

1. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항에서 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일 때, a_{15} 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\{n+2-(n-1)\}}{3}$$

$$= \frac{n(n+1) \cdot 3}{3}$$

$$= n(n+1)$$

$$\therefore a_{15} = 15 \times 16 = 240$$

2. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

$$16, -8, 4, -2, \dots$$

① $8(-2)^n$

② $16(-2)^{n-1}$

③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16 이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $a_n =$

$$16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

3. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

1, 4, 9, 16...

① n

② $3n - 2$

③ $2n + 1$

④ n^2

⑤ $(n + 1)^2$

해설

$$a_1 = 1, a_2 = 4 = 2^2, a_3 = 9 = 3^2, a_4 = 16 = 4^2, \dots$$

$$\therefore a_n = n^2$$

4. 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이 세 수의 평균은 8이고 분산이 6일 때, 곱 abc 의 값은?

① 360

② 384

③ 400

④ 440

⑤ 510

해설

세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d 라 하면

$$a = b - d, c = b + d \text{ 이므로}$$

$$\frac{(b-d) + b + (b+d)}{3} = 8$$

$$\therefore b = 8$$

$$\therefore a = 8 - d, b = 8, c = 8 + d$$

세 수의 분산이 6이므로

$$\frac{(8-d-8)^2 + (8-8)^2 + (8+d-8)^2}{3} = 6$$

$$\therefore d^2 = 9, d = \pm 3$$

$$\therefore a = 5, b = 8, c = 11 \text{ 또는 } a = 11, b = 8, c = 5$$

$$\therefore abc = 440$$

5. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 이 서로 다른 두 실근 α, β 를 가질 때, 두 수 α, β 의 조화중항을 p, q 로 나타내면?

① $\frac{q}{p}$

② $\frac{2q}{p}$

③ $\frac{q}{2p}$

④ $\frac{p}{q}$

⑤ $\frac{2p}{q}$

해설

구하는 조화중항을 k 라 하면

$$k = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = p, \alpha \times \beta = q$

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{2q}{p}$$

6. 두 수 $\frac{45}{4}$, $\frac{99}{4}$ 사이에 n 개의 수를 넣어서 만든 $(n+2)$ 개의 수가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 그 합이 180이다. 이때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

구하는 합을 S_{n+2} 라고 하면

$$S_{n+2} = \frac{(n+2) \left(\frac{45}{4} + \frac{99}{4} \right)}{2} = 180$$

$$18(n+2) = 180, \quad n+2 = 90 \quad \therefore n = 8$$

7. 어떤 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이 145, 제 11항부터 제 20항까지의 합이 445이다. 이 등차수열의 제 21항부터 제 30항까지의 합은?

① 645

② 680

③ 715

④ 745

⑤ 780

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하고 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 145 \quad \therefore 2a + 9d = 29 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{20} = \frac{20(2a + 19d)}{2} = 145 + 445 = 590$$

$$\therefore 2a + 19d = 59 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d = 3$, $a = 1$

따라서 제 21항부터 제 30항까지의 합은

$$S_{30} - S_{20} = \frac{30(2 \cdot 1 + 29 \cdot 3)}{2} - 590 = 745$$

8. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_2 = 15$, $a_3 + a_4 = 240$ 일 때, $a_1 + a_4$ 의 값은?

① 189

② 192

③ 195

④ 198

⑤ 201

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 = a + ar = a(1 + r) = 15 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = ar^2(1 + r) = 240 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } r^2 = 16 \quad \therefore r = 4 (\because r > 0)$$

이것을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$5a = 15 \quad \therefore a = 3$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_4 = a + ar^3 = a(1 + r^3) = 3 \times 65 = 195$$

9. 이차방정식 $x^2 - 6x + 2 = 0$ 의 서로 다른 두 실근 α, β 에 대하여 α, β 의 등차중항, 양의 등비중항, 조화중항을 각각 A, G, H 라 할 때, A, G, H 의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

① $A > G > H$

② $A > H > G$

③ $G > A > H$

④ $H > G > A$

⑤ $H > A > G$

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 2$$

따라서

$$A = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$G = \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{2}$$

$$H = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{2 \times 2}{6} = \frac{2}{3}$$

따라서 $A > G > H$ 이다.

10. 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열을 이룬다. 이때, $\frac{a_{10}}{a_9}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= 2 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 3n - 1\end{aligned}$$

$$a_n = 2^{3n-1}$$

$\frac{a_{10}}{a_9}$ 는 공비이므로 8

11. 첫째항부터 제 3항까지의 합이 7, 제 4항부터 제6항까지의 합이 56인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합을 구하면?

① 320

② 419

③ 511

④ 609

⑤ 707

해설

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 7$$

$$S_6 - S_3 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} - 7 = 56$$

$$\frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = 63$$

$$\frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 7 \times (r^3 + 1) = 63$$

$$r^3 + 1 = 9, r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2$$

$$\frac{a(8 - 1)}{2 - 1} = 7 \text{ 이므로 } a = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore S_9 &= \frac{a(r^9 - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^9 - 1 = 512 - 1 \\ &= 511\end{aligned}$$

12. 첫째항이 37, 공차가 -5인 등차수열이 있다. 첫째항부터 제20항까지 각 항의 절댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 522

해설

주어진 수열의 제 n 항이 음수가 된다고 하면

$$a_n = 37 + (n-1) \cdot (-5) < 0$$

$$-5n + 42 < 0, n > \frac{42}{5} = 8.4$$

$$\therefore n = 9, 10, 11, \dots$$

따라서 주어진 수열은 제9항부터 음수가 되고, 이때

$$a_8 = -5 \cdot 8 + 42 = 2$$

$$a_9 = -5 \cdot 9 + 42 = -3$$

$$a_{20} = -5 \cdot 20 + 42 = -58$$

이므로 구하는 합은

$$\begin{aligned} & (37 + 32 + 27 + \dots + 2) + (|-3| + |-8| + |-13| + \dots + |-58|) \\ &= \frac{8(37+2)}{2} + \frac{12(3+58)}{2} = 156 + 366 = 522 \end{aligned}$$

13. 집합 $A = \{x | x = 2^a \cdot 5^b, a, b \text{는 } 10 \text{ 이하의 음이 아닌 정수}\}$ 의 모든 원소의 합은?

① $(2^{10} - 1)(5^{10} - 1)$

② $(2^{11} - 1)(5^{11} - 1)$

③ $\frac{1}{2}(2^{10} - 1)(5^{10} - 1)$

④ $\frac{1}{2}(2^{11} - 1)(5^{11} - 1)$

⑤ $\frac{1}{4}(2^{11} - 1)(5^{11} - 1)$

해설

집합 A 의 원소는 $2^a \times 5^b$ 의 꼴로 표현되고, a, b 는 10이하의 음이 아닌 정수이므로 집합 A 의 모든 원소의 합은 $2^{10} \times 5^{10}$ 의 양의 약수의 총합과 같다.

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10})(1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{10})$$

$$= \frac{1 \cdot (2^{11} - 1)}{2 - 1} \times \frac{1 \cdot (5^{11} - 1)}{5 - 1}$$

$$= \frac{1}{4}(2^{11} - 1)(5^{11} - 1)$$

14. 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수로 이루어진 수열의 첫째항부터 제 20 항까지의 합은?

① 2250

② 2500

③ 2750

④ 3000

⑤ 3250

해설

4로 나눈 나머지가 3인 자연수는 $4l - 1$ (단, $l \geq 0$ 인 정수)의 꼴이고,

6으로 나눈 나머지가 5인 자연수는 $6m - 1$ (단, $m \geq 0$ 인 정수)의 꼴이다.

따라서, 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수를 x 라고 하면

$$x = 4l - 1 = 6m - 1 \text{ 을 만족해야 하므로 } x + 1 = 4l = 6m$$

즉, $x + 1 = 12n$, 즉, $x = 12n - 1$ ($n \geq 1$ 인 정수)

따라서 조건을 만족하는 수열은 11, 23, 35, ...로 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이므로 첫째항부터 제 20 항까지의 합은

$$\frac{20(2 \cdot 11 + 19 \cdot 12)}{2} = 2500$$