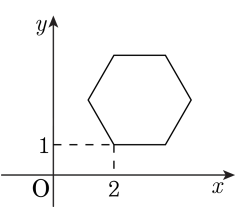


1. 다음은 한 변의 길이가 2 인 정육각형을 직교 좌표평면 위에 올려놓은 것이다. 여섯 개의 꼭짓점 중 부등식 $x + 5y \geq 10$ 의 영역 안에 있는 점의 개수를 구하여라. (정육각형의 가장 아래 변은 x 축에 평행하고, $\sqrt{3} = 1.7$ 로 한다)

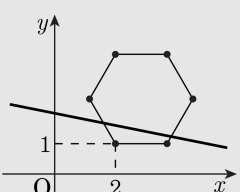


▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

직선 $x + 5y = 10$ 은 x 절편이 10, y 절편이 2 이므로 아래 그림과 같이 그릴 수 있다.
따라서 직선의 위부분에 해당하는 꼭짓점의 개수는 4 (개) 이다.



2. 부등식 $x^2 + y^2 - 2x + 4y < 0$ 이 속하지 않는 사분면을 구하면?

① 1사분면

② 2사분면

③ 3사분면

④ 4사분면

⑤ 없다

해설

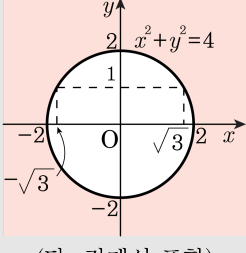
$x^2 + y^2 - 2x + 4y < 0$ 은 중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름이 $\sqrt{5}$ 인
원의 내부이므로 1, 3, 4 사분면을 지난다.
따라서 지나지 않는 사분면은 2사분면이다.

3. 점 $(k, 1)$ 이 부등식 $x^2 + y^2 \geq 4$ 의 영역에 포함되지 않도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $k > -\sqrt{3}$
- ② $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$
- ③ $k > \sqrt{3}$
- ④ $-2 < k < 0$
- ⑤ $0 < k < 2$

해설

부등식 $x^2 + y^2 \geq 4$ 의 영역은 $x^2 + y^2 = 4$ 의 경계를 포함한 외부이다.
그런데 점 $(k, 1)$ 이 이 영역에 포함되지 않으려면 원의 내부에 있어야 하므로
 $k^2 + 1 < 4, k^2 < 3$
 $\therefore -\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$



(단, 경계선 포함)

4. 점 $(a, 5)$ 가 곡선 $y = 2x^2 - 2x + 1$ 의 위 또는 윗부분에 있을 때, 상수 a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 $(a, 5)$ 가 부등식 $y \geq 2x^2 - 2x + 1$ 이 나타내는 영역에 포함되어야 한다.

$$5 \geq 2a^2 - 2a + 1, 2a^2 - 2a - 4 \leq 0$$

$$a^2 - a - 2 \leq 0, (a + 1)(a - 2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 2$$

a 의 최댓값은 2 이고, 최솟값은 -1 이다.

$$\therefore 2 + (-1) = 1$$

5. 포물선 $y = x^2 - 2kx + k^2 + 1$ 의 꼭짓점이 원 $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ 의 내부에 있기 위한 상수 k 의 값의 범위가 $a < k < b$ 일 때, 두 실수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 2kx + k^2 + 1$ 에서 $y = (x - k)^2 + 1$

즉, 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(k, 1)$ 이다.

또한, $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ 에서

$$(x + 1)^2 + y^2 = 2$$

점 $(k, 1)$ 이 원 $(x + 1)^2 + y^2 = 2$ 의 내부에 있으면 부등식

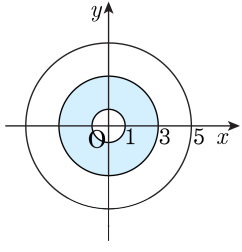
$(x + 1)^2 + y^2 < 2$ 의 영역에 속하므로

$$(k + 1)^2 + 1^2 < 2, k^2 + 2k < 0, k(k + 2) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 0$$

따라서, $a = -2$, $b = 0$ 이므로 $a - b = -2$

6. 다음 그림은 다트 판을 직교좌표계에 올려놓은 것이다. 부등식 $x^2 + y^2 \leq 1$ 의 영역을 A , 부등식 $1 < x^2 + y^2 \leq 9$ 의 영역을 B , 부등식 $9 < x^2 + y^2 \leq 25$ 의 영역을 C 라 할 때, A 에 맞추면 10 점, B 에 맞추면 9 점, C 에 맞추면 8 점이라고 한다. 한 사람이 다트를 5 회 던졌을 때 쏜 지점의 위치가 다음과 같다고 할 때, 획득 점수의 평균을 구하여라.



$(0, 0), (1, \sqrt{2}), (3, \pi), \left(3, \frac{1}{2}\right), (4, \sqrt{2} + 1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8.6

해설

$(0, 0)$ 은 $0^2 + 0^2 \leq 1$, A 이므로 10 점,
 $(1, \sqrt{2})$ 은 $1 < 1^2 + (\sqrt{2})^2 \leq 9$, B 이므로 9 점
같은 방법으로, $(3, \pi)$ 는 C 이므로 8 점,
 $\left(3, \frac{1}{2}\right), (4, \sqrt{2} + 1)$ 은 C 이므로 8 점
 $\therefore$ 총합은 $10 + 9 + 8 + 8 + 8 = 43$ 점,
평균은 8.6 점

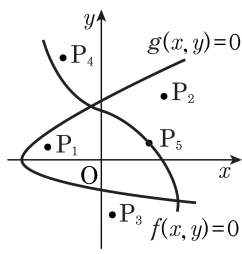
7. 점 $(k, -2)$ 이 부등식 $x^2 + y^2 \leq 9$ 의 영역 안에 있을 때 k 의 최댓값과 최솟값의 차는?

① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ 5 ⑤ 6

해설

점 $(k, -2)$ 가 부등식 $x^2 + y^2 \leq 9$ 을 만족하여야 하므로,
 $k^2 + (-2)^2 \leq 9, k^2 \leq 5$
 $\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$
따라서 최댓값과 최솟값의 차는 $2\sqrt{5}$ 이다.

8. 곡선 $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$ 에 대하여 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), P_4(x_4, y_4), P_5(x_5, y_5)$ 의 위치가 다음의 그림과 같다. 다음 중 옳은 것은? (단, $f(0, 0) > 0, g(0, 0) < 0$)



- ① $f(x_1, y_1) < 0$ ② $g(x_2, y_2) > 0$
 ③ $f(x_3, y_3) > 0$ ④ $g(x_4, y_4) < 0$
 ⑤ $f(x_5, y_5) < 0$

해설

- ① $f(x_1, y_1) > 0$
 ② $g(x_2, y_2) < 0$
 ③ $f(x_3, y_3) > 0$
 ④ $g(x_4, y_4) > 0$
 ⑤ $f(x_5, y_5) = 0$

9. 직선 $y = k(x - 1) + 3$ 이 두 점 A(3, 5), B(4, 1) 사이를 지나도록 할 때, ()안에 들어갈 수를 구하면?

$$-\frac{2}{3} < k < (\quad)$$

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y = k(x - 1) + 3$ 에서 $kx - y - k + 3 = 0$ 이 두 점 (3, 5), (4, 1) 사이를 지나려면 두 점이 서로 반대쪽에 있어야 한다.

$$(3k - 5 - k + 3)(4k - 1 - k + 3) < 0$$

$$\therefore -\frac{2}{3} < k < 1$$

10. 직선 $y = 2x + k$ 가 두 점 $P(-2, 6), Q(1, 3)$ 을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k 의 값의 범위는?

- ① $1 \leq k \leq 10$ ② $1 < k < 10$ ③ $2 \leq k \leq 12$
④ $2 < k < 12$ ⑤ $2 < k < 10$

해설

$f(x, y) = 2x - y + k$ 라 하면 두점 $(-2, 6), (1, 3)$ 에 대하여
 $f(-2, 6)f(1, 3) \leq 0$
 $1 \leq k \leq 10$

11. 부등식 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ 의 영역의 넓이를 A , 부등식 $x^2 + y^2 \leq 9$ 의 영역의 넓이를 B 라 할 때, $B - A$ 의 값은?

① 9π

② $9\pi - 4$

③ $9\pi + 1$

④ $9\pi - 2$

⑤ $9\pi + 2$

해설

$|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ 의 영역을 그림으로 나타

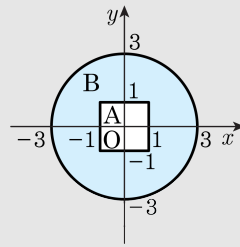
내면 $A = 4$

$x^2 + y^2 \leq 9$ 의 영역을

그림으로 나타내면

$B = 9\pi$

$\therefore B - A = 9\pi - 4$



12. $x^2 + y^2 \leq r$ 가 나타내는 영역이 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ 가 나타내는 영역에 포함된다고 할 때, 양수 r 의 최솟값을 구하여라.

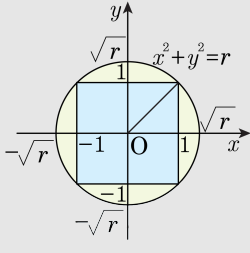
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

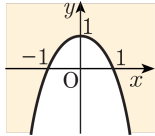
집합 $A = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 에서
 $A = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ 이고,
집합 B 가 나타내는 영역은 원 $x^2 + y^2 = r$ 의 내부(경계포함)
이다.

조건을 만족하려면 오른쪽 그림에서
원의 반지름의 길이 $\sqrt{r}$ 가 $\sqrt{2}$ 보다
크거나 같아야 한다. 즉, $\sqrt{r} \geq \sqrt{2}$
 $\therefore r \geq 2$
따라서, r 의 최솟값은 2이다.

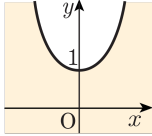


13. a 가 모든 실수의 값을 가질 때, 직선 $y = 2ax + a^2 + 1$ 이 통과하는 영역을 바르게 나타낸 것은?

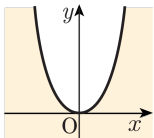
①



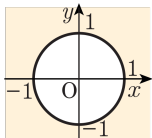
②



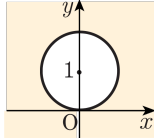
③



④



⑤



해설

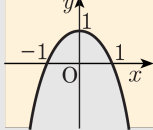
$y = 2ax + a^2 + 1$ 에서

$a^2 + 2xa + 1 - y = 0$

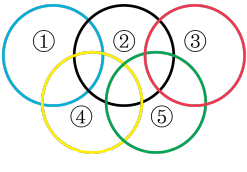
$D \geq 0$ 에서 $x^2 - (1 - y) \geq 0$

$\therefore y \geq -x^2 + 1$

따라서, 주어진 직선이 통과하는 영역은 다음 그림과 같다.



14. 다음 그림은 오륜기이며 1 번부터 5 번까지의 도형은 반지름이 2 인 원이다. ② 의 중심을 원점으로 하고, ①, ②, ③ 의 중심을 지나는 직선을 축으로 하는 직교좌표계를 사용한다. (①, ②, ③ 의 중심은 한 직선 위에 있으며, ④, ⑤ 의 중심을 이은 직선은 축 아래에 있으며 x 축에 평행) 각 원의 중심 간 거리는 모두 $2\sqrt{2}$ 이라고 할 때, 부등식 $x^2 - 4\sqrt{2}x + y^2 + 4 \leq 0$ 의 영역은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - 4\sqrt{2}x + y^2 + 4 = 0$ 을 표준형으로 바꿔 보면,
 $(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 4$
 $(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 2^2$ 이 된다.
 즉, 중심이 $(2\sqrt{2}, 0)$ 이고 반지름이 2 인 원이다.
 ③ 의 중심은 ② 의 그것에 $2\sqrt{2}$ 만큼 떨어져 있고 반지름이 2 이다.
 따라서 부등식 $x^2 - 4\sqrt{2}x + y^2 + 4 \leq 0$ 의 영역은 ③ 이다.

15. 증가함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 두 정점 $P(a, b), Q(c, d)$ 가 있다. 선분 PQ 와 곡선 $y = f(x)$ 가 접하지 않고 한 점에서 만나기 위한 조건을 나타낸 것은? (단, $b \neq f(a), d \neq f(c)$)

① $f(a) \cdot f(c) > 0$

② $\{b - f(a)\}\{d - f(c)\} < 0$

③ $af(a) > bf(b)$

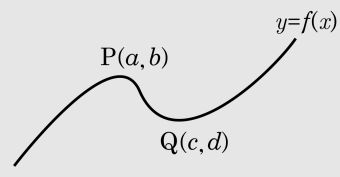
④ $\{a - f(a)\}\{c - f(c)\} > 0$

⑤ $bf(c) > df(a)$

해설

$y - f(x) = 0$ 에 대하여 서로 다른 영역에 있으므로 $b - f(a), d - f(c)$ 의 부호가 다르다.

$$\{b - f(a)\}\{d - f(c)\} < 0$$



16. D 가 부등식 $\max(|x|, |y|) \leq 1$ 의 영역이라고 하자. 함수 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 다음과 같다고 할 때, $f(0, 0) + f(2, 0) + f(1, 3)$ 의 값을 구하여라.

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 1 \{ (x, y) \in D$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\max(|0|, |0|) \leq 1, (0, 0) \in D,$
 $\therefore f(0, 0) = 1$
 $\max(|2|, |0|) = 2 > 1, (2, 0) \notin D,$
 $\therefore f(2, 0) = 0$
 $\max(|1|, |3|) = 3 > 1, (1, 3) \notin D,$
 $\therefore f(1, 3) = 0$
그러므로 $f(0, 0) + f(2, 0) + f(1, 3) = 1$

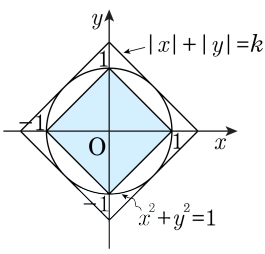
17. 실수 x, y 에 대하여 $|x| + |y| \leq k$ 를 만족하는 모든 (x, y) 가 $x^2 + y^2 \leq 1$ 를 만족한다고 할 때, 상수 k 의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 + y^2 \leq 1$ 은 원의 경계를 포함한 내부이고
 $|x| + |y| \leq k$ 은 변의 길이가 모두
 같은 마름모의 경계를 포함한 내부이
 므로

$x^2 + y^2 \leq 1$ 이 $|x| + |y| \leq k$ 일 때 k
 의 최댓값은 1이다.

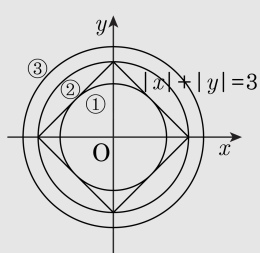


18. $|x| + |y| \leq 3$, $x^2 + y^2 \geq r^2$ 를 동시에 만족하는 (x, y) 가 존재하지 않는다고 할 때, r 의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$|x| + |y| \leq 3$ 는 아래 그림의 정사각형의 내부이고
 $x^2 + y^2 \geq r^2$ 는 중심이 $(0, 0)$ 이고 반지름이 r 인 원의 외부이다.
부등식 $|x| + |y| < 3$ 의 영역은 마름모의 내부이다.
 (x, y) 가 존재하는 경우는 ①, ②이고,
③의 경우는 (x, y) 가 존재하지 않는다.
점 $(0, 3)$ 을 지날 때, 반지름이 최대이다.
따라서 r 의 최댓값은 3이다.

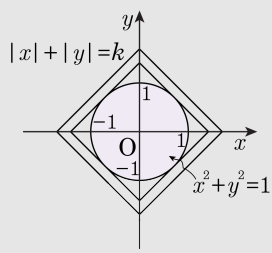


19. 부등식 $x^2 + y^2 \leq 1$ 의 영역이 부등식 $|x| + |y| \leq k$ 의 영역에 포함되도록 하는 실수 k 의 범위는?

- ① $k \geq \sqrt{2}$ ② $k < \sqrt{2}$ ③ $k \geq \sqrt{3}$
 ④ $k < \sqrt{3}$ ⑤ $k \geq 1$

해설

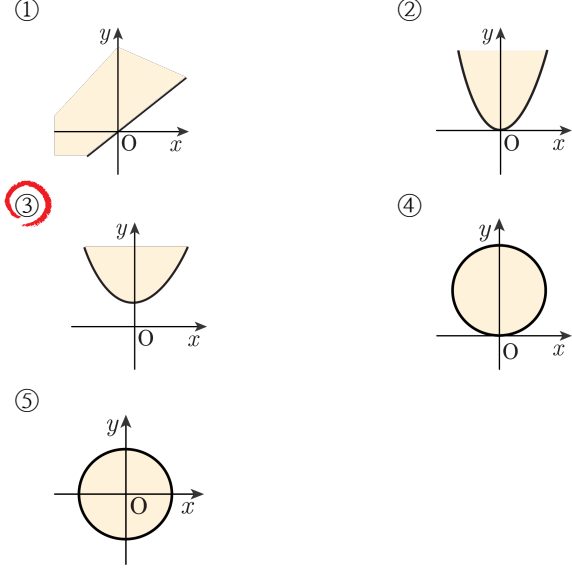
주어진 영역을 그리면,
 $x^2 + y^2 \leq 1$ 은 원의 내부이다.
 그리고 $|x| + |y| \leq k$ 는 $x + y = k$ 의
 그래프를
 x 축과 y 축에 대칭을 시킨 마름모이
 다.



그러므로 $x^2 + y^2 \leq 1$ 이 $|x| + |y| \leq k$
 에 포함되기 위해서는
 원이 마름모에 포함이 되어야 한다.
 따라서 직선 $x + y = k$ 와 원의 중심과의 거리가 반지름보다
 크거나 같아야 한다.

즉, $\frac{|k|}{\sqrt{1+1}} \geq 1, |k| \geq \sqrt{2}, \therefore k \geq \sqrt{2}$

20. 임의의 실수 t 에 대하여 두 점 $A(t, -t), B(t+2, t+2)$ 를 지나는 직선이 지나지 않는 영역을 좌표평면 위에 빗금으로 옳게 나타낸 것은? (단, 경계선을 포함하지 않는다.)



해설

두 점 $A(t, -t), B(2+t, 2+t)$ 를 지나는 직선의 방정식은

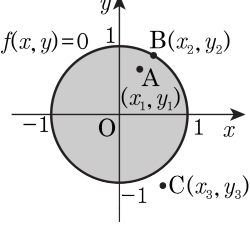
$$y+t=\frac{2t+2}{2}(x-t) \Leftrightarrow t^2+(2-x)t+y-x=0\cdots\cdots\textcircled{7}$$

t 가 허수이면 직선이 존재하지 않으므로 $\textcircled{7}$ 이 허근을 가지면 된다. 그러므로

$$D=(2-x)^2-4(y-x)<0$$

$$\therefore y>\frac{1}{4}x^2+1$$

21. 좌표평면 위에서 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 을 만족시키는 점들의 자취와 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 이 다음의 그림과 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?



- ① $f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) = 0$
- ② $f(x_1, y_1) \cdot f(x_3, y_3) < 0$
- ③ $f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3) > 0$
- ④ $f(x_1, y_1)f(x_2, y_2)f(x_3, y_3) = 0$
- ⑤ $\{f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\}\{f(x_1, y_1) + f(x_3, y_3)\} \neq 0$

해설

$f(x_2, y_2) = 0$ 이고
 $f(x_1, y_1)$ 과 $f(x_3, y_3)$ 는 부호가 반대이므로
 $f(x_1, y_1) > 0$, $f(x_3, y_3) < 0$ 또는
 $f(x_1, y_1) < 0$, $f(x_3, y_3) > 0$ 이 성립한다.
따라서 ①, ②, ④는 옳지만 ③에서
 $f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3) < 0$ 일수도 있다.
또 ⑤에서 $\{f(x_1, y_1) + f(x_3, y_3)\}$ 의 값은 0이 될 수도 있다.

22. 세 점 A(1, 1), B(3, 3), C(4, 0) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 내부에 점 $(a, 2)$ 가 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $0 < a < \frac{4}{3}$ ② $\frac{2}{3} < a < 3$ ③ $\frac{1}{3} < a < 2$
④ $2 < a < \frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3} < a < 4$

해설

삼각형 ABC 에서 직선 AB 의 방정식은 $y = x$

직선 BC 의 방정식은 $y = -3x + 12$

직선 CA 의 방정식은 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ 이므로

삼각형 ABC 의 내부는 세 부등식

$y < x$, $y < -3x + 12$, $y > -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ 를 동시에 만족시키는

영역이다.

점 $(a, 2)$ 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하므로

$2 < a \cdots \textcircled{\text{㉠}}$,

$2 < -3a + 12 \therefore a < \frac{10}{3} \cdots \textcircled{\text{㉡}}$,

$2 > -\frac{1}{3}a + \frac{4}{3} \therefore a > -2 \cdots \textcircled{\text{㉢}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$ 에서 a 의 값의 범위는 $2 < a < \frac{10}{3}$

23. x 의 이차방정식 $x^2 - 2(|a| + |b| - 3)x + 4 = 0$ 이 허근을 갖도록 하는 실수 a, b 에 대하여 점 (a, b) 가 존재하는 영역의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 48

해설

판별식 $\frac{D}{4} = (|a| + |b| - 3)^2 - 4 < 0$ 에서

$$(|a| + |b| - 3)^2 < 4,$$

$$-2 < (|a| + |b| - 3) < 2$$

$$\therefore 1 < |a| + |b| < 5$$

경계를 구하면 $|a| + |b| = 1$,

$|a| + |b| = 5$ 이고,

경계에 없는 점 $(2, 0)$ 을 대입했을 때,

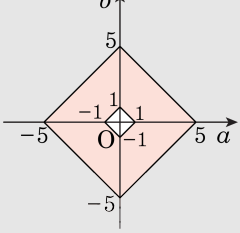
$$(2 + 0 - 3)^2 = 1 < 4$$

부등식이 성립하므로,

구하는 영역은 다음 그림과 같다. 따라서

구하는 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 4 = 48$$

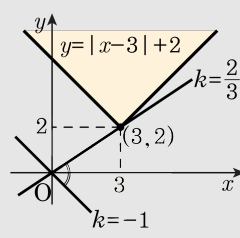


24. $y \geq |x-3|+2$, $y=kx$ 에 대하여 두 식을 만족하는 (x, y) 가 존재하지 않을 때, k 의 값의 범위는?

- ① $-1 < k < \frac{2}{3}$ ② $-1 \leq k < \frac{2}{3}$ ③ $-1 < k \leq \frac{2}{3}$
 ④ $-1 \leq k \leq \frac{2}{3}$ ⑤ $-1 < k \leq 0$

해설

주어진 식을 그래프로 나타내면 다음 그림과 같다. 위의 그림에서 $y=kx$ 가 색칠한 부분을 지나지 않으려면, $-1 \leq k < \frac{2}{3}$



25. 실수 x, y 에 대하여 $0 \leq y \leq \frac{2}{3}(x+3-2|x|)$ 를 만족하는 모든 (x, y) 가 $x^2 + y^2 \leq a$ 를 만족한다고 할 때, a 의 최솟값은?

- ① $\sqrt{3}$
- ② 3
- ③ 6
- ④ 9
- ⑤ 12

해설

$x \geq 0$ 일 때,
 $0 \leq y \leq \frac{2}{3}(-x+3)$

$x < 0$ 일 때,
 $0 \leq y \leq 2(x+1)$

$x^2 + y^2 \leq (\sqrt{a})^2$ 의 영역이 삼각형을 포함하도록 하므로, $\sqrt{a} \geq 3$
따라서 a 의 최솟값은 9