

1. 등차수열 $11, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 213$ 에서 공차는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$b_1 = 2, b_2 = a_1, b_3 = a_2, \dots, b_{101} = a_{100},$$

$$b_{102} = 213$$

$$b_{102} = 213 = 11 + (102 - 1) \cdot d$$

$$101d = 202$$

$$d = 2$$

2. 조화수열 12, 6, 4, 3, ...의 일반항은?

- ① $\frac{12}{n}$ ② $\frac{8}{n}$ ③ $\frac{6}{n}$ ④ $\frac{3}{n}$ ⑤ $\frac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots$$

$$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \dots$$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $\frac{n}{12}$

$$\therefore a_n = \frac{12}{n}$$

3. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$ 일 때, S_{10} 의 값은?

① 64 ② 80 ③ 92 ④ 100 ⑤ 120

해설

$$S_5 = \frac{5(2a + 4d)}{2} = 25 \text{ 에서 } a + 2d = 5 \cdots \textcircled{1}$$

$$S_7 = \frac{7(2a + 6d)}{2} = 49 \text{ 에서 } a + 3d = 7 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$d = 2, a = 1$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

4. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n$ 일 때, a_{100} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

5. 다음 보기의 수열 중 등비수열인 것은?

보기

㉠ $\{2n + 1\}$

㉡ $\{n^2\}$

㉢ $\{3^{n+1}\}$

㉣ $\{5 \cdot 3^{n-2}\}$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

등비수열은 ar^{n-1} 의 꼴로 나타낼 수 있는 수열이므로

㉢ $3^{n+1} = 3^2 \cdot 3^{n-1}$
첫째항 = 3^2 , 공비 = 3

㉣ $5 \cdot 3^{n-2} = \frac{5}{3} \cdot 3^{n-1}$
첫째항 = $\frac{5}{3}$, 공비 = 3

6. 세 수 $x-4$, x , $x+8$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

x 가 $x-4$, x , $x+8$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = (x-4)(x+8), \quad x^2 = x^2 + 4x - 32$$

$$4x = 32 \therefore x = 8$$

7. $\sum_{k=1}^n a_k = A$, $\sum_{k=1}^n b_k = B$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = A + B$

② $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = A - B$

③ $\sum_{k=1}^n ca_k = cA$ (단, c 는 상수)

④ $\sum_{k=2}^{n+1} b_{k-1} = B - 1$

⑤ $\sum_{k=1}^n (a_k + c) = A + cn$ (단, c 는 상수)

해설

$\sum_{k=2}^{n+1} b_{k-1} = \sum_{k=1}^n b_k = B$
따라서, ④가 옳지 않다.

8. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

- ① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \sum_{j=1}^{10} j) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) = 385 \end{aligned}$$

9. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

- ① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \cdot \sum_{j=1}^{10} j) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) \\ &= 385 \end{aligned}$$

10. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n - 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -3 인 등차수열이므로

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 5$$

$$\therefore a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$$

11. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 2a_n$$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2 인 등비수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-2} \end{aligned}$$

12. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - n \text{ 이므로 } a_2 = a_1^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = a_3^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$$

13. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① -3 은 -27 의 세제곱근이다.
- ② 81 의 네제곱근은 $3, -3, 3i, -3i$ 이다.
- ③ $-\sqrt[4]{81} = -3$
- ④ $\sqrt{-16} = -2$
- ⑤ $\sqrt[3]{-64} = -4$

해설

- ④ $(-2)^4 = 16$ 이므로 $\sqrt{-16} = \pm 2$

14. $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 2^p \cdot 3^q$ 일 때, $p + q$ 의 값은?

① $\frac{5}{3}$

② $\frac{7}{3}$

③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{10}{3}$

⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \\ &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3} \\ &= 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \\ &= \left(3 + 2 + \frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3} \\ &= \frac{16}{3}\sqrt[3]{3} = 2^4 \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \\ &\therefore p = 4, \quad q = -\frac{2}{3} \quad \therefore p + q = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

15. 실수 a, b, c, d 에 대하여 $2^a = c, 2^b = d$ 일 때, 4^{a+b} 와 같은 것은?

- ① $\frac{1}{cd}$ ② $\frac{1}{2cd}$ ③ $\frac{1}{c^2d}$ ④ cd ⑤ c^2d^2

해설

$$4^{a+b} = (2^2)^{a+b} = 2^{2a} \cdot 2^{2b} = (2^a)^2 \cdot (2^b)^2 = c^2d^2$$

16. 첫째항이 -10 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제7항까지의 합과 제7항이 같을 때 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$$a_1 = -10, a_7 = -10 + 6d$$

$$S_7 = \frac{7\{2 \cdot (-10) + 6d\}}{2}, a_7 = S_7 \text{에서 } d = 4$$

$$S_{10} = \frac{10\{2 \cdot (-10) + 9 \cdot 4\}}{2} = 80$$

17. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$$\begin{aligned} S &= (3\text{의 배수의 총합}) + (5\text{의 배수의 총합}) - (15\text{의 배수의 총합}) \\ &= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195) \\ &= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} \\ &\quad - \frac{7(105 + 195)}{2} \\ &= 47 \cdot 150 \\ \therefore \frac{1}{150} S &= 47 \end{aligned}$$

18. 공비가 $-\sqrt{6}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -20$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8$ 의 값은?

① -740 ② -720 ③ -700 ④ -680 ⑤ -660

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $-\sqrt{6}$ 인 등비수열이므로 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a + ar + ar^2 + ar^3 = -20$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = ar^4 + ar^5 + ar^6 + ar^7$$

$$= r^4(a + ar + ar^2 + ar^3)$$

$$= 36 \cdot (-20) = 720$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 = -20 + (-720) = -740$$

19. 수열 8, 4, 2, $\frac{1}{2}, \dots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11 항

② 제12 항

③ 제13 항

④ 제14 항

⑤ 제15 항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$$

20. 수열 $\{a_n\}$ 이 1, 3, 7, 15, 31, $\dots$ 일 때, 계차수열 $\{b_n\}$ 의 일반항이 $b_n = \alpha^n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = \beta^n + \gamma$ 이다. 이때, 실수 α, β, γ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\{a_n\} : 1, 3, 7, 15, 31, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc} & \vee & \vee & \vee & \vee & & \\ & 2 & 4 & 8 & 16 & \dots & \rightarrow b_n = 2^n \end{array}$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$\alpha = 2, \beta = 2, \gamma = -1$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3$$

21. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots \textcircled{1} \\ 2S &= 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이므로 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$

22. 수열 $1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ 의 제125항은?

- ① $\frac{15}{16}$
- ② $\frac{7}{8}$
- ③ $\frac{13}{16}$
- ④ $\frac{3}{4}$
- ⑤ $\frac{11}{16}$

해설

이 수열을 다음과 변형해서 분모가 같은 것까지 묶으면 군수열이 만들어진다.

(1), $\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}\right), \dots$

따라서 제 n 군까지의 항수는

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이고,

$\frac{15 \times 16}{2} = 120$ 이므로

제125항은 제16군의 5번째 항이 된다.

제16군은

$\left(\frac{16}{16}, \frac{15}{16}, \frac{14}{16}, \frac{13}{16}, \frac{12}{16}, \frac{11}{16}, \dots, \frac{1}{16}\right)$ 이므로

제125항은 5번째 항인 $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ 이다.

23. 다음은 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$$a_{n+1} - \boxed{\text{가}} = \frac{1}{2}(a_n - \boxed{\text{가}})$$

$$a_n = \boxed{\text{가}} + (a_1 - \boxed{\text{가}})(\boxed{\text{나}})^{n-1}$$

- ① $1, \frac{1}{2}$

② $1, 2$

③ $2, \frac{1}{2}$

④ $2, 2$

⑤ $3, \frac{1}{2}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \text{에서}$$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

이때, 수열 $\{a_n - 2\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2 + (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \text{(가)} = 2, \text{(나)} = \frac{1}{2}$$

24. $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$ 일 때, $\frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{6}{5}$

⑤ $\frac{7}{6}$

해설

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2 \text{ 에서 } a^x + a^{-x} = 2(a^x - a^{-x}) \text{ 이므로}$$

$$a^x = 3a^{-x} \quad \therefore a^{2x} = 3$$

$$\therefore \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

25. 세 자연수 a, b, c 의 최대공약수가 3이고, 등식 $2^a \cdot 5^b = 400^c$ 을 만족할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$400 = 2^4 \cdot 5^2$ 이므로

$$2^a \cdot 5^b = 400^c = (2^4 \cdot 5^2)^c = 2^{4c} \cdot 5^{2c}$$

따라서, $a = 4c, b = 2c$

a, b, c 의 최대공약수가 3이므로

$$c = 3, a = 12, b = 6$$

$$\therefore a + b + c = 12 + 6 + 3 = 21$$