1. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항에서 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일 때, a_{15} 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$a_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} - \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$

$= \dfrac{n(n+1)\{n+2-(n-1)\}}{3}$

$= \dfrac{n(n+1)\cdot 3}{3}$

$= n(n+1)$

$\therefore\ a_{15} = 15 \times 16 = 240$

2. 다음 등비수열의 일반항 a_n은?

$16,\ -8,\ 4,\ -2,\cdots\cdots$

① $8(-2)^n$ ② $16(-2)^{n-1}$ ③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16이고 공비가 $-\frac{1}{2}$이므로 $a_n = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$1, 4, 9, 16 \cdots$

① n ② $3n-2$ ③ $2n+1$

④ n^2 ⑤ $(n+1)^2$

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$

$\therefore a_n = n^2$

4. 세 수 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이 세 수의 평균은 8이고 분산이 6일 때, 곱 abc의 값은?

① 360 ② 384 ③ 400 ④ 440 ⑤ 510

해설

세 수 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$a=b-d,\ c=b+d$이므로

$\frac{(b-d)+b+(b+d)}{3}=8$

$\therefore b=8$

$\therefore a=8-d,\ b=8,\ c=8+d$

세 수의 분산이 6이므로

$\frac{(8-d-8)^2+(8-8)^2+(8+d-8)^2}{3}=6$

$\therefore d^2=9,\ d=\pm 3$

$\therefore a=5,\ b=8,\ c=11$ 또는 $a=11,\ b=8,\ c=5$

$\therefore abc=440$

5. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가질 때, 두 수 α, β의 조화중항을 p, q로 나타내면?

① $\frac{q}{p}$ ② $\frac{2q}{p}$ ③ $\frac{q}{2p}$ ④ $\frac{p}{q}$ ⑤ $\frac{2p}{q}$

해설

구하는 조화중항을 k라 하면

$k = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta = p$, $\alpha\times\beta = q$

$\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{2q}{p}$

6. 두 수 $\frac{45}{4}$, $\frac{99}{4}$ 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 $(n+2)$개의 수가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 그 합이 180이다. 이때, n의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

구하는 합을 S_{n+2}라고 하면

$$S_{n+2} = \frac{(n+2)\left(\frac{45}{4}+\frac{99}{4}\right)}{2} = 180$$

$18(n+2) = 180$, $n+2 = 90$ $\therefore n = 8$

7. 어떤 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이 145, 제 11항부터 제 20항까지의 합이 445이다. 이 등차수열의 제 21항부터 제 30항까지의 합은?

① 645 ② 680 ③ 715 ④ 745 ⑤ 780

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하고 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{10}=\dfrac{10(2a+9d)}{2}=145$ ∴ $2a+9d=29\cdots$ ㉠

$S_{20}=\dfrac{20(2a+19d)}{2}=145+445=590$

∴ $2a+19d=59\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d=3$, $a=1$

따라서 제 21항부터 제 30항까지의 합은

$S_{30}-S_{20}=\dfrac{30(2\cdot1+29\cdot3)}{2}-590=745$

8. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_2 = 15,\ a_3 + a_4 = 240$ 일 때, $a_1 + a_4$의 값은?

① 189　② 192　③ 195　④ 198　⑤ 201

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1 + a_2 = a + ar = a(1+r) = 15 \cdots$ ㉠

$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = ar^2(1+r) = 240 \cdots$ ㉡

㉡÷ ㉠을 하면 $r^2 = 16 \quad \therefore\ r = 4(\because\ r > 0)$

이것을 ㉠에 대입하면

$5a = 15 \quad \therefore\ a = 3$

따라서 $a_1 + a_4 = a + ar^3 = a(1+r^3) = 3 \times 65 = 195$

9. 이차방정식 $x^2-6x+2=0$의 서로 다른 두 실근 α, β에 대하여 α, β의 등차중항, 양의 등비중항, 조화중항을 각각 A, G, H라 할 때, A, G, H의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

① $A>G>H$　② $A>H>G$　③ $G>A>H$

④ $H>G>A$　⑤ $H>A>G$

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=2$

따라서

$A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

$G=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{2}$

$H=\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{2\times2}{6}=\dfrac{2}{3}$

따라서 $A>G>H$이다.

10. 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다. 이때, $\dfrac{a_{10}}{a_9}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\log_2 a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$

$= 3n - 1$

$a_n = 2^{3n-1}$

$\dfrac{a_{10}}{a_9}$ 는 공비이므로 8

11. 첫째항부터 제 3항까지의 합이 7, 제 4항부터 제6항까지의 합이 56인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합을 구하면?

① 320　② 419　③ 511　④ 609　⑤ 707

해설

$$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1} = 7$$

$$S_6 - S_3 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} - 7 = 56$$

$$\frac{a(r^6-1)}{r-1} = 63$$

$$\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 7\times(r^3+1) = 63$$

$r^3+1=9,\ r^3=8$

$\therefore\ r=2$

$\frac{a(8-1)}{2-1} = 7$이므로 $a=1$

$$\therefore S_9 = \frac{a(r^9-1)}{r-1} = \frac{1\cdot(2^9-1)}{2-1} = 2^9-1 = 512-1 = 511$$

12. 첫째항이 37, 공차가 -5 인 등차수열이 있다. 첫째항부터 제20항까지 각 항의 절댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 522

해설

주어진 수열의 제 n항이 음수가 된다고 하면

$a_n = 37 + (n-1)\cdot(-5) < 0$

$-5n + 42 < 0,\ n > \frac{42}{5} = 8.4$

$\therefore\ n = 9,\ 10,\ 11, \cdots$

따라서 주어진 수열은 제9항부터 음수가 되고, 이때

$a_8 = -5\cdot 8 + 42 = 2$

$a_9 = -5\cdot 9 + 42 = -3$

$a_{20} = -5\cdot 20 + 42 = -58$

이므로 구하는 합은

$(37 + 32 + 27 + \cdots + 2) + (|-3| + |-8| + |-13| + \cdots + |-58|)$

$= \frac{8(37+2)}{2} + \frac{12(3+58)}{2} = 156 + 366 = 522$

13. 집합 $A = \{x | x = 2^a \cdot 5^b,\ a,\ b$는 10 이하의 음이 아닌 정수$\}$의 모든 원소의 합은?

① $(2^{10}-1)(5^{10}-1)$　② $(2^{11}-1)(5^{11}-1)$

③ $\frac{1}{2}(2^{10}-1)(5^{10}-1)$　④ $\frac{1}{2}(2^{11}-1)(5^{11}-1)$

⑤ $\frac{1}{4}(2^{11}-1)(5^{11}-1)$

해설

집합 A의 원소는 $2^a \times 5^b$의 꼴로 표현되고, a, b는 10이하의 음이 아닌 정수이므로 집합 A의 모든 원소의 합은 $2^{10} \times 5^{10}$의 양의 약수의 총합과 같다.

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$$(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{10})(1+5+5^2+5^3+\cdots+5^{10})$$

$$= \frac{1\cdot(2^{11}-1)}{2-1} \times \frac{1\cdot(5^{11}-1)}{5-1}$$

$$= \frac{1}{4}(2^{11}-1)(5^{11}-1)$$

14. 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수로 이루어진 수열의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① 2250　② 2500　③ 2750　④ 3000　⑤ 3250

해설

4로 나눈 나머지가 3인 자연수는 $4l-1$(단, $l \ge 0$인 정수) 의 꼴이고,
6으로 나눈 나머지가 5인 자연수는 $6m-1$(단, $m \ge 0$인 정수) 의 꼴이다.
따라서, 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수를 x라고 하면
$x = 4l-1 = 6m-1$을 만족해야 하므로 $x+1 = 4l = 6m$
즉, $x+1 = 12n$, 즉, $x = 12n-1$($n \ge 1$ 인 정수)
따라서 조건을 만족하는 수열은 $11,\ 23,\ 35, \cdots$ 로 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이므로 첫째항부터 제 20항까지의 합은

$$\frac{20(2\cdot 11 + 19\cdot 12)}{2} = 2500$$