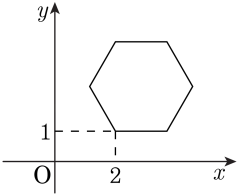
1. 다음은 한 변의 길이가 2 인 정육각형을 직교좌표평면 위에 올려놓은 것이다. 여섯 개의 꼭짓점 중 부등식 $x+5y \geq 10$ 의 영역 안에 있는 점의 개수를 구하여라. (정육각형의 가장 아래 변은 x 축에 평행하고, $\sqrt{3}=1.7$ 로 한다)

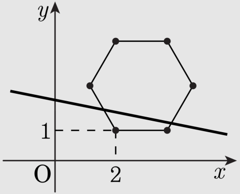


▶ **답 :** ____개

▷ **정답 :** 4 개

해설

직선 $x+5y=10$ 은 x 절편이 10, y 절편이 2 이므로 아래 그림과 같이 그릴 수 있다.
따라서 직선의 윗부분에 해당하는 꼭짓점의 개수는 4 (개) 이다.



2. 부등식 $x^2+y^2-2x+4y<0$이 속하지 않는 사분면을 구하면?

① 1사분면 ② 2사분면 ③ 3사분면

④ 4사분면 ⑤ 없다

해설

$x^2+y^2-2x+4y<0$ 은 중심이 $(1,-2)$이고 반지름이 $\sqrt{5}$ 인 원의 내부이므로 $1,3,4$사분면을 지난다.

따라서 지나지 않는 사분면은 2사분면이다.

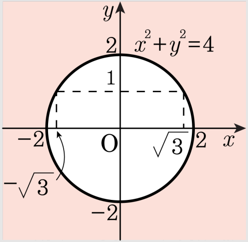
3. 점 $(k, 1)$이 부등식 $x^2 + y^2 \geq 4$의 영역에 포함되지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k > -\sqrt{3}$　　② $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$　　③ $k > \sqrt{3}$

④ $-2 < k < 0$　　⑤ $0 < k < 2$

해설

부등식 $x^2+y^2 \geq 4$의 영역은 $x^2+y^2 = 4$의 경계를 포함한 외부이다.
그런데 점 $(k, 1)$이 이 영역에 포함되지 않으려면 원의 내부에 있어야 하므로
$k^2 + 1 < 4,\ k^2 < 3$
$\therefore -\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$



(단, 경계선 포함)

4. 점 $(a,\ 5)$ 가 곡선 $y = 2x^2 - 2x + 1$ 의 위 또는 윗부분에 있을 때, 상수 a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점$(a,\ 5)$ 가 부등식 $y \geq 2x^2 - 2x + 1$ 이 나타내는 영역에 포함되어야 한다.

$5 \geq 2a^2 - 2a + 1,\ 2a^2 - 2a - 4 \leq 0$

$a^2 - a - 2 \leq 0,\ (a + 1)(a - 2) \leq 0$

$\therefore\ -1 \leq a \leq 2$

a 의 최댓값은 2 이고, 최솟값은 -1 이다.

$\therefore\ 2 + (-1) = 1$

5. 포물선 $y = x^2 - 2kx + k^2 + 1$의 꼭짓점이 원 $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$의 내부에 있기 위한 상수 k의 값의 범위가 $a < k < b$일 때, 두 실수 a, b에 대하여 $a - b$의 값을 구하여라.

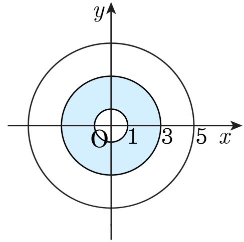
▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 2kx + k^2 + 1$에서 $y = (x-k)^2 + 1$
즉, 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(k, 1)$이다.
또한, $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$에서
$(x+1)^2 + y^2 = 2$
점 $(k, 1)$이 원 $(x+1)^2 + y^2 = 2$의 내부에 있으면 부등식 $(x+1)^2 + y^2 < 2$의 영역에 속하므로
$(k+1)^2 + 1^2 < 2$, $k^2 + 2k < 0$, $k(k+2) < 0$
$\therefore -2 < k < 0$
따라서, $a = -2$, $b = 0$이므로 $a - b = -2$

6. 다음 그림은 다트 판을 직교좌표계에 올려놓은 것이다. 부등식 $x^2 + y^2 \le 1$ 의 영역을 A, 부등식$1 < x^2 + y^2 \le 9$ 의 영역을 B, 부등식 $9 < x^2 + y^2 \le 25$ 의 영역을 C 라 할 때, A 에 맞추면 10 점, B 에 맞추면 9 점, C 에 맞추면 8 점이라고 한다. 한 사람이 다트를 5 회 던졌을 때 꽂힌 지점의 위치가 다음과 같다고 할 때, 획득 점수의 평균을 구하여라.



$(0,\ 0)$, $(1,\ \sqrt{2})$, $(3,\ \pi)$, $\left(3,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $(4,\ \sqrt{2}+1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8.6

해설

$(0,\ 0)$ 은 $0^2 + 0^2 \le 1$, A 이므로 10 점,
$(1,\ \sqrt{2})$ 은 $1 < 1^2 + (\sqrt{2})^2 \le 9$, B 이므로 9 점
같은 방법으로, $(3,\ \pi)$ 는 C 이므로 8 점,
$\left(3,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $(4,\ \sqrt{2}+1)$ 은 C 이므로 8 점
$\therefore$ 총합은 $10 + 9 + 8 + 8 + 8 = 43$ 점,
평균은 8.6 점

7. 점 $(k,\ -2)$ 이 부등식 $x^2+y^2 \le 9$ 의 영역 안에 있을 때 k 의 최댓값과 최솟값의 차는?

① 2　② $2\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{5}$　④ 5　⑤ 6

해설

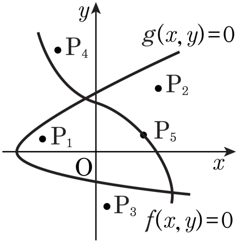
점 $(k,\ -2)$ 가 부등식 $x^2+y^2 \le 9$ 을 만족하여야 하므로,

$k^2+(-2)^2 \le 9,\ k^2 \le 5$

$\therefore\ -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$

따라서 최댓값과 최솟값의 차는 $2\sqrt{5}$ 이다.

8. 곡선 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$에 대하여 $P_1(x_1,\ y_1)$, $P_2(x_2,\ y_2)$, $P_3(x_3,\ y_3)$, $P_4(x_4,\ y_4)$, $P_5(x_5,\ y_5)$의 위치가 다음의 그림과 같다. 다음 중 옳은 것은? (단, $f(0,\ 0)>0$, $g(0,\ 0)<0$)



① $f(x_1,\ y_1)<0$ ② $g(x_2,\ y_2)>0$

③ $f(x_3,\ y_3)>0$ ④ $g(x_4,\ y_4)<0$

⑤ $f(x_5,\ y_5)<0$

해설

① $f(x_1,\ y_1)>0$

② $g(x_2,\ y_2)<0$

③ $f(x_3,\ y_3)>0$

④ $g(x_4,\ y_4)>0$

⑤ $f(x_5,\ y_5)=0$

9. 직선 $y=k(x-1)+3$ 이 두 점 $\mathrm{A}(3,5), \mathrm{B}(4,1)$ 사이를 지나도록 할 때, (　　　) 안에 들어갈 수를 구하면?

$-\frac{2}{3}<k<(\quad\quad)$

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$y=k(x-1)+3$ 에서 $kx-y-k+3=0$ 이 두 점 $(3,\ 5),\ (4,\ 1)$ 사이를 지나려면 두 점이 서로 반대쪽에 있어야 한다.

$(3k-5-k+3)(4k-1-k+3)<0$

$\therefore -\frac{2}{3}<k<1$

10. 직선 $y = 2x + k$가 두 점 $\mathrm{P}(-2,\ 6), \mathrm{Q}(1,\ 3)$을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k의 값의 범위는?

① $1 \le k \le 10$ ② $1 < k < 10$ ③ $2 \le k \le 12$

④ $2 < k < 12$ ⑤ $2 < k < 10$

해설

$f(x,\ y) = 2x - y + k$라 하면 두점$(-2,\ 6),\ (1,\ 3)$에 대하여

$f(-2,\ 6)f(1,\ 3) \le 0$

$1 \le k \le 10$

11. 부등식 $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ 의 영역의 넓이를 A, 부등식 $x^2 + y^2 \le 9$ 의 영역의 넓이를 B 라 할 때, $B - A$ 의 값은?

① 9π ② $9\pi - 4$ ③ $9\pi + 1$

④ $9\pi - 2$ ⑤ $9\pi + 2$

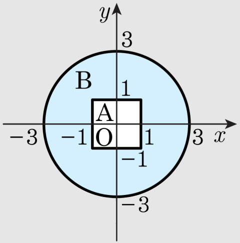
해설

$|x| \le 1$, $|y| \le 1$ 의 영역을 그림으로 나타내면 $A = 4$

$x^2 + y^2 \le 9$ 의 영역을 그림으로 나타내면

$B = 9\pi$

$\therefore\ B - A = 9\pi - 4$



12. $x^2+y^2 \le r$가 나타내는 영역이 $|x| \le 1, |y| \le 1$가 나타내는 영역에 포함된다고 할 때, 양수 r 의 최솟값을 구하여라.

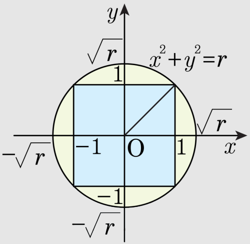
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

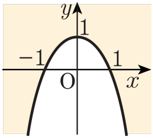
집합 $A = \{(x, y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$ 에서
$A = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ 이고,
집합 B 가 나타내는 영역은 원 $x^2+y^2 = r$ 의 내부(경계포함)이다.

조건을 만족하려면 오른쪽 그림에서 원의 반지름의 길이 $\sqrt{r}$ 가 $\sqrt{2}$ 보다 크거나 같아야 한다. 즉, $\sqrt{r} \ge \sqrt{2}$
$\therefore r \ge 2$
따라서, r 의 최솟값은 2 이다.

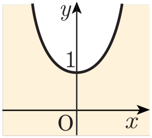


13. a 가 모든 실수의 값을 가질 때, 직선 $y = 2ax + a^2 + 1$ 이 통과하는 영역을 바르게 나타낸 것은?

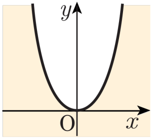
①



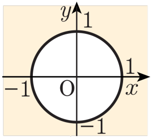
②



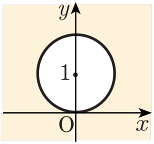
③



④



⑤



해설

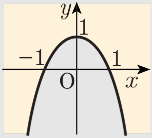
$y = 2ax + a^2 + 1$ 에서

$a^2 + 2xa + 1 - y = 0$

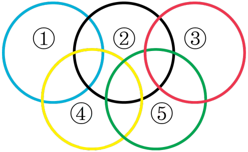
$D \geq 0$ 에서 $x^2 - (1 - y) \geq 0$

$\therefore\ y \geq -x^2 + 1$

따라서, 주어진 직선이 통과하는 영역은 다음 그림과 같다.



14. 다음 그림은 오륜기이며 1 번부터 5 번까지의 도형은 반지름이 2 인 원이다. ② 의 중심을 원점으로 하고, ①, ②, ③ 의 중심을 지나는 직선을 축으로 하는 직교좌표계를 사용한다. (①, ②, ③ 의 중심은 한 직선 위에 있으며, ④, ⑤ 의 중심을 이은 직선은 축 아래에 있으며 x 축에 평행) 각 원의 중심 간 거리는 모두 $2\sqrt{2}$ 이라고 할 때, 부등식 $x^2 - 4\sqrt{2}x + y^2 + 4 \leq 0$ 의 영역은?



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2 - 4\sqrt{2}x + y^2 + 4 = 0$을 표준형으로 바꿔 보면,

$(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 4$

$(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 2^2$ 이 된다.

즉, 중심이 $(2\sqrt{2},\ 0)$ 이고 반지름이 2 인 원이다.

③ 의 중심은 ② 의 그것에 $2\sqrt{2}$ 만큼 떨어져 있고 반지름이 2 이다.

따라서 부등식 $x^2 - 4\sqrt{2}x + y^2 + 4 \leq 0$ 의 영역은 ③ 이다.

15. 증가함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 두 정점 $\mathrm{P}(a,\ b), \mathrm{Q}(c,\ d)$ 가 있다. 선분 PQ 와 곡선 $y=f(x)$ 가 접하지 않고 한 점에서 만나기 위한 조건을 나타낸 것은? (단, $b \neq f(a)$, $d \neq f(c)$)

① $f(a) \cdot f(c) > 0$

② $\{b-f(a)\}\{d-f(c)\} < 0$

③ $af(a) > bf(b)$

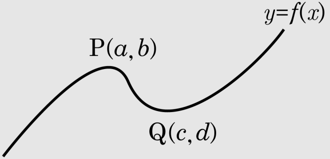
④ $\{a-f(a)\}\{c-f(c)\} > 0$

⑤ $bf(c) > df(a)$

해설

$y-f(x)=0$ 에 대하여 서로 다른 영역에 있으므로 $b-f(a)$, $d-f(c)$ 의 부호가 다르다.

$\{b-f(a)\}\{d-f(c)\} < 0$



16. D가 부등식 $\max(|x|, |y|) \le 1$의 영역이라고 하자. 함수 $f : R^2 \to R^2$가 다음과 같다고 할 때, $f(0,\ 0)+f(2,\ 0)+f(1,\ 3)$의 값을 구하여라.

$(x,\ y) \in R^2,\ f(x,\ y) = 1\{(x,\ y)\} \in D$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\max(|0|,\ |0|) \le 1,\ (0,\ 0) \in D,$

$\therefore\ f(0,\ 0) = 1$

$\max(|2|,\ |0|) = 2 > 1,\ (2,\ 0) \notin D,$

$\therefore\ f(2,\ 0) = 0$

$\max(|1|,\ |3|) = 3 > 1,\ (1,\ 3) \notin D,$

$\therefore\ f(1,\ 3) = 0$

그러므로 $f(0,\ 0) + f(2,\ 0) + f(1,\ 3) = 1$

17. 실수 x, y 에 대하여 $|x|+|y| \le k$를 만족하는 모든 (x, y)가 $x^2+y^2 \le 1$를 만족한다고 할 때, 상수 k 의 최댓값은?

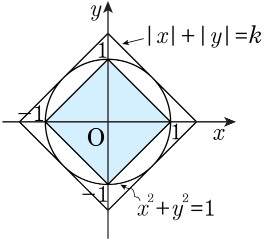
① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2+y^2 \le 1$ 은 원의 경계를 포함한 내부이고

$|x|+|y| \le k$ 은 변의 길이가 모두 같은 마름모의 경계를 포함한 내부이므로

$x^2+y^2 \le 1$ 이 $|x|+|y| \le k$ 일 때 k 의 최댓값은 1 이다.

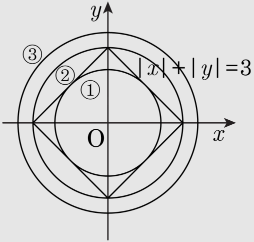


18. $|x|+|y| \le 3$, $x^2+y^2 \ge r^2$를 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 존재하지 않는다고 할 때, r의 최댓값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$|x|+|y| \le 3$는 아래 그림의 정사각형의 내부이고
$x^2+y^2 \ge r^2$는 중심이 $(0,\ 0)$ 이고 반지름이 r 인 원의 외부이다.
부등식 $|x|+|y| < 3$ 의 영역은 마름모의 내부이다.
$(x,\ y)$가 존재하는 경우는 ①, ② 이고,
③ 의 경우는 $(x,\ y)$가 존재하지 않는다.
점 $(0,\ 3)$ 을 지날 때, 반지름이 최대이다.
따라서 r 의 최댓값은 3 이다.



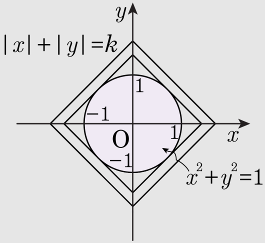
19. 부등식 $x^2+y^2 \le 1$ 의 영역이 부등식 $|x|+|y| \le k$ 의 영역에 포함되도록 하는 실수 k 의 범위는?

① $k \ge \sqrt{2}$　② $k < \sqrt{2}$　③ $k \ge \sqrt{3}$

④ $k < \sqrt{3}$　⑤ $k \ge 1$

해설

주어진 영역을 그리면,
$x^2+y^2 \le 1$ 은 원의 내부이다.
그리고 $|x|+|y| \le k$ 는 $x+y=k$ 의 그래프를 x 축과 y 축에 대칭을 시킨 마름모이다.

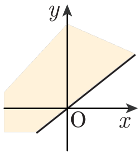


그러므로 $x^2+y^2 \le 1$ 이 $|x|+|y| \le k$ 에 포함되기 위해서는
원이 마름모에 포함이 되어야 한다.
따라서 직선 $x+y=k$ 와 원의 중심과의 거리가 반지름보다 크거나 같아야 한다.

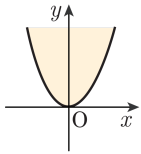
즉, $\dfrac{|k|}{\sqrt{1+1}} \ge 1$, $|k| \ge \sqrt{2}$, $\therefore\ k \ge \sqrt{2}$

20. 임의의 실수 t 에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(t, -t), \mathrm{B}(t+2, t+2)$ 를 지나는 직선이 지나지 않는 영역을 좌표평면 위에 빗금으로 옳게 나타낸 것은? (단, 경계선을 포함하지 않는다.)

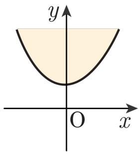
①



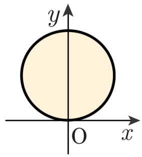
②



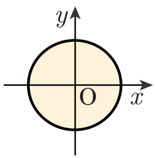
③



④



⑤



해설

두 점 $\mathrm{A}(t, -t), \mathrm{B}(2+t, 2+t)$ 를 지나는 직선의 방정식은

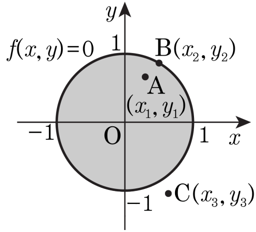
$$y + t = \frac{2t+2}{2}(x - t) \;\Leftrightarrow\; t^2 + (2-x)t + y - x = 0 \cdots\cdots ㉠$$

t가 허수이면 직선이 존재하지 않으므로 ㉠이 허근을 가지면 된다. 그러므로

$$\mathrm{D} = (2-x)^2 - 4(y-x) < 0$$

$$\therefore\; y > \frac{1}{4}x^2 + 1$$

21. 좌표평면 위에서 $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$ 을 만족시키는 점들의 자취와 세 점 $\mathrm{A}(x_1,y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,y_3)$ 이 다음의 그림과 같을 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?



① $f(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2)=0$

② $f(x_1,y_1)\cdot f(x_3,y_3)<0$

③ $f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)+f(x_3,y_3)>0$

④ $f(x_1,y_1)f(x_2,y_2)f(x_3,y_3)=0$

⑤ $\{f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\}\{f(x_1,y_1)+f(x_3,y_3)\}\neq 0$

해설

$f(x_2,y_2)=0$ 이고
$f(x_1,y_1)$ 과 $f(x_3,y_3)$ 는 부호가 반대이므로
$f(x_1,y_1)>0$, $f(x_3,y_3)<0$ 또는
$f(x_1,y_1)<0$, $f(x_3,y_3)>0$ 이 성립한다.
따라서 ①, ②, ④는 옳지만 ③에서
$f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)+f(x_3,y_3)<0$ 일수도 있다.
또 ⑤에서 $\{f(x_1,y_1)+f(x_3,y_3)\}$ 의 값은 0이 될 수도 있다.

22. 세 점 A(1, 1), B(3, 3), C(4, 0) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 내부에 점 $(a,\ 2)$ 가 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < \dfrac{4}{3}$　　② $\dfrac{2}{3} < a < 3$　　③ $\dfrac{1}{3} < a < 2$

④ $2 < a < \dfrac{10}{3}$　　⑤ $\dfrac{4}{3} < a < 4$

해설

삼각형 ABC 에서 직선 AB 의 방정식은 $y = x$

직선 BC 의 방정식은 $y = -3x + 12$

직선 CA 의 방정식은 $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$ 이므로

삼각형 ABC 의 내부는 세 부등식

$y < x$, $y < -3x + 12$, $y > -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$ 를 동시에 만족시키는 영역이다.

점 $(a,\ 2)$ 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하므로

$2 < a \cdots$ ㉠,

$2 < -3a + 12 \quad \therefore a < \dfrac{10}{3} \cdots$ ㉡,

$2 > -\dfrac{1}{3}a + \dfrac{4}{3} \quad \therefore a > -2 \cdots$ ㉢

㉠,㉡,㉢에서 a 의 값의 범위는 $2 < a < \dfrac{10}{3}$

23. x 의 이차방정식 $x^2-2(|a|+|b|-3)x+4=0$ 이 허근을갖도록 하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 점 $(a,\ b)$ 가 존재하는 영역의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 48

해설

판별식 $\dfrac{D}{4}=(|a|+|b|-3)^2-4<0$ 에서

$(|a|+|b|-3)^2<4$,

$-2<(|a|+|b|-3)<2$

$\therefore\ 1<|a|+|b|<5$

경계를 구하면 $|a|+|b|=1$,

$|a|+|b|=5$ 이고,

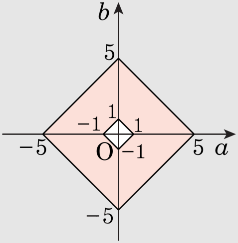
경계에 없는 점 $(2,\ 0)$ 을 대입했을 때,

$(2+0-3)^2=1<4$

부등식이 성립하므로,

구하는 영역은 다음 그림과 같다. 따라서 구하는 영역의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times5\times4-\dfrac{1}{2}\times1\times1\times4=48$

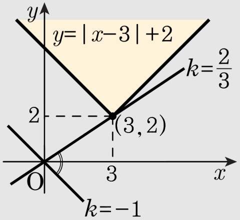


24. $y \geq |x-3|+2$, $y = kx$에 대하여 두 식을 만족하는 $(x,\ y)$가 존재하지 않을 때, k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < \frac{2}{3}$ ② $-1 \leq k < \frac{2}{3}$ ③ $-1 < k \leq \frac{2}{3}$
④ $-1 \leq k \leq \frac{2}{3}$ ⑤ $-1 < k \leq 0$

해설

주어진 식을 그래프로 나타내면 다음 그림과 같다. 위의 그림에서 $y = kx$ 가 색칠한 부분을 지나지 않으려면, $-1 \leq k < \frac{2}{3}$



25. 실수 x, y 에 대하여 $0 \le y \le \frac{2}{3}(x+3-2|x|)$를 만족하는 모든 (x, y)가 $x^2+y^2 \le a$를 만족한다고 할 때, a 의 최솟값은?

① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

$x \ge 0$ 일 때,

$0 \le y \le \frac{2}{3}(-x+3)$

$x < 0$ 일 때,

$0 \le y \le 2(x+1)$

$x^2+y^2 \le (\sqrt{a})^2$ 의 영역이 삼각형을 포함하도록 하므로, $\sqrt{a} \ge 3$

따라서 a 의 최솟값은 9