

1. 점 P (3, -4)를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 P' 이라 할 때, 선분 PP' 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

점 P(3, -4) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점

P' 의 좌표는 (3, 4)이므로

$$PP' = \sqrt{(3-3)^2 + (-4-4)^2} = 8$$

2. 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 $(-1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 2 일 때, 상수 a, b, c 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $x^2 + y^2 + ax - by + c = 0$ 이 때, 이 원의 중심이 $(-1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 2 이므로 $x^2 + y^2 + ax - by + c = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$
 $\therefore a = 2, b = -6, c = 6$
따라서, 구하는 a, b, c 의 값의 합은 $2 + (-6) + 6 = 2$

3. 직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 y 절편이 -3 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한
직선의 방정식은 $-y = -2x + k$, 즉 $y = 2x - k$
이 때, 이 직선의 y 절편이 -3 이 되어야 하므로
 $-k = -3$
 $\therefore k = 3$

4. 직선 $ax + by + c = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니 직선 $3x - 4y + 2 = 0$ 과 수직이 되었다. 이 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $\frac{8a}{3b}$ 의 값은?(단, $ab \neq 0$)

① $-\frac{32}{9}$

② -2

③ 2

④ 4

⑤ $\frac{32}{9}$

해설

$y = x$ 대칭시키면 직선은

$$bx + ay + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a},$$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ 과 수직이 되려면,

$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ 가 되어야 한다.

$$\therefore \frac{8a}{3b} = \frac{8}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right) = 2$$

5. 다음은 점 $P(a, b)$ 의 직선 $y = x$ 에 대해 대칭인 점 Q 의 좌표 (x, y) 를 구하는 과정이다.

에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

(1) $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$ 은 직선
위에 있으므로 $\frac{y+b}{2} = \frac{x+a}{2}$
 $\therefore x - y = b - a \cdots \textcircled{1}$
(2) 직선 PQ 는 직선 $y = x$ 에 수직이므로
 $\frac{y-b}{x-a} = \text{$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 x, y 를 구하면
 $x = \text{$, $y = \text{$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

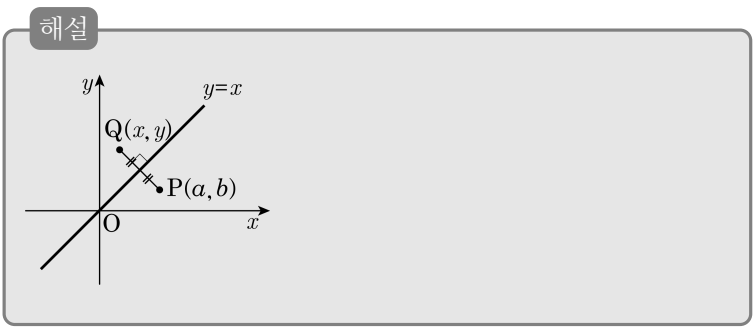
▶ 답 :

▷ 정답 : $y = x$

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : b

▷ 정답 : a



6. 점 A (a, b) 를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점을 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B 라고 하면 두 점 A, B 를 지나는 직선은 x 축에 평행하다. 이때, 선분 AB 의 길이는?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

점 A (a, b) 를 x 축의 방향으로 3 만큼,
 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점을
A' 라고 하면 A' ($a + 3, b + 2$)
다시 점 A' 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한
점 B 는 B ($b + 2, a + 3$)
이때, 직선 AB 가 x 축에 평행하므로
두 점 A, B 의 y 좌표가 서로 같다.
즉, $b = a + 3 \quad \therefore B (a + 5, a + 3)$
따라서, 선분 AB 의 길이는
두 점 A, B 의 y 좌표의 차와 같으므로
 $\overline{AB} = (a + 5) - a = 5$

7. 점 $(-1, 2)$ 를 원점에 대해 대칭 이동시킨 후, 다시 x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 후, $y = x$ 에 대해 대칭이동 시켰더니 $(b, 1)$ 이 되었다. 이 때, 상수 $a + b$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(-1, 2)$ 을 원점대칭이동 $\rightarrow (1, -2)$
 x 축 방향으로 a 만큼 평행이동 $\rightarrow (1+a, -2)$
 x 축에 대해 대칭이동 $\rightarrow (1+a, 2)$
 $y = x$ 에 대해 대칭이동 $\rightarrow (2, 1+a)$
따라서 $b = 2, 1+a = 1, a = 0$ 이므로 $a + b = 2$

8. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 양의 방향으로 -1 , y 축의 양의 방향으로 3 만큼 평행이동하였더니 $y = 2x^2$ 의 그래프와 같을 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

1) x 축 대칭 : y 대신에 $-y$ 를 대입
 $\Rightarrow -y = ax^2 + x + c$
2) x 축으로 -1 , y 축으로 3 이동
 $\Rightarrow -(y - 3) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$
 $\Rightarrow y = -ax^2 - (2a + b)x + 3 - a - b - c$
 $y = 2x^2$ 과 비교한다.
 $\therefore a = -2, b = 4, c = 1$
 $\Rightarrow a + b + c = 3$

9. 포물선 $y = -x^2 - 2x$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 양의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표는?
- ① $(-1, 2)$ ② $(-1, -1)$ ③ $(-1, 1)$
④ $(1, 2)$ ⑤ $(1, 1)$

해설

x 축 대칭은 $y \rightarrow -y$ 를 대입하고, y 축 평행이동은 $y \rightarrow y - 3$ 을 대입하면,
 $y = x^2 + 2x + 3$
 $= (x + 1)^2 + 2$

10. 점 A $(-1, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B , 점 B 를 점 $(0, k)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C 라고 할 때, 삼각형 ABC 의 넓이가 6 이다. 이 때, 모든 실수 k 의 값의 합은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

점 A $(-1, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점 B $(1, 2)$ 이고, 점 C (x, y) 라고 하면 $\overline{BC}$ 의 중점이 $(0, k)$ 이므로

$$\frac{1+x}{2} = 0, \quad \frac{2+y}{2} = k$$

$$\therefore x = -1, \quad y = 2k - 2$$

$$\therefore C(-1, 2k - 2)$$

이 때, 삼각형 ABC 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고

$$\overline{AB} = 1 - (-1) = 2, \quad \overline{AC} = |2k - 4| \text{ 이므로}$$

삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |2k - 4| = |2k - 4|$$

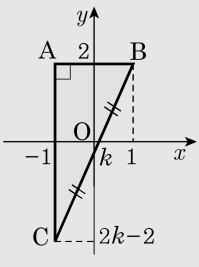
그런데 삼각형 ABC 의 넓이가 6 이므로

$$|2k - 4| = 6$$

$$2k - 4 = 6 \text{ 또는 } 2k - 4 = -6$$

$$\therefore k = 5 \text{ 또는 } k = -1$$

따라서, 모든 실수 k 의 값의 합은 4 이다.



11. 점 $(1, -2)$ 를 지나는 직선을 점 $(2, 3)$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(4, -4)$ 를 지난다고 한다. 처음 직선의 방정식을 구하면?

- ㉠ $y = -4x + 2$ ㉡ $y = 4x + 2$ ㉢ $y = -4x + 4$
㉣ $y = 4x + 4$ ㉤ $y = -4x + 6$

해설

$(1, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을
 $y + 2 = m(x - 1) \cdots \textcircled{1}$ 이라 하면
 $\textcircled{1}$ 식을 점 $(2, 3)$ 에 대칭이동하면 (중점공식이용)
 $x \rightarrow 4 - x \quad y \rightarrow 6 - y$ 이므로
 $6 - y + 2 = m(4 - x - 1), y = m(x - 3) + 8 \cdots \textcircled{2}$
직선 $\textcircled{2}$ 를 x 축에 대칭이동하면
 $-y = m(x - 3) + 8 \cdots \textcircled{3}$
직선 $\textcircled{3}$ 이 점 $(4, -4)$ 를 지나므로
 $4 = m(4 - 3) + 8 \therefore m = -4$
따라서 처음 직선의 방정식 $\textcircled{1}$ 은
 $y + 2 = -4(x - 1), y = -4x + 2$

12. 도형 $y = 2x + 3$ 을 점 $(2, 3)$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $2x - y + 5 = 0$

② $2x + 2y - 5 = 0$

③ $2x + y + 5 = 0$

④ $2x - y - 5 = 0$

⑤ $2x - 2y + 5 = 0$

해설

점 (a, b) 에 대하여 대칭이동하려면

$x \rightarrow 2a - x$, $y \rightarrow 2b - y$ 를 대입하면 된다. $y = 2x + 3$ 위의 점 $(0, 3)$ 과 (a, b) 의 중점 $(2, 3)$

$$\frac{0+a}{2} = 2, \frac{3+b}{2} = 3$$

$$a = 4, b = 3$$

$\therefore y = 2x + 3$ 과 기울기는 동일하며 $(4, 3)$ 지남.

$$\rightarrow y = 2x + b, (4, 3) \rightarrow 3 = 8 + b \rightarrow b = -5$$

$$\therefore y = 2x - 5$$

13. 원 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을 직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 1$

② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

③ $(x-3)^2 + y^2 = 1$

④ $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$

⑤ $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$

해설

원 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을

직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 대칭이동한

원의 중심을 (a,b) 라 하면

두 점 $(-1,2), (a,b)$ 를 이은

선분의 중점 $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ 가

직선 $2x-y-1=0$ 위에 있으므로

$$2 \cdot \frac{a-1}{2} - \frac{b+2}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore 2a - b = 6 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 두 점 $(-1,2), (a,b)$ 를 지나는 직선과

직선 $2x-y-1=0$ 이 수직이므로

$$\frac{b-2}{a+1} \cdot 2 = -1$$

$$\therefore a + 2b = 3 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=0$

따라서, 원 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을

직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 대칭이동한 도형은

중심이 $(3,0)$ 이고, 반지름의 길이가 1 인 원이므로

구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + y^2 = 1$$

14. 직선 $y = 2x + 5$ 를 직선 $y = -1$ 에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

- ① $y = 2x - 19$ ② $y = 8x + 12$ ③ $y = 3x - 1$
④ $y = -4x - 5$ ⑤ $y = -x + 10$

해설

직선 $y = 2x + 5$ 를 직선 $y = -1$ 에 대하여
대칭이동한 도형의 방정식은
 y 대신 $2 \cdot (-1) - y$ 를 대입하면 $-2 - y = 2x + 5$,
즉 $y = -2x - 7$
이것을 다시 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이동한
도형의 방정식은
 x 대신 $2 \cdot 3 - x$ 를 대입하면 $y = -2(6 - x) - 7$
 $\therefore y = 2x - 19$

15. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ 과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ 와 다른 한 원은 서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = 5$ 이다.
원 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ 와 $x^2 + y^2 = 5$ 가 직선 $y = ax + b \cdots \textcircled{1}$ 에 대하여 대칭이므로 직선 $\textcircled{1}$ 은 점 $(-2, 1)$ 과 점 $(0, 0)$ 을 잇는 선분을 수직이등분한다.

따라서 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 은 직선 $\textcircled{1}$ 위에 있고

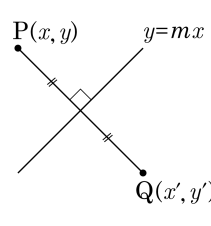
기울기의 곱은 -1 이다.

$$\frac{1}{2} = -a + b, \quad \frac{1}{-2} \times a = -1$$

$$\therefore a = 2, \quad b = \frac{5}{2}$$

$$\text{따라서 } a \times b = 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

16. 다음은 직선 $y = mx$ 에 대한 점 $P(x, y)$ 의 대칭점을 구하는 과정에서 빈칸에 들어갈 수식을 순서대로 고르면?



대칭점을 $Q(x', y')$ 라 하면,
 PQ의 중점이 직선 $y = mx$ 위에 있으므로,
 (가) $= m$ (나),
 또한 직선 PQ와 직선 $y = mx$ 가 직교하므로
 $\frac{y' - y}{x' - x} =$ (다)
 (가), (나), (다)에 의하여
 $x' = \frac{1}{1 + m^2} \{ (1 - m^2)x + 2my \}$
 $y' = \frac{1}{1 + m^2} \{ 2mx - (1 - m^2)y \}$

- ① (가): $y + y'$, (나): $x + x'$, (다): $-\frac{1}{m}$
- ② (가): $\frac{y + y'}{2}$, (나): $\frac{x + x'}{2}$, (다): $-\frac{1}{m}$
- ③ (가): $\frac{y + y'}{2}$, (나): $\frac{x + x'}{2}$, (다): $\frac{1}{m}$
- ④ (가): $\frac{y + y'}{3}$, (나): $\frac{x + x'}{3}$, (다): $\frac{1}{m}$
- ⑤ (가): $\frac{y + y'}{3}$, (나): $\frac{x + x'}{3}$, (다): $\frac{1}{m^2}$

해설

(가), (나) : $P = (x, y)$, $Q = (x', y')$ 이므로
 중점은 $\left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2} \right)$ 이다.
 (다): 두 직선이 직교하면 기울기의 곱이 -1 이다.
 $\Rightarrow m \times (\text{다}) = -1$
 $\therefore (\text{다}) : -\frac{1}{m}$

17. 직선 $y = x + 1$ 에 관해서 점 $A(-2, 3)$ 과 대칭인 점의 좌표를 (x, y) 라 할 때, $x + y$ 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = x + 1$ 에 $A(-2, 3)$ 에 대칭인 점은 A' 이므로 $\overline{AA'}$ 의 중점은 $y = x + 1$ 위의 점이다.

$$\frac{-2+a}{2} + 1 = \frac{3+b}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\overline{AA'}$ 의 기울기와 $y = x + 1$ 의 기울기의 곱이 -1 이므로

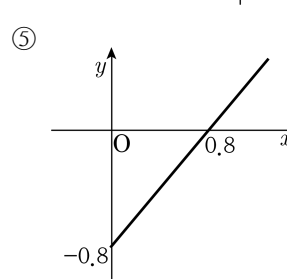
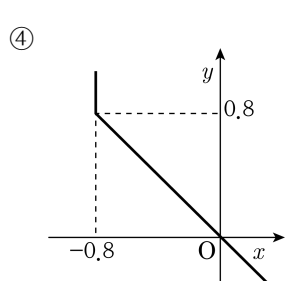
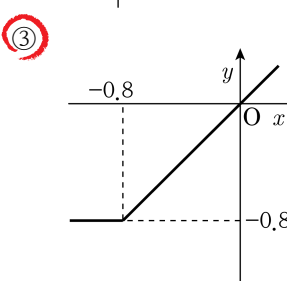
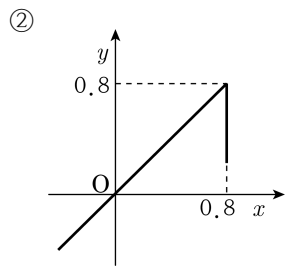
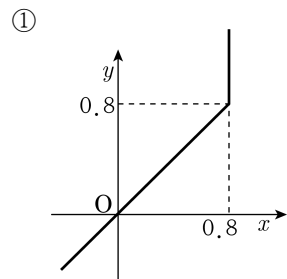
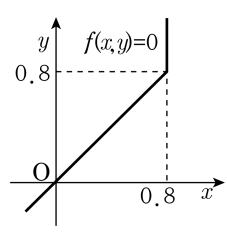
$$\left(\frac{b-3}{a+2}\right) \times 1 = -1$$

$$\therefore b - 3 = -a - 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에 의해 $a = 2, \quad b = -1$

$\therefore (2, -1)$

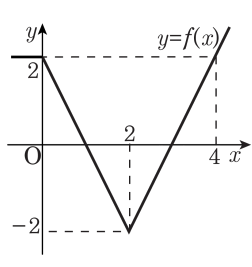
18. 방정식 $f(x,y) = 0$ 이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, $f(-y, -x) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



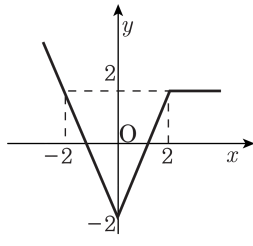
해설

$f(-y, -x) = 0$ 은 $f(x,y) = 0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.
 이때, 꺾인 점 $(0.8, 0.8)$ 은 점 $(-0.8, -0.8)$ 로 옮겨진다.
 따라서, 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ③과 같다.

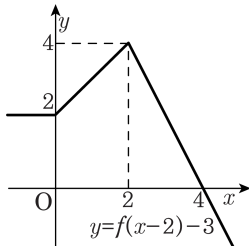
19. 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 그림과 같을 때, $y = f(2-x)$ 가 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



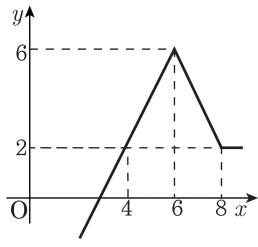
①



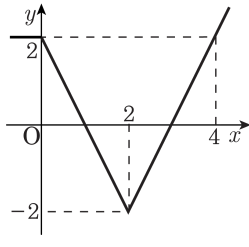
②



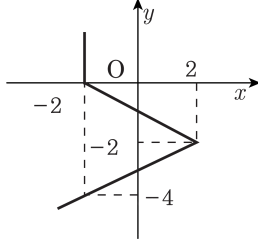
③



④



⑤



해설

$y = f(2-x) \Leftrightarrow y = f(2 \cdot 1 - x)$
 따라서 $y = f(x)$ 의 그래프를 직선 $x = 1$ 에
 대하여 대칭이동한 것이다.
 그러므로 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면
 ① 과 같다.

20. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$
- ② $x^2 + y^2 = 1$
- ③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$
- ④ $(x + 1)^2 + y^2 = 2$
- ⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1인 ②이다.

21. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ ② $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{5}$ ④ $(x + 1)^2 + y^2 = 3$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
 $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$ 에서 $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4인 ⑤이다.

22. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = \frac{1}{5}$

② $x^2 + y^2 = 3$

③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 16$

④ $(x + 1)^2 + y^2 = 4$

⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{3}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면

반지름의 길이가 같아야 한다.

$$x^2 + y^2 + 8x + 8y + 16 = 0 \text{ 에서 } (x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은

반지름의 길이가 4인 ③이다.

23. 다음과 같은 두 연산 장치 $\textcircled{2}$, $\textcircled{4}$ 가 있다.
- 원 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ 가 연산 장치 $\textcircled{2}$ 와 $\textcircled{4}$ 를 연속하여 통과하면서 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 으로 출력되었다. 이때, $a^2 + b^2 + r^2$ 의 값은?
- ① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

원의 중심만 따로 생각한다.

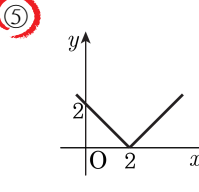
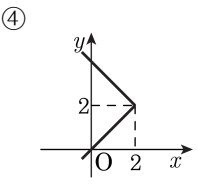
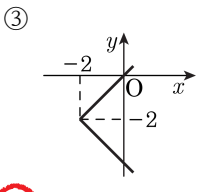
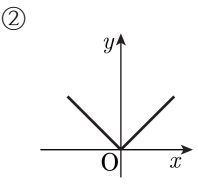
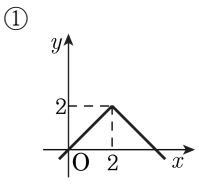
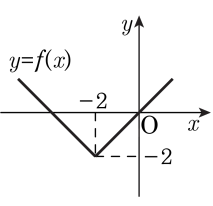
$$(3, 4) \xrightarrow{\textcircled{2}} (3+a, 4+b) \xrightarrow{\textcircled{4}} (-3-a, -4-b)$$

$$\Rightarrow (-3-a, -4-b) = (0, 0)$$

$$\therefore a = -3, \quad b = -4, \quad r = 5$$

$$a^2 + b^2 + r^2 = 50$$

24. 다음 그림은 함수의 그래프이다. 다음 중 $y = f(-x) + 2$ 의 그래프를 나타낸 것은?



해설

$y = f(-x) + 2$ 의 그래프는 주어진 그래프를 y 축에 대칭시킨 후 y 축으로 2만큼 평행 이동 한 것이다.

25. 두 점 A (1,3), B (4,1) 과 x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 A (1,3) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면
A' (1,-3)
이 때, 다음 그림에서
 $\overline{AP} = \overline{A'P}$
또, $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은
 $\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + \{1-(-3)\}^2} = 5$

26. 두 점 A(1, 3), B(4, m) 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 라 하면
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 선분 A'B 의 길이와 같다.
점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 A'(1, -3) 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은
 $\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + (m+3)^2} = 5$
 $(m+3)^2 + 9 = 25, (m+3)^2 = 16$
 $m+3 = \pm 4 \quad \therefore m = 1 \text{ (} \because m > 0 \text{)}$

28. 포물선 $y = x^2 + 3x - 9$ 위의 서로 다른 두 점 A, B 가 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭일 때, 두 점 A, B 사이의 거리는?

- ① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

A 의 좌표를 (a, b) 라 두면

B의 좌표는 (b, a) 가 된다.

두 점은 포물선 위의 점이므로

$a = b^2 + 3b - 9$, $b = a^2 + 3a - 9$ 가

성립한다.

두 식을 변변 빼서 정리하면

$$(a - b)(a + b + 4) = 0$$

$$\therefore a + b + 4 = 0 \quad (\because a \neq b)$$

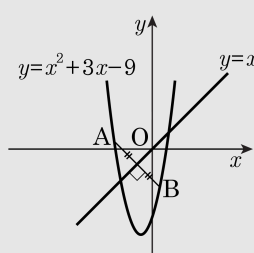
$b = -a - 4$ 를 $b = a^2 + 3a - 9$ 에 대입하면

$$a^2 + 4a - 5 = 0, (a + 5)(a - 1) = 0$$

$a = 1$ 또는 -5 , $b = -5$ 또는 1 이므로

A($-5, 1$), B($1, -5$) 가 된다.

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$



29. 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 는 다음의 조건에 따라 이동한다.

- ㉠ $x > y$ 이면 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동 한다.

㉡ $x \leq y$ 이면 x 축의 방향으로 1 만큼 평행 이동한다.
- 처

음 점 P 의 좌표가 $(1, 0)$ 일 때, 점 P 가 이동을 시작하여 100 번째 도착하는 점의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 65 ② 66 ③ 67 ④ 68 ⑤ 69

해설

조건에 따라 이동시켜보면,
 $(1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1)$
 $\rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 2) \rightarrow \cdots$
 $\therefore 3n - 1$ 번째에 (n, n) 에 도착한다.
 $\Rightarrow (3 \times 33) - 1 = 98$ 번째에 $(33, 33)$ 에 도착한다.
 $\therefore 100$ 번째는 $(33, 34)$
 $\Rightarrow (a, b) = (33, 34)$
 $a + b = 67$

30. 두 직선 $y = 2x$, $y = ax + b$ ($a < 0, b > 0$) 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 옮겨진 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 가 되었다. 이때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선의 방정식 $y = 2x$, $y = ax + b$ 를
연립하여 풀면 $2x = ax + b$, $(a - 2)x = -b$

$$\therefore x = -\frac{b}{a-2} \quad (\because a \neq 2)$$

$$\text{이것을 } y = 2x \text{ 에 대입하면 } y = -\frac{2b}{a-2}$$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는

$$\left(-\frac{b}{a-2}, -\frac{2b}{a-2}\right)$$

따라서, 두 직선 $y = 2x$, $y = ax + b$ 및 y 축으로
둘러싸인 삼각형의 세 꼭지점의 좌표는

$$(0, 0), (0, b), \left(-\frac{b}{a-2}, -\frac{2b}{a-2}\right) \text{ 이므로}$$

이 삼각형의 무게중심을 G 라고 하면

$$G\left(\frac{-\frac{b}{a-2}}{3}, \frac{b - \frac{2b}{a-2}}{3}\right)$$

이때, 점 G 와 대칭이동한 후의

$$\text{삼각형의 무게 중심 } \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ 는}$$

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\left(\frac{-\frac{b}{a-2}}{3}, \frac{b - \frac{2b}{a-2}}{3}\right) \text{ 는 } \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ 과 같다.}$$

$$\therefore -\frac{b}{a-2} = 2 \dots\dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$b - \frac{2b}{a-2} = 10 \dots\dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$b - 2 \cdot (-2) = 10$$

$$\therefore b = 6$$

이것을 ㉠에 대입하면 $a = -1$

$$\therefore a + b = 5$$

31. 곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 $y = -x^2 + x + 6$ 이 점 $P(a, b)$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y = x^2 - 3x \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$y = -x^2 + x + 6 \quad \cdots \textcircled{B} \text{이라고 하자.}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 이 점 $P(a, b)$ 에 대칭이면 두 곡선의 꼭지점의 중점이 점 P 이다.

$$\textcircled{A} : y = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \quad \text{꼭지점} \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

$$\textcircled{B} : y = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 6$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \quad \text{꼭지점} \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

$\therefore$ 중점 $(1, 2)$ 이 점 $P(a, b)$ 이다.

$\therefore a = 1, b = 2$ 이므로 $a + b = 3$

32. 원 $C : x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ 을 직선 $x - y - 8 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C' 이라 하고 두 원 C, C' 위의 점을 각각 P, Q 라 할 때, 선분 PQ 의 길이의 최솟값은?

- ① 1
- ② 3
- ③ $7\sqrt{5} - 12$
- ④ 5
- ⑤ $11\sqrt{2} - 10$

해설

선분 PQ 의 길이가 최소가 되려면
 다음 그림과 같이 두 원의 중심을 연결
 한 선분이

두 원과 각각 만나는 점을 P, Q 로 잡
 으면 된다.

이 때, 원 $C : x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ 을

표준형으로 나타내면

$$(x + 3)^2 + y^2 = 25 \text{ 이므로}$$

이 원의 중심은 $(-3, 0)$ 이고 반지름의 길이는 5 이다.

이 원을 직선 $x - y - 8 = 0$ 에 대하여 대칭이동한

원 C' 의 중심을 (a, b) 라 하면

두 점 $(-3, 0)$ 과 (a, b) 를 이은

선분의 중점 $\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 가

직선 $x - y - 8 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{a-3}{2} - \frac{b}{2} - 8 = 0$$

$$\therefore a - b = 19 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 직선 $x - y - 8 = 0$, 즉 $y = x - 8$ 의 기울기는 1 이고,
 두 원의 중심 $(-3, 0)$, (a, b) 를 연결한 직선과 수직이므로

$$\frac{b}{a+3} = -1$$

$$\therefore a + b = -3 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 8, b = -11$

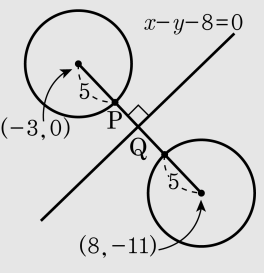
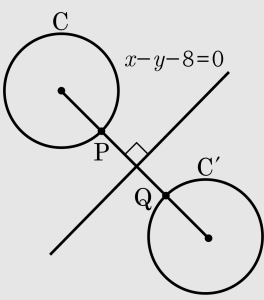
따라서, 두 원의 중심 $(-3, 0), (8, -11)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{\{8 - (-3)\}^2 + \{-11 - 0\}^2} = 11\sqrt{2}$$

이므로 다음 그림에서 선분 PQ 의

길이의 최솟값은

$$11\sqrt{2} - 5 \times 2 = 11\sqrt{2} - 10$$



33. 두 점 A (2, 5), B (7, 0) 과 직선 $x + y = 4$ 위의 한 점 P 에 대하여 $AP + BP$ 의 최솟값과 이때의 점 P 의 좌표를 구하면?

- ① $\sqrt{17}$, P (2, -1)
- ② $2\sqrt{17}$, P (3, 1)
- ③ $3\sqrt{17}$, P (5, 2)
- ④ $4\sqrt{17}$, P (4, 8)
- ⑤ $5\sqrt{17}$, P (1, 2)

해설

점 A (2, 5) 를 직선 $x + y = 4$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $A' (a, b)$ 로 놓으면

선분 AA' 의 중점 $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b+5}{2}\right)$ 는

직선 $x + y = 4$ 위에 있으므로

$$\frac{a+2}{2} + \frac{b+5}{2} = 4$$
$$\therefore a + b = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 직선 AA' 은 $x + y = 4$ 와 수직이므로

$$\frac{b-5}{a-2} \cdot (-1) = -1$$
$$\therefore a - b = -3 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = 2$$
$$\therefore A' (-1, 2)$$

이때, 다음 그림에서

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$$
$$\geq \overline{A'B}$$
$$= \sqrt{(7+1)^2 + (0-2)^2}$$
$$= \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

따라서, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{17}$ 이다.

한편, $\overline{AP} + \overline{BP} = 2\sqrt{17}$ 일 때의

점 P 는 직선 $A'B$ 와 직선 $x + y = 4$ 의 교점이다.

두 점 $A' (-1, 2), B (7, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$y - 0 = \frac{0 - 2}{7 - (-1)} (x - 7),$$
$$y = -\frac{1}{4} (x - 7)$$
$$\therefore x + 4y - 7 = 0$$

두 방정식 $x + 4y - 7 = 0$, $x + y - 4 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = 3, y = 1$$
$$\therefore P (3, 1)$$

따라서, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소일 때의 점 P 의 좌표는 P (3, 1)