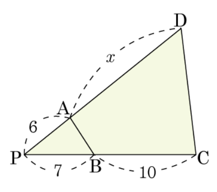
1. 다음 그림에서 □ABCD 가 원에 내접할 때, $\overline{\mathrm{AD}}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{83}{6}$

해설

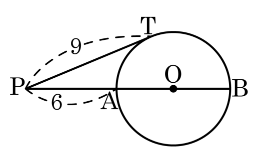
□ABCD 가 원에 내접하므로

$\overline{\mathrm{PC}}$, $\overline{\mathrm{PD}}$ 는 할선

$6(6+x)=7(7+10)$

$36+6x=119$, $6x=83$ $\therefore$ $x=\frac{83}{6}$

2. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 원 O 의 접선이고, T 는 접점이다. 이 원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{15}{4}$

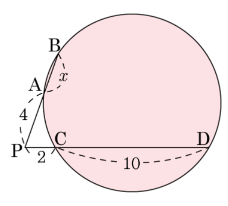
해설

반지름의 길이를 r 라 하면

$6(6+2r) = 9^2$, $36 + 12r = 81$

$\therefore\ r = \frac{15}{4}$

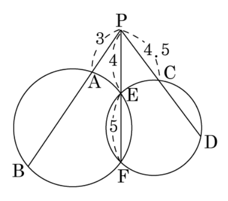
3. 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이는?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설
$\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PC}} \times \overline{\mathrm{PD}}$ 이므로 $4 \times (4+x) = 2 \times (2+10)$, $\therefore x = 2$

4. 다음의 그림에서 $\overline{EF}$ 는 공통현이고, $\overline{PA} = 3$, $\overline{PC} = 4.5$ $\overline{PE} = 4$, $\overline{EF} = 5$ 일 때, $\overline{AB}+\overline{CD}$ 의 길이를 구하면?



① 7.5 ② 9.5 ③ 11.5 ④ 12.5 ⑤ 13.5

해설

$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PE}\times\overline{PF}$, $3\times\overline{PB} = 4\times(4+5)$

$$\therefore\ \overline{PB} = \frac{36}{3} = 12$$

$\therefore\ \overline{AB} = 12-3 = 9$

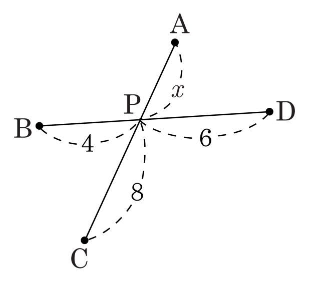
또, $\overline{PC}\cdot\overline{PD}=\overline{PE}\cdot\overline{PF}$ 에서 $\frac{9}{2}\times\overline{PD} = 4\times(4+5)$

$$\therefore\ \overline{PD} = 8$$

$\therefore\ \overline{CD} = 8-4.5 = 3.5$

$$\therefore\ \overline{AB}+\overline{CD} = 9+3.5 = 12.5$$

5. 다음 그림에서 네 점 A, B, C, D 가 한 원 위에 있을 때, $\overline{\mathrm{PA}}$ 의 길이는?



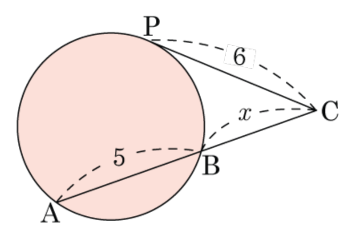
① 2 ② 3

③ 4 ④ 5

해설

$4 \times 6 = x \times 8, \quad \therefore x = 3$,

6. 그림에서 x 의 값은? (단, $\overline{\mathrm{PC}}$ 는 접선이다.)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\overline{\mathrm{PC}}^2 = \overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{AC}}$

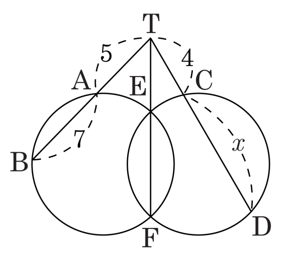
$36 = \overline{\mathrm{BC}}(\overline{\mathrm{BC}} + 5)$

$\overline{\mathrm{BC}}^2 + 5\overline{\mathrm{BC}} - 36 = 0$

$(\overline{\mathrm{BC}} + 9)(\overline{\mathrm{BC}} - 4) = 0$

$\therefore \overline{\mathrm{BC}} = 4$

7. 다음 그림에서 x 의 값은?



① 8 ② 9 ③ 10

④ 11 ⑤ 12

해설

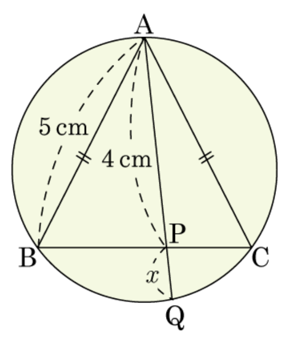
$4 \times (4+x) = 5(5+7)$

$16 + 4x = 60$

$4x = 44$

$\therefore x = 11$

8. 이등변삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 를 지나는 직선이 밑변 BC 와 점 P 에서 만나고 외접원과 점 Q 에서 만난다. $\overline{\mathrm{AB}} = 5\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{AP}} = 4\mathrm{cm}$ 일 때, 변 PQ 의 길이를 구하면?

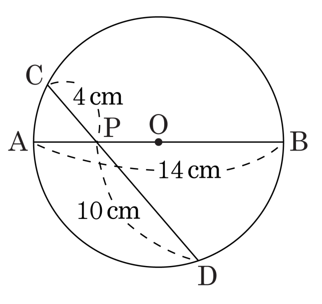


① 2cm　② $\frac{9}{4}$cm　③ $\frac{5}{2}$cm
④ $\frac{11}{4}$cm　⑤ 3cm

해설

보조선 $\overline{\mathrm{BQ}}$ 를 작도하면
$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{C}$ ($\because$ 이등변삼각형)
$\angle\mathrm{AQB} = \angle\mathrm{C}$ ($\because$ 원주각)
$\therefore\ \angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{AQB}$ 이므로
점 B, P, Q 는 한 원 위에 있고 $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ 는 접선,
$\overleftrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 는 할선이다.
$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{AQ}}$
$25 = 4(4 + x)$
$4x = 9$
$\therefore\ x = \frac{9}{4}$

9. 다음 그림에서 원 O 의 지름 AB 와 현 CD 의 교점을 P 라 할 때, $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 길이는?

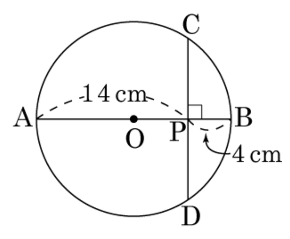


① 2.5cm ② 3cm
③ 3.5cm ④ 4cm
⑤ 4.5cm

해설

$\overline{\mathrm{OP}} = x$라고 하면
$\overline{\mathrm{AP}} = 7 - x, \overline{\mathrm{PB}} = 7 + x$
$\therefore 4 \times 10 = (7 - x)(7 + x)$
$40 = 49 - x^2, x^2 = 9, x = 3\,(\mathrm{cm})\ (\because\ x > 0)$

10. 다음 그림과 같은 원 O 에서 $\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$이고 $\overline{\mathrm{AP}} = 14\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{PB}} = 4\mathrm{cm}$ 일 때, $\overline{\mathrm{CD}}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답: ______ cm

▷ 정답: $4\sqrt{14}$ cm

해설

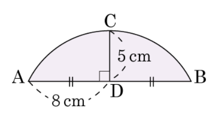
$\overline{\mathrm{AB}}$ 가 지름이고 $\overline{\mathrm{CD}}$ 가 현이므로

$\overline{\mathrm{CP}} = \overline{\mathrm{DP}},\ \overline{\mathrm{CP}^2} = 14 \times 4$

$\overline{\mathrm{CP}^2} = 56, \overline{\mathrm{CP}} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}(\mathrm{cm})$

$\therefore \overline{\mathrm{CD}} = 2\overline{\mathrm{CP}} = 4\sqrt{14}(\mathrm{cm})$

11. 다음 그림에서 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 는 원의 일부분이다. $\overline{\mathrm{CD}}$ 가 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 수직이등분하고, $\overline{\mathrm{AD}} = 8\,\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{CD}} = 5\,\mathrm{cm}$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하여라.

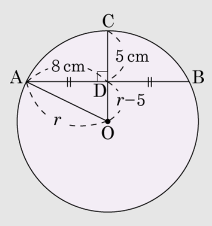


▶ 답 : cm

▷ 정답 : 8.9 cm

해설

반지름의 길이를 r 이라 하면



$\triangle$AOD 에서

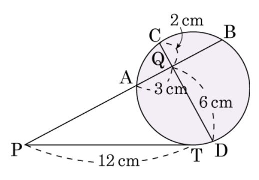
$\overline{\mathrm{AD}}^2 = \overline{\mathrm{AO}}^2 - \overline{\mathrm{DO}}^2$

$64 = r^2 - (r-5)^2$

$10r = 89$

$\therefore\ r = 8.9(\,\mathrm{cm})$

12. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 원의 접선이고, 점 T 는 접점일 때, $\overline{PA}$ 의 길이는?



① 5cm　　② 9cm　　③ 10cm

④ 10.5cm　　⑤ 12cm

해설

$\overline{BQ} \times 3 = 2 \times 6 \quad \therefore\ \overline{BQ} = 4$

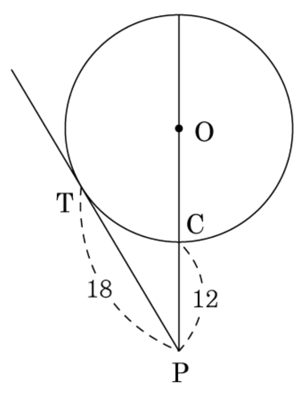
$\overline{PA} = \mathrm{x}$ 라 하면

$12^2 = x \times (x+7)$

$(x-9)(x+16) = 0$

$\therefore\ \overline{PA} = 9$

13. 다음 그림과 같이 $\overrightarrow{PT}$ 가 원 O 의 접선이고 $\overline{PT} = 18$, $\overline{CP} = 12$ 일 때, 원 O 의 지름의 길이는?



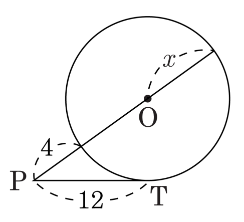
① 12　　② 13　　③ 14

④ 15　　⑤ 16

해설

지름의 길이를 x 라고 하면,
원의 중심을 지나는 할선과 접선 사이의 관계에 따라
$18^2 = 12 \times (12 + x)$ 이므로
$x = 15$ 이다.

14. 다음 그림에서 PT 는 원 O 의 접선이다. x 의 값은?

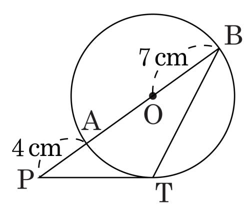


① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

해설

$12^2 = 4(4+2x)$, $144 = 16+8x$, $128 = 8x$ $\therefore x = 16$

15. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 원 O 의 접선일 때, $\overline{PT}$ 의 길이는?



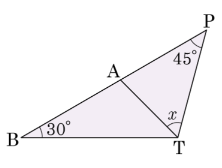
① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설

$\overline{PT}^2 = 4 \times 18 = 72$

$\therefore \overline{PT} = 6\sqrt{2}\ (\because \overline{PT} > 0)$

16. 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{BT}}^2 = \overline{\mathrm{BA}} \times \overline{\mathrm{BP}}$ 가 성립할 때, $\angle x$ 의 크기는?



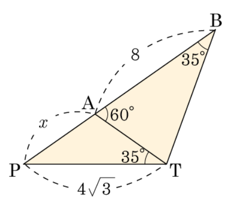
① 30° ② 35° ③ 40° ④ 55° ⑤ 60°

해설

$\overline{\mathrm{BT}}$ 가 세 점 A, P, T 를 지나는 원의 접선이므로 $\angle\mathrm{ATB} = \angle\mathrm{APT} = 45°$

$\triangle\mathrm{PTB}$ 의 삼각형의 세 내각의 크기의 합 $\angle x + 45° + 30° + 45° = 180°$ $\therefore \angle x = 60°$

17. 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{PA}} = x$, $\overline{\mathrm{AB}} = 8$, $\overline{\mathrm{PT}} = 4\sqrt{3}$ 이고 $\angle\mathrm{ATP} = \angle\mathrm{ABT} = 35°$, $\angle\mathrm{BAT} = 60°$ 이다. 이 때, x 의 값은?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\angle\mathrm{ATP} = \angle\mathrm{ABT} = 35°$ 이므로 $\overline{\mathrm{PT}}$ 는 원의 접선이고, 세 점 A, T, B 는 한 원 위에 있다.

$$\overline{\mathrm{PT}}^2 = \overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PB}} \Rightarrow (4\sqrt{3})^2 = x \times (x+8)$$

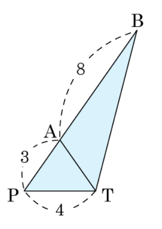
$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$(x-4)(x+12) = 0$$

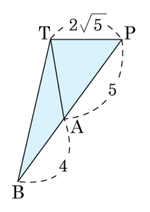
$$\therefore x = 4$$

18. 다음 중 $\overline{PT}$ 가 삼각형 ABT 의 외접원의 접선이 될 수 있는 것은?

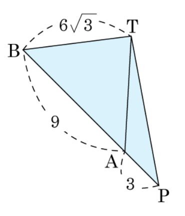
①



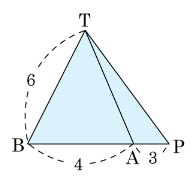
②



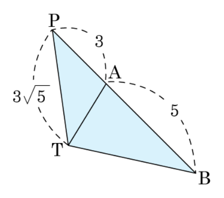
③



④



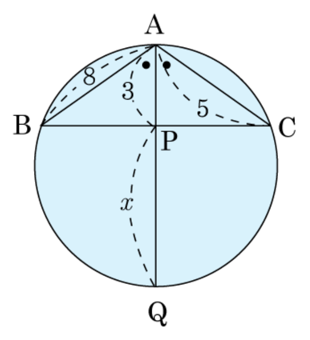
⑤



해설

③ $(6\sqrt{3})^2 = 9 \times 12$ 가 성립하므로 $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$

19. 다음 그림에서 x 의 값은?



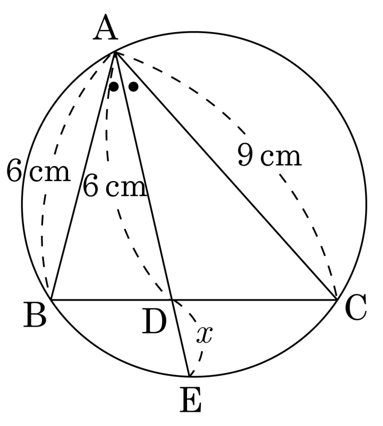
① 9　② 10　③ $\frac{10}{3}$　④ $\frac{25}{3}$　⑤ $\frac{31}{3}$

해설

$3(3+x)=5\times8$

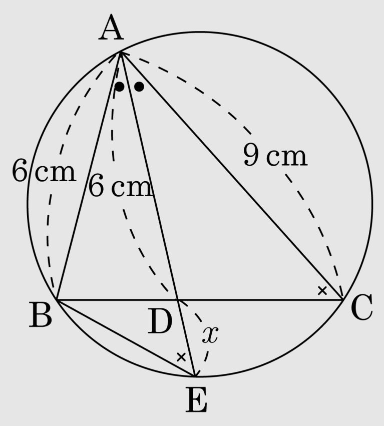
$\therefore x=\frac{31}{3}$

20. 다음 그림과 같은 $\triangle$ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선 $\overline{\mathrm{AD}}$ 의 연장선이 원과 만나는 점을 E 라 할 때, x 의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설



$\triangle\mathrm{ABE} \backsim \triangle\mathrm{ADC}$($\because$ AA닮음)

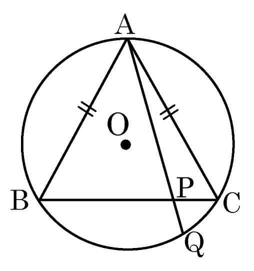
$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AE}} : \overline{\mathrm{AC}}$

$\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{AE}}$

$6 \times 9 = 6 \times (6 + x)$

$\therefore x = 3$

21. 다음 그림과 같이 이등변삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 를 지나는 직선이 밑변 BC 와 점 P 에서 만나고, 이 삼각형의 외접원과 점 Q 에서 만날 때, $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AB}^2$ 임을 설명하려고 한다. 이때 사용되는 정리를 고르면?



① $\overline{AB}$ 가 점 P, Q, B 를 지나는 원의 접선이면 $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AB}^2$ 이다.

② $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AB}^2$ 이면 $\overline{AC}$ 가 점 P, Q, B 를 지나는 원의 접선이다.

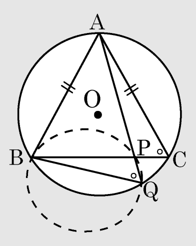
③ $\angle ABP = \angle AQB$ 이면 $\overline{AB}$ 가 점 P, Q, B 를 지나는 원의 접선이다.

④ $\overline{AC}$ 가 점 P, Q, C 를 지나는 원의 접선이면$\angle ABP = \angle AQB$ 이다.

⑤ $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AB}^2$ 이면 $\overline{AB}$ 는 세 점 P, Q, B 를 지나는 원의 접선이다.

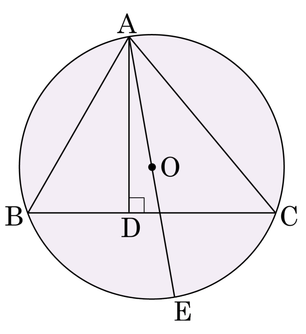
해설

$\angle ABC = \angle ACB$ (이등변삼각형)
$\angle ACB = \angle AQB$ (호 AB 의 원주각)
$\therefore\ \angle ABC = \angle AQB$
따라서 그림처럼 $\overline{AB}$ 가 점 B, P, Q를 지나는 원의 접선이 된다.



또, $\overline{AB}$ 가 접선일 때 $\overline{AB}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$ 이다.

22. 다음 그림을 보고 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



① $\angle ABD = \angle AEC$

② $\triangle ABD \backsim \triangle ACD$

③ $\angle ADB = \angle ACE = 90°$

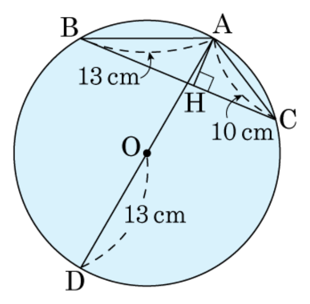
④ $\overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AC}$

⑤ $\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AD} \times \overline{AE}$

해설

$\triangle ABD$ 와 $\triangle AEC$ 에서
$\angle ABD = \angle AEC$ (원주각),
$\angle ADB = \angle ACE = 90°$ 이므로
$\triangle ABD \backsim \triangle AEC$ (AA닮음)
$\overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AC}$ 이므로
$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AE}$

23. 다음 그림에서 반지름의 길이가 13cm 인 원 O 는 $\triangle$ABC 의 외접원이다. $\overline{\mathrm{AD}}$ 가 원 O 의 지름이고 $\overline{\mathrm{AB}} = 13\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{AC}} = 10\mathrm{cm}$ 일 때, $\overline{\mathrm{BH}} : \overline{\mathrm{CH}} = a : b$ 에서 $a^2 - b^2$ 의 값을 구하여라.



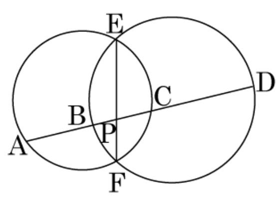
▶ 답 :

▷ 정답 : 69

해설

점 B와 D를 연결하면 $\triangle$ABD와 $\triangle$AHC에서 $13 : 26 = \overline{\mathrm{AH}} : 10$, $\overline{\mathrm{AH}} = 5\,\mathrm{cm}$이다.
$\triangle$ABH가 직각삼각형이므로
$\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\mathrm{cm}$이고,
$\overline{\mathrm{CH}} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{BH}} : \overline{\mathrm{CH}} = a : b = 12 : 5\sqrt{3}$, $a = 12$, $b = 5\sqrt{3}$ 이고,
$a^2 - b^2 = 144 - 75 = 69$ 이다.

24. 다음 그림과 같이 $\overline{EF}$ 는 두 원의 공통현이고, $\overline{AB} = 6$, $\overline{BP} = 2$, $\overline{PC} = 3$ 일 때, $\overline{CD}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 9

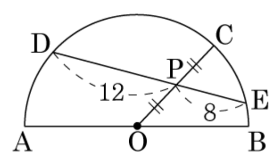
해설

$\overline{CD} = x$ 라 하면

$\overline{AP} \times \overline{PC} = \overline{PE} \times \overline{PF} = \overline{BP} \times \overline{PD}$ 에서

$(6+2) \times 3 = 2 \times (3+x) \qquad \therefore\ x = 9$

25. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}$ 는 반원 O의 지름이고, 점 P는 반지름 OC를 이등분하는 현 ED 위의 점이다. $\overline{DP}=12$, $\overline{EP}=8$ 일 때, 반원 O의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $8\sqrt{2}$

해설

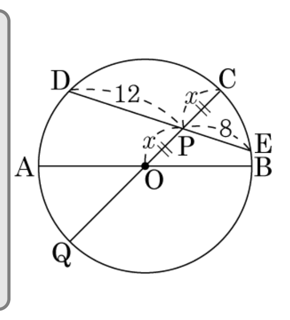
$\overline{PD}\times\overline{PE}=\overline{PQ}\times\overline{PC}$

$\overline{OP}=\overline{PC}=x$라고 하면

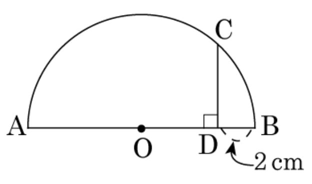
$12\times8=3x\times x,\ x^2=32$

$\therefore\ x=4\sqrt{2}$

따라서, 원의 반지름은 $2x = 8\sqrt{2}$ 이다.



26. 다음 그림에서 $\overline{AB}$는 반지름의 길이가 6 cm 인 반원 O의 지름이고, $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 이다. $\overline{BD} = 2$ cm 일 때, $\overline{CD}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

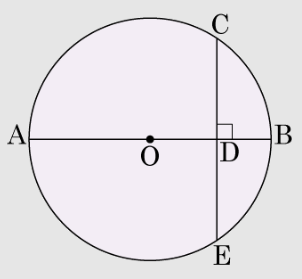
▷ 정답 : $2\sqrt{5}$ cm

해설

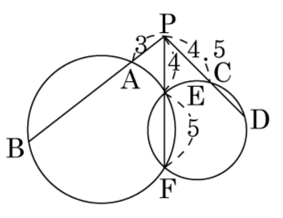
$\overline{CD} = \overline{ED} = x$ 라 하면

$x^2 = \overline{AD} \times \overline{BD} = 10 \times 2 = 20$

$\therefore\ x = 2\sqrt{5}$ (cm) ($\because\ x > 0$)



27. 다음 그림에서 $\overline{EF}$는 두 원의 공통현이고, $\overline{PA} = 3$, $\overline{PC} = 4.5$, $\overline{PE} = 4$, $\overline{EF} = 5$일 때, $\overline{AB} + \overline{CD}$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 12.5

해설

원에서의 비례 관계에서 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PE} \times \overline{PF}$

$3 \times \overline{PB} = 4 \times (4+5)$　　$\therefore\ \overline{PB} = 12$

$\therefore\ \overline{AB} = 12 - 3 = 9$

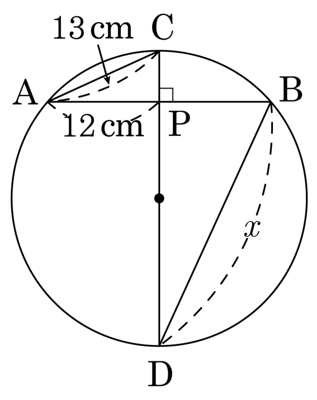
또, $\overline{PC} \times \overline{PD} = \overline{PE} \times \overline{PF}$ 에서 $\frac{9}{2} \times \overline{PD} = 4 \times (4+5)$

$\therefore\ \overline{PD} = 8$

$\therefore\ \overline{CD} = 8 - 4.5 = 3.5$

$\therefore\ \overline{AB} + \overline{CD} = 9 + 3.5 = 12.5$

28. 다음 그림과 같이 원의 두 현 AB, CD 의 교점을 P 라 할 때, $\overline{AP} = 12\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 13\,\text{cm}$, $\angle CPB = 90°$ 이다. $\overline{BD}$ 의 길이를 구하여라.



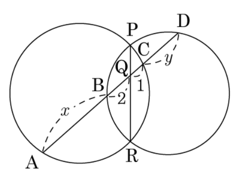
▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $\frac{156}{5}$ cm

해설

$\overline{BC}$ 를 그으면
$\triangle CAP \equiv \triangle CBP$
$\angle CBD = 90°$ 이므로
$\angle CAP = \angle CBP = \angle BDP$ 이므로
$\triangle CAP \backsim \triangle BDP$ (AA 닮음)
$\overline{AC} : \overline{DB} = \overline{CP} : \overline{BP}$
$13 : x = 5 : 12$
$\therefore x = \frac{156}{5}(\text{cm})$

29. 다음 그림에서 $\overline{BQ} = 2$, $\overline{CQ} = 1$ 이고, $\overline{AB} = x$, $\overline{CD} = y$ 라 할 때, $\dfrac{3x^2 + 4y^2}{xy}$ 의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

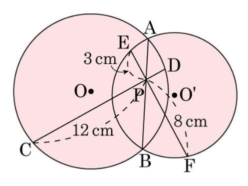
$\overline{QP}\times\overline{QR}=\overline{QA}\times\overline{QC}=\overline{QB}\times\overline{QD}$ 에서

$(x+2)\times 1 = 2\times(1+y)$

$x+2 = 2+2y$

$\therefore\ x = 2y$ $\dfrac{3x^2+4y^2}{xy}$ 에 대입하면 $\dfrac{12y^2+4y^2}{2y^2} = \dfrac{16y^2}{2y^2} = 8$

30. 다음 그림에서 $\overline{AB}$ 는 두 원의 공통현이고, 점 P 는 원 O 의 현 CD 와 원 O′ 의 현 EF 의 교점이다. $\overline{PE} = 3\,\mathrm{cm}$, $\overline{PF} = 8\mathrm{cm}$, $\overline{PC} = 12\mathrm{cm}$ 일 때, $\overline{PD}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ____ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

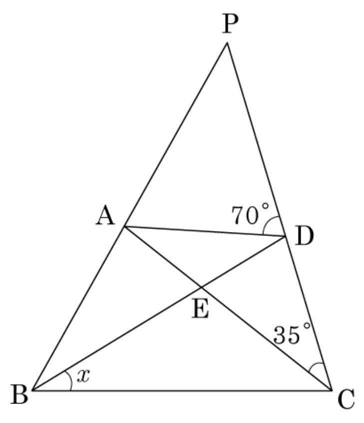
원 O 에서 $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD} \cdots$ ㉠

원 O′ 에서 $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{PE} \times \overline{PF} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $\overline{PC} \times \overline{PD} = \overline{PE} \times \overline{PF}$

$12 \times \overline{PD} = 3 \times 8 \quad \therefore \overline{PD} = 2(\mathrm{cm})$

31. 다음 그림에서 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PD}\cdot\overline{PC}$ 이고 $\angle ADP=70°$, $\angle ACD=35°$ 일 때, x 의 크기를 구하여라. (단, 단위는 생략한다.)



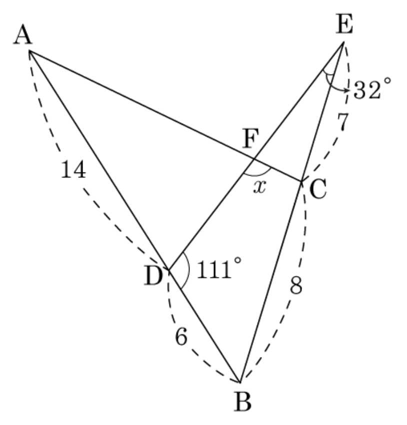
▶ 답 :

▷ 정답 : 35

해설

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PD}\cdot\overline{PC}$ 이므로
점 A, B, C, D 는 원 위의 점이다.
□ABCD 는 원에 내접하므로
$\angle ADC=110°$
$\angle ADC+\angle ABC=180°$
$\angle ABC=70°$
또 $\angle ACD=\angle ABD=35°$ 이므로
$x=35°$

32. 다음 그림에서 x 의 크기를 구하여라. (단, 단위는 생략한다.)



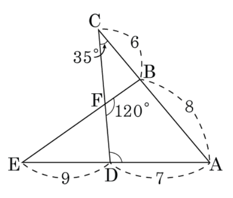
▶ 답 : $\underline{\quad}$ °

▷ 정답 : 101°

해설

$\overline{BD} \cdot \overline{BA} = \overline{BC} \cdot \overline{BE}$ 이므로
점 A, C, D, E 는 한 원 위의 점이다.
$\angle FEC = \angle FAD = 32°$
$\angle ADF = 180° - 111° = 69°$
$\therefore x = 69° + 32° = 101°$

33. 다음 그림에서 $\overline{AB} = 8cm$, $\overline{BC} = 6cm$, $\overline{AD} = 7cm$, $\overline{DE} = 9cm$ 이고, $\angle BFD = 120°$, $\angle FCB = 35°$ 일 때, $\angle ADF$ 의 크기를 구하여라.



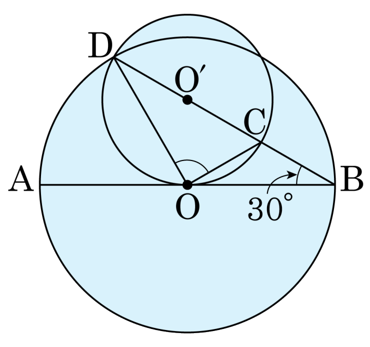
▶ 답 : __°

▷ 정답 : 95°

해설

$8 \times (8+6) = 7 \times (7+9)$ 이므로 네 점 B, C, E, D 는 한 원 위에 있다.
$\angle BCF = \angle DEF = 35°$ 이고 $\angle EFD = 180° - 120° = 60°$ 이므로
$\angle ADF = 35° + 60° = 95°(\because$ 외각$)$ 이다.

34. 다음 그림과 같이 원 O′ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 지름으로 하는 반원 O 의 중심에서 접하고 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 위의 점 D 와 만난다. $\overline{\mathrm{BD}}$ 와 원 O′ 과의 교점이 C 이고, $\angle\mathrm{CBO} = 30^\circ$ 일 때, $\angle\mathrm{DCO}$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad ^\circ}$

▷ 정답 : $\underline{60^\circ}$

해설

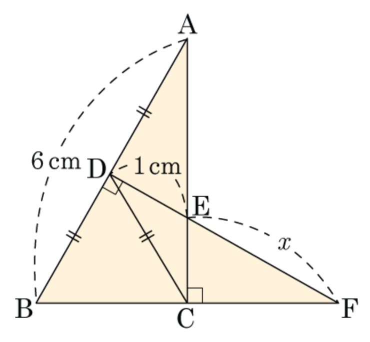
$\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OD}}$ 이므로

$\angle\mathrm{ODC} = \angle\mathrm{OBC} = 30^\circ$

$\therefore \angle\mathrm{ODC} = \angle\mathrm{COB} = 30^\circ$

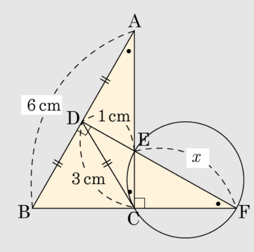
$\therefore \angle\mathrm{DCO} = 60^\circ$

35. 다음 그림에서 $\angle ACF = \angle FDB = 90°$ 이고 $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{DC}$ 이다. $\overline{AB} = 6\text{cm}$, $\overline{DE} = 1\text{cm}$ 일 때, $\overline{EF}$ 의 길이를 구하면?



① 5cm ② 6cm ③ 7cm ④ 8cm ⑤ 9cm

해설

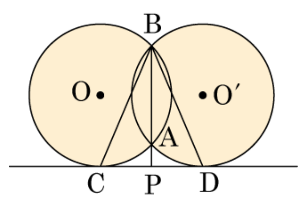


$\triangle BAC \sim \triangle BFD$ ($\because$ AA닮음)
$\therefore\ \angle A = \angle F,\quad \angle A = \angle DCA$
$\therefore\ \angle F = \angle DCA$ 따라서, $\triangle CEF$ 의 외접원에 대해 $\overline{DC}$ 는 접선

$$\Rightarrow \overline{DC^2} = \overline{DE} \cdot \overline{DF}$$

$3^2 = 1(1+x)$ 따라서 $x = 8$ 이다.

36. 다음 그림과 같이 두 원 O, O′ 의 공통외접선 CD 와 공통현 AB 의 연장선이 점 P 에서 만난다. $\overline{PA} = 1\text{cm}$, $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\overline{BC} = \overline{BD} = \sqrt{30}\text{cm}$ 일 때, △CBD 의 넓이는?



① $10\,\text{cm}^2$ ② $5\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ ③ $6\sqrt{2}\,\text{cm}^2$

④ $5\sqrt{5}\,\text{cm}^2$ ⑤ $2\sqrt{6}\,\text{cm}^2$

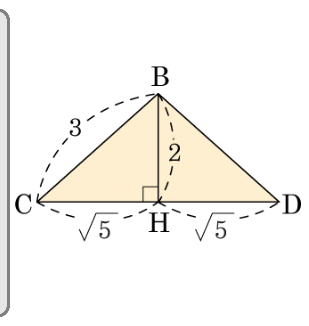
해설

$\overline{CP}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB} = 5$

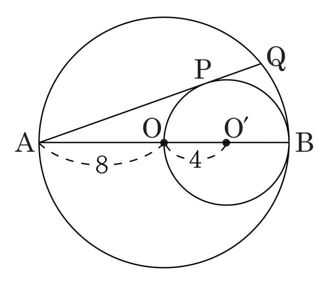
$\overline{CP} = \sqrt{5}\,\text{cm}$

$\therefore \overline{CD} = 2\overline{CP} = 2\sqrt{5}\,\text{cm}$

$\therefore \triangle CBD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 5 = 5\sqrt{5}(\text{cm}^2)$



37. 다음 그림과 같이 점 A 에서 원 O′ 에 그은 접선 AP 와 원 O 와의 교점을 Q 라 할 때, $\overline{AQ}$ 의 길이는?



① $\frac{5}{3}\sqrt{2}$
② $\frac{17}{3}\sqrt{2}$
③ $\frac{25}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{32}{3}\sqrt{2}$
⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{2}$

해설

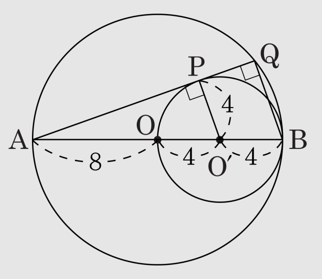
$\overline{AP} = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{144-16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$\triangle AO'P \backsim \triangle ABQ$에서

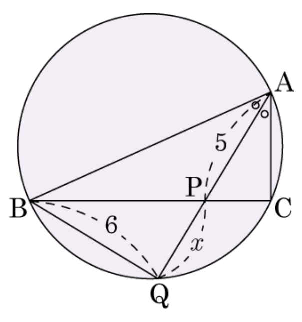
$12 : 16 = 8\sqrt{2} : \overline{AQ}$

$12\overline{AQ} = 128\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AQ} = \frac{32}{3}\sqrt{2}$



38. 다음 그림에서 $\overline{AQ}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이다. $\overline{AP} = 5$, $\overline{BQ} = 6$, $\overline{PQ} = x$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하여라.



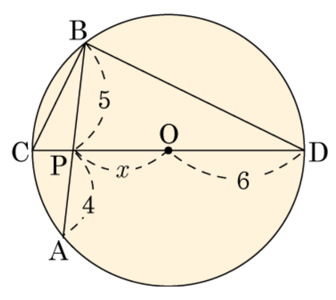
▶ 답:

▷ 정답: $\overline{PQ} = 4$

해설

$\angle PBQ = \angle PAC$, $\angle PBQ = \angle BAQ$ 이므로
세 점 B, Q, P 는 한 원 위에 있고 $\overline{BQ}$ 는 접선이므로
$\overline{BQ}^2 = \overline{QP} \times \overline{QA}$
$6^2 = x(x+5)$, $x = 4, -9$, $\therefore x = 4 (\because x > 0)$

39. 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{CD}}$ 는 원 O 의 지름이다. 원 O 의 반지름의 길이가 6 이고 $\overline{\mathrm{BC}} = a$, $\overline{\mathrm{BD}} = b$, $\overline{\mathrm{PO}} = x$, $x = b-a$ 일 때, $\sqrt{ab}$ 를 구하면?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$20 = (6-x)(6+x) \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 = b-a$, $\angle \mathrm{CBD} = 90^\circ$ 이므로 $a^2 + b^2 = 12^2$

$b - a = 4$ 의 양변을 제곱하면

$(b-a)^2 = 4^2$

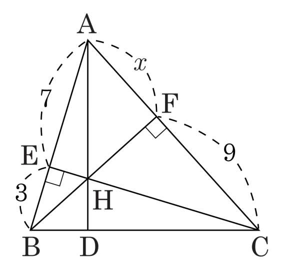
$a^2 - 2ab + b^2 = 16$

$144 - 2ab = 16$ ($\because a^2 + b^2 = 144$)

$-2ab = -128$

$\therefore \sqrt{ab} = 8$ ($\because ab > 0$)

40. 다음 그림에서 x 의 값은?



① 4　　② 4.5　　③ 5

④ 5.5　　⑤ 6

해설

점 E, B, C, F 는 한 원 위에 있고 직선 AB, AC 는 할선이 된다.

$7 \times 10 = x(x+9)$

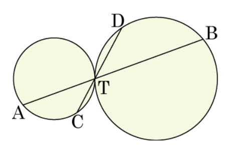
$70 = x^2 + 9x$

$x^2 + 9x - 70 = 0$

$(x+14)(x-5) = 0$

$\therefore x = 5\ (\because x > 0)$

41. 다음 그림과 같이 점 T 에서 두 원이 접하고, $\overline{AT} = 4$, $\overline{BT} = 6$, $\overline{CT} = 2$ 일 때, 선분 DT 의 길이를 구하여라.



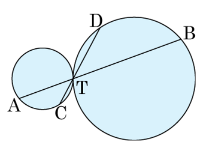
▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

두 원의 공통외접선 PQ 를 그으면
$\angle ATP = \angle ACT$, $\angle QTB = \angle BDT$ 이므로
$\angle ACT = \angle BDT$
또, $\angle ATC = \angle BTD$ 이므로 $\triangle TAC \backsim \triangle TBD$
따라서 $\overline{DT} = \dfrac{\overline{BT} \cdot \overline{CT}}{\overline{AT}} = 3$

42. 다음 그림과 같이 점 T 에서 두 원이 접하고, $\overline{\mathrm{AT}} = 3,\ \overline{\mathrm{BT}} = 5$ 일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{CT}}}{\overline{\mathrm{DT}}}$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{3}{5}$

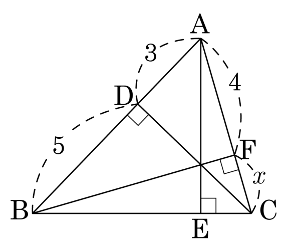
해설

두 원의 공통외접선 PQ 를 그으면 $\angle\mathrm{ATP} = \angle\mathrm{ACT},\ \angle\mathrm{QTB} = \angle\mathrm{BDT}$ 이므로 $\angle\mathrm{ACT} = \angle\mathrm{BDT}$

또, $\angle\mathrm{ATC} = \angle\mathrm{BTD}$ 이므로 $\triangle\mathrm{TAC} \backsim \triangle\mathrm{TBD}$

따라서 $\dfrac{\overline{\mathrm{CT}}}{\overline{\mathrm{DT}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AT}}}{\overline{\mathrm{BT}}} = \dfrac{3}{5}$

43. 다음 그림에서 네 점 B, C, D, F 는 한 원 위에 있을 때, $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 길이는?



① $2\sqrt{2}$　② $2\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{11}$　④ $2\sqrt{13}$　⑤ $2\sqrt{15}$

해설

$\overline{\mathrm{AF}} \times \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{AB}} =$ 이므로

$4(4+x) = 3 \cdot 8$

$\therefore\ x = 2$

$\triangle\mathrm{ABF}$ 에서 $\overline{\mathrm{BF}} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$

$\triangle\mathrm{BFC}$ 에서 $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 2^2} = 2\sqrt{13}$

44. 한 변의 길이가 r 인 정사각형 ABCD 의 외접원에서 호 AB 위에 임의의 한 점 P 를 잡을 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PD}}}{\overline{\mathrm{PC}}}$ 의 값을 r 을 사용하여 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

대각선 BD 의 길이는 $\sqrt{2}r$

사각형 BCDP 도 정사각형의 외접원에 외접하므로

$\overline{\mathrm{PB}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{PD}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{PC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$

$r\overline{\mathrm{PB}}+r\overline{\mathrm{PD}}=\sqrt{2}r\,\overline{\mathrm{PC}},\ \overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PD}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{PC}}$

$\therefore \dfrac{\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PD}}}{\overline{\mathrm{PC}}}=\sqrt{2}$

45. 넓이가 8π 인 원에 내접하는 정사각형 ABCD 에서 호 AB 위에 임의의 한 점 P 를 잡을 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PD}}}{\overline{\mathrm{PC}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

넓이가 8π 인 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이므로 정사각형 ABCD 의 한 변의 길이는 4

사각형 BCDP 도 정사각형의 외접원에 외접하므로

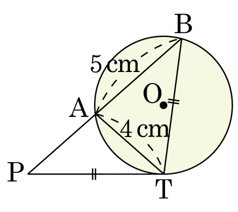
톨레미의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{PB}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{PD}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{PC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$

$4\overline{\mathrm{PB}}+4\overline{\mathrm{PD}}=4\sqrt{2}\overline{\mathrm{PC}},\ \overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PD}}=\sqrt{2}\overline{\mathrm{PC}}$

$\therefore\ \dfrac{\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PD}}}{\overline{\mathrm{PC}}}=\sqrt{2}$

46. 다음 그림과 같이 원 O 밖의 한 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 T라 하고, 점 P에서 그은 할선의 교점을 A, B라 하자. $\overline{PT} = \overline{BT}$, $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$, $\overline{AT} = 4\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{PT}$ 의 길이는?

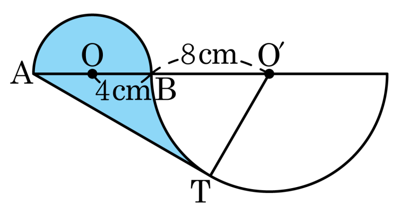


① 4 cm　② 4.5 cm　③ 5 cm
④ 5.5 cm　⑤ 6 cm

해설

$\angle ATP = \angle PBT = \angle BPT$
$\triangle APT$ 가 이등변삼각형이므로 $\overline{PA} = 4$
$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB} = 4 \times (4+5) = 36$
$\therefore\ \overline{PT} = 6\ (\because\ \overline{PT} > 0)$

47. 다음 그림에서 두 반원 O, O′ 의 반지름의 길이는 각각 4 cm, 8 cm 이다. $\overline{\mathrm{AT}}$ 가 반원 O′ 의 접선일 때, 색칠한 부분의 넓이는?



① $32\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$　② $(8\pi + 32\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$

③ $\left(32\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi\right)\,\mathrm{cm}^2$　④ $\left(32\sqrt{3} - \frac{32}{3}\pi\right)\,\mathrm{cm}^2$

⑤ $\left(64 - \frac{8}{3}\pi\right)\,\mathrm{cm}^2$

해설

$\overline{\mathrm{AT}}^2 = 8 \times 24 = 192 \quad \therefore\ \overline{\mathrm{AT}} = 8\sqrt{3}(\mathrm{cm})$

$\overline{\mathrm{AO'}} : \overline{\mathrm{AT}} : \overline{\mathrm{O'T}} = 2 : \sqrt{3} : 1$ 이므로 $\angle \mathrm{AO'T} = 60°$

작은 반원의 넓이는 $\pi \times 4^2 \times \frac{1}{2} = 8\pi(\mathrm{cm}^2)$

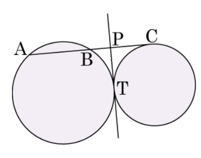
$\triangle \mathrm{ATO'}$ 의 넓이는 $8 \times 8\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 32\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

부채꼴 O′BT 의 넓이는 $\pi \times 8^2 \times \frac{60°}{360°} = \frac{32}{3}\pi(\mathrm{cm}^2)$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$8\pi + \left(32\sqrt{3} - \frac{32}{3}\pi\right) = \left(32\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi\right)\,\mathrm{cm}^2$ 이다.

48. 다음 그림에서 점 T 는 두 원이 외접하는 접점이고 점 C 는 현 AB 를 지나는 직선이 다른 원과 외접하는 점이다. $\overline{PB} = 1$, $\overline{PC} = 2$ 일 때, 현 AB 의 길이를 구하여라.



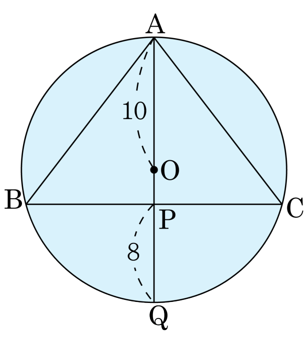
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

점 P 에서 한 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $\overline{PC} = \overline{PT} = 2$
$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 이므로 $4 = 1 + \overline{AB}$ $\quad \therefore \ \overline{AB} = 3$

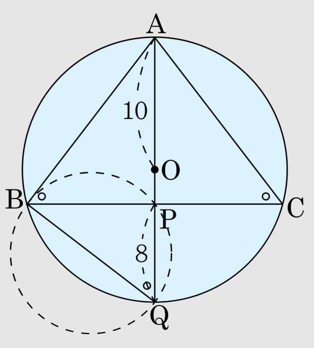
49. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 10 인 원 O에 내접하는 이등변삼각형 ABC 에 대하여 $\overline{PQ} = 8$일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① $36\sqrt{2}$　② $42\sqrt{17}$　③ $48\sqrt{6}$
④ 52　⑤ $52\sqrt{3}$

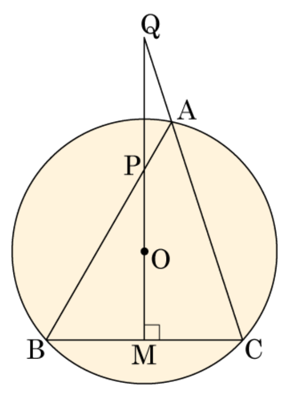
해설

다음 그림과 같이 보조선 $\overline{BQ}$ 를 연결하면
$\angle ACB = \angle AQB = \angle ABP$



이 때, $\overline{AQ} = 20$ 이므로 $\overline{AP} = 12$
$\therefore\ \overline{AB}^2 = \overline{AP} \times \overline{PQ} = 12 \times 20 = 240$
$\therefore\ \overline{AB} = 4\sqrt{15}$
선분 BC 는 $\overline{OP}$ 에 의해 수직이등분되므로 직각삼각형 $\triangle ABP$ 에서
$\overline{BP} = \sqrt{(4\sqrt{15})^2 - 12^2} = 4\sqrt{6}$　　$\therefore\ \overline{BC} = 8\sqrt{6}$
따라서, 구하는 넓이는
$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AP} = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{6} \times 12 = 48\sqrt{6}$ 이다.

50. 다음 그림과 같이 원 O 에 내접하는 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC}$ 의 수직이등분선이 $\overline{AB}$ 와 만나는 점을 P, $\overline{AC}$ 의 연장선과 만나는 점을 Q 라 하자. 원 O 의 지름이 길이가 16cm 이고, $\overline{OP} = 4\text{cm}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

보조선 $\overline{AO}$ 의 연장선과 원과의 교점을 D 라 하면 $\angle ADB = \angle ACB$
또한, $\triangle ADB$, $\triangle QMC$ 는 직각삼각형이므로
$\angle OAP = \angle AQP$
따라서 세점 A, P, Q는 한 원 위에 있고, $\overline{OA}$ 는 접선 $\overline{OQ}$ 는 할선으로 접선과 할선의 관계에 의해
$\overline{OA^2} = \overline{OP} \times \overline{OQ}$
$8^2 = 4 \times (4 + \overline{PQ})$
$\therefore\ \overline{PQ} = 12\,\text{cm}$