1. 등차수열 11, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{100}, 213에서 공차는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$b_1 = 2,\ b_2 = a_1,\ b_3 = a_2,\ \cdots ,\ b_{101} = a_{100},$

$b_{102} = 213$

$b_{102} = 213 = 11 + (102 - 1) \cdot d$

$101d = 202$

$d = 2$

2. 조화수열 12, 6, 4, 3, $\cdots$ 의 일반항은?

① $\frac{12}{n}$ ② $\frac{8}{n}$ ③ $\frac{6}{n}$ ④ $\frac{3}{n}$ ⑤ $\frac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이다.

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \cdots$$

$$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \cdots$$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은 $\frac{n}{12}$

$$\therefore \ a_n = \frac{12}{n}$$

3. 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$일 때, S_{10}의 값은?

① 64 ② 80 ③ 92 ④ 100 ⑤ 120

해설

$$S_5 = \frac{5(2a+4d)}{2} = 25 \text{에서 } a+2d=5 \cdots ㉠$$

$$S_7 = \frac{7(2a+6d)}{2} = 49 \text{에서 } a+3d=7 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$d=2,\ a=1$

$$\therefore\ S_{10} = \frac{10(2\cdot 1 + 9\cdot 2)}{2} = 100$$

4. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 196

해설

$$
\begin{aligned}
a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\
&= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\
&= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\
&= 199 - 3 \\
&= 196
\end{aligned}
$$

5. 다음 보기의 수열 중 등비수열인 것은?

보기

ㄱ $\{2n+1\}$

ㄴ $\{n^2\}$

ㄷ $\{3^{n+1}\}$

ㄹ $\{5 \cdot 3^{n-2}\}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

해설

등비수열은 ar^{n-1} 의 꼴로
나타낼 수 있는 수열이므로

ㄷ $3^{n+1} = 3^2 \cdot 3^{n-1}$

첫째항 $= 3^2$, 공비$= 3$

ㄹ $5 \cdot 3^{n-2} = \dfrac{5}{3} \cdot 3^{n-1}$

첫째항$= \dfrac{5}{3}$, 공비$= 3$

6. 세 수 $x-4$, x, $x+8$이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

x가 $x-4$, x, $x+8$의 등비중항이므로

$x^2=(x-4)(x+8)$, $x^2=x^2+4x-32$

$4x=32$ $\therefore x=8$

7. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \mathrm{A}$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = \mathrm{B}$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \mathrm{A} + \mathrm{B}$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \mathrm{A} - \mathrm{B}$

③ $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\mathrm{A}$(단, c는 상수)

④ $\sum_{k=2}^{n+1} b_{k-1} = \mathrm{B} - 1$

⑤ $\sum_{k=1}^{n}(a_k + c) = \mathrm{A} + cn$(단, c는 상수)

해설

$\sum_{k=2}^{n+1} b_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} b_k = \mathrm{B}$
따라서 , ④가 옳지 않다.

8. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385　　② 550　　③ 1100　　④ 1150　　⑤ 1200

해설

$$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7i}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\sum_{j=1}^{10}j\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(385+385)=385$$

9. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$= \sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\dfrac{j(j+1)}{2}\right\}$

$= \sum_{j=1}^{10}\left(\dfrac{j^2+7j}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7\cdot\sum_{j=1}^{10} j\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10\cdot 11\cdot 12}{6}+7\times\dfrac{10\cdot 11}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}(385+385)$

$= 385$

10. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 -3인 등차수열이므로

$a_n = 2 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 5$

$\therefore\ a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$

11. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$

a_n은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

12. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26　② 31　③ 36　④ 46　⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$

$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$

$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

13. 다음 중 옳지 않은 것은?

① -3은 -27의 세제곱근이다.

② 81의 네제곱근은 $3, -3, 3i, -3i$이다.

③ $-\sqrt[4]{81} = -3$

④ $\sqrt[4]{-16} = -2$

⑤ $\sqrt[3]{-64} = -4$

해설

④ $(-2)^4 = 16$ 이므로 $\sqrt[4]{-16} = \pm - 2$

14. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=2^p\cdot3^q$ 일 때, $p+q$의 값은?

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$$\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

$$=\sqrt[3]{3^3\cdot3}+\sqrt[3]{2^3\cdot3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot3}$$

$$=3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$$

$$=\left(3+2+\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3}$$

$$=\frac{16}{3}\sqrt[3]{3}=2^4\cdot3^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore p=4,\ q=-\frac{2}{3}\qquad\therefore p+q=\frac{10}{3}$$

15. 실수 a, b, c, d에 대하여 $2^a = c$, $2^b = d$일 때, 4^{a+b}와 같은 것은?

① $\dfrac{1}{cd}$ ② $\dfrac{1}{2cd}$ ③ $\dfrac{1}{c^2d}$ ④ cd ⑤ c^2d^2

해설

$$4^{a+b} = (2^2)^{a+b} = 2^{2a} \cdot 2^{2b} = (2^a)^2 \cdot (2^b)^2 = c^2d^2$$

16. 첫째항이 -10인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제7항까지의 합과 제7항이 같을 때 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$a_1 = -10,\ a_7 = -10 + 6d$

$S_7 = \dfrac{7\left\{2 \cdot (-10) + 6d\right\}}{2},\ a_7 = S_7$에서 $d = 4$

$S_{10} = \dfrac{10\left\{2 \cdot (-10) + 9 \cdot 4\right\}}{2} = 80$

17. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5 의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

S = (3의 배수의 총합)+(5의 배수의 총합)−(15의 배수의 총합)

$= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195)$

$= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} - \frac{7(105 + 195)}{2}$

$= 47 \cdot 150$

$\therefore \frac{1}{150}S = 47$

18. 공비가 $-\sqrt{6}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -20$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8$ 의 값은?

① -740 ② -720 ③ -700 ④ -680 ⑤ -660

해설

수열 $\{a_n\}$은 공비가 $-\sqrt{6}$ 인 등비수열이므로 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a + ar + ar^2 + ar^3 = -20$

$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = ar^4 + ar^5 + ar^6 + ar^7$

$= r^4(a + ar + ar^2 + ar^3)$

$= 36 \cdot (-20) = 720$

따라서 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 = -20 + (-720) = -740$

19. 수열 8, 4, 2, $\frac{1}{2}, \cdots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11항　② 제12항　③ 제13항

④ 제14항　⑤ 제15항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$

20. 수열 $\{a_n\}$이 $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$ 일 때, 계차수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n = \alpha^n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = \beta^n + \gamma$이다. 이때, 실수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$

$\vee\ \ \vee\ \ \vee\ \ \vee$

$2\ \ 4\ \ 8\ \ 16\ \ \cdots \rightarrow b_n = 2^n$

$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

$= 1 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$

$\alpha = 2,\ \beta = 2,\ \gamma = -1$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3$

21. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots$ ㉠

$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots$ ㉡

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$

22. 수열 $1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\cdots$ 의 제125항은?

① $\frac{15}{16}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ $\frac{13}{16}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

해설

이 수열을 다음과 변형해서 분모가 같은 것까지 묶으면 군수열이 만들어진다.

$$(1),\quad \left(\frac{2}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{4}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4}\right),\cdots$$

따라서 제n군까지의 항수는

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이고,

$\frac{15\times 16}{2} = 120$ 이므로

제125항은 제16군의 5번째 항이 된다.

제16군은

$\left(\frac{16}{16},\ \frac{15}{16},\ \frac{14}{16},\ \frac{13}{16},\ \frac{12}{16},\ \frac{11}{16},\cdots,\ \frac{1}{16}\right)$ 이므로

제125항은 5번째 항인 $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ 이다.

23. 다음은 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$a_{n+1} - \boxed{(가)} = \frac{1}{2}(a_n - \boxed{(가)})$ 이므로
$a_n = \boxed{(가)} + (a_1 - \boxed{(가)})(\boxed{(나)})^{n-1}$

① $1,\ \frac{1}{2}$ ② $1,\ 2$ ③ $2,\ \frac{1}{2}$ ④ $2,\ 2$ ⑤ $3,\ \frac{1}{2}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ 에서

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

이때, 수열 $\{a_n - 2\}$은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n = 2 + (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\therefore$ (가) $= 2$, (나) $= \frac{1}{2}$

24. $\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$일 때, $\dfrac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$의 값은?(단, $a > 0$)

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{5}{4}$ ④ $\dfrac{6}{5}$ ⑤ $\dfrac{7}{6}$

해설

$\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$에서 $a^x + a^{-x} = 2(a^x - a^{-x})$이므로

$a^x = 3a^{-x} \quad \therefore\ a^{2x} = 3$

$$\therefore\ \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{3 + \dfrac{1}{3}}{3 - \dfrac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

25. 세 자연수 $a,\ b,\ c$의 최대공약수가 3이고, 등식 $2^a \cdot 5^b = 400^c$을 만족할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$400 = 2^4 \cdot 5^2$이므로

$2^a \cdot 5^b = 400^c = (2^4 \cdot 5^2)^c = 2^{4c} \cdot 5^{2c}$

따라서, $a = 4c,\ b = 2c$

$a,\ b,\ c$의 최대공약수가 3이므로

$c = 3,\ a = 12,\ b = 6$

$\therefore a+b+c = 12+6+3 = 21$