore x = -3a+1 \text{ 또는 } x = -a+1$$

$a > 0$ 이므로 두 근 중 작은 근은

$$x = -3a+1 \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$4x^2 - 12px + 9p^2 = 0 \text{에서 } (2x-3p)^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3p}{2} \cdots \textcircled{\text{L}}$$

$$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\text{L}} \text{에서 } -3a+1 = \frac{3p}{2}$$

$$\therefore 2a+p = \frac{2}{3}$$

43. $x^2 + x - 1 = 0$ 의 한 근이 a 일 때, $A = a^4 - a^2 + a^3 + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + x - 1 = 0$ 에 $x = a$ 를 대입하면

$$a^2 + a - 1 = 0, a^2 + a = 1$$

$$a^2 = -a + 1$$

$$\begin{aligned}\therefore A &= a^4 + a^3 - a^2 + 1 \\ &= a^2(a^2 + a) - a^2 + 1 \\ &= a^2 - a^2 + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

44. p, q, r 에 대하여 $(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$ 이 성립할 때, p, q, r 을 세 변으로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 정삼각형

해설

$$(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$$

$$p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp = 3pq+3qr+3rp$$

$$p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp = 0$$

양변에 2를 곱하면

$$2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp = 0$$

$$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2 = 0$$

$$p-q=q-r=r-p=0$$

$$\therefore p=q=r$$

따라서 p, q, r 을 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

45. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2ax - x + 2a = 0$ 과 $2x^2 + 2ax + 5x - a - 3 = 0$ 이 공통근을 가질 때, a 의 값을 구하여라. (단, $-4 < a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

해설

$$x^2 - 2ax - x + 2a = 0$$

$$(x-1)(x-2a) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2a$$

$$2x^2 + 2ax + 5x - a - 3 = 0$$

$$(x+a+3)(2x-1) = 0$$

$$\therefore x = -a-3 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

$$(i) \ 2a = \frac{1}{2} \text{ 일 때, } a = \frac{1}{4}$$

$$(ii) \ -a-3 = 1 \text{ 일 때, } a = -4$$

$$(iii) \ 2a = -a-3 \text{ 일 때, } a = -1$$

따라서 $-4 < a < 0$ 이므로 $a = -1$ 이다.

46. 방정식 ㉠의 해가 ㉡의 해 사이에 있을 때, 정수 m 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

$$\textcircled{㉠} \quad 4(x+1) = m+3$$

$$\textcircled{㉡} \quad 4x^2 + 4x - 11 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\textcircled{㉡} \quad 4x^2 + 4x - 11 = 0$$

$$x^2 + x - \frac{11}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 3$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\textcircled{㉠} \quad 4(x+1) = m+3 \quad \therefore x = \frac{m-1}{4}$$

$$\frac{-1-2\sqrt{3}}{2} < \frac{m-1}{4} < \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}$$

$$-2-4\sqrt{3} < m-1 < -2+4\sqrt{3}$$

$$-1-4\sqrt{3} < m < -1+4\sqrt{3}$$

정수 m 의 최솟값은 -7, 최댓값은 5 이다.

$$\therefore -7 + 5 = -2$$

47. 방정식 ㉠의 해가 ㉡의 해 사이에 있을 때, 정수 m 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

$$\textcircled{㉠} \quad 3x + 5 = m + 1$$

$$\textcircled{㉡} \quad 3x^2 + 2x - 9 = 0$$

▶ 답 :

▶ 정답 : 6

해설

$$\textcircled{㉡} \quad 3x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x - 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{28}{9}$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm 2\sqrt{7}}{3}$$

$$\textcircled{㉠} \quad 3x + 5 = m + 1$$

$$\therefore x = \frac{m-4}{3}$$

$$\frac{-1-2\sqrt{7}}{3} < \frac{m-4}{3} < \frac{-1+2\sqrt{7}}{3}$$

$$-1-2\sqrt{7} < m-4 < -1+2\sqrt{7}$$

$$3-2\sqrt{7} < m < 3+2\sqrt{7}$$

정수 m 의 최솟값은 -2 , 최댓값은 8 이다.

$$\therefore -2 + 8 = 6$$

48. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 일 때, $\begin{vmatrix} x & 5 \\ 3-x & x-2 \end{vmatrix} = 2x^2 - 5x$ 를 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 3$

▷ 정답 : $x = 5$

해설

$$\begin{vmatrix} x & 5 \\ 3-x & x-2 \end{vmatrix} = x(x-2) - 5(3-x)$$

를 정리하면

$$x^2 - 2x - 15 + 5x = x^2 + 3x - 15$$

$$\text{즉, } x^2 + 3x - 15 = 2x^2 - 5x$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-3)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ 또는 } x = 5$$

49. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 계수를 정하는데, 안이 보이지 않는 상자에 0 ~ 9 까지의 숫자가 적힌 공을 넣어 첫 번째 뽑힌 숫자를 a , 두 번째 뽑힌 숫자를 b 로 정했다고 한다. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 1 개일 확률이 $\frac{t}{s}$ 라고 할 때, $t + s$ 의 값을 구하여라. (단, t, s 는 서로소이고, 첫 번째 뽑은 공은 다시 상자 안에 넣고 두 번째 공을 뽑는다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

중근을 가지려면 $x^2 + ax + b = 0$ 이 완전제곱식이 되어야 하므로

$$\left(a \times \frac{1}{2}\right)^2 = b, a^2 = 4b$$

이를 만족하는 (a, b) 를 구하면

$(a, b) = (0, 0), (2, 1), (4, 4), (6, 9)$ 의 네 가지이고 모든 경우의 수는 100 가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ 이다.

$\therefore t = 1, s = 25$ 이므로 $t + s = 26$ 이다.

50. 이차방정식 $\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x}$ 의 양의 근을 α 라고 할 때, $\alpha^2 + 4\alpha$ 의 값은?

① $24 + 5\sqrt{21}$

② $26 + 6\sqrt{23}$

③ $28 + 7\sqrt{26}$

④ $32 + 8\sqrt{23}$

⑤ $34 + 8\sqrt{22}$

해설

$$\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x} \text{ 의 양변에 } 12x \text{ 를 곱하면}$$

$$x^2 - 4x - 18 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 18 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 22$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{22}$$

$$\alpha \text{ 는 양의 근이므로 } \alpha = 2 + \sqrt{22}$$

$$\therefore \alpha^2 + 4\alpha = 34 + 8\sqrt{22}$$