1. 다음 (   ) 안에 알맞은 것은?

$\frac{3}{2}i,\ \frac{5}{4}i,\ (\quad),\ \frac{9}{8}i,\ \frac{11}{10}i,\ \cdots$

① $\frac{5}{4}i$ ② i ③ $\frac{7}{6}i$ ④ $\frac{8}{6}i$ ⑤ $\frac{6}{7}i$

해설

나열된 복소수의 분모의 수열을 a_n이라 하면 $a_n = 2n$
분자의 수열을 b_n이라 하면 $b_n = (2n+1)i$이다.
따라서 구하는 세 번째 복소수는 $\frac{7}{6}i$이다.

2. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots$

① $(-1)^{n+1}\times n$ ② $n-(-1)^n$ ③ $(-1)^n+n$
④ $(-1)^n\times n$ ⑤ $\frac{1}{2}\{1-(-1)^n\}$

해설

$a_1=-1\cdot 1$
$a_2=(-1)^2\cdot 2$
$a_3=(-1)^3\cdot 3$
$a_4=(-1)^4\cdot 4$이므로
$a_n=(-1)^n\cdot n$

3. 다음 중 옳은 것은?

① $1+4+7+\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n}(3k-5)$

② $2+4+6+\cdots+2(n+1)=\sum_{k=1}^{n}2(k+1)$

③ $3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

④ $4+5+6+\cdots+(n+3)=\sum_{k=1}^{n}(k+3)$

⑤ $3+4+5+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$

해설

① $1+4+7+\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$
② $2+4+6+\cdots+2(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}2n$
③ $3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$
⑤ $3+4+5+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n-2}(k+2)$

4. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \left\{ \sum_{k=1}^{n} (2a_k - 3b_k + 5) \right\}$ 의 값은?

① 250 ② 300 ③ 450 ④ 550 ⑤ 650

해설

$$\sum_{n=1}^{10} \left\{ 2\sum_{k=1}^{n} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} 5 \right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{10} (2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n)$$
$$= \sum_{n=1}^{10} (20n - 15n + 5n)$$
$$= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}$$
$$= 550$$

5. $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

6. 양의 실수 a에 대하여 $\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}}$ 의 값은?(단, $a \neq 1$)

① $\sqrt[10]{a}$　② $\dfrac{1}{\sqrt[10]{a}}$　③ 1　④ $\dfrac{1}{\sqrt[15]{a}}$　⑤ $\sqrt[10]{a}$

해설

$$\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[10]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[15]{a}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a}}$$

7. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$을 간단히 하면 $a^{\frac{n}{m}}$이다. 이때, $m-n$의 값을 구하여라. (단, m, n은 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}$

$= \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}}$

$= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}}$

$n = 7,\ m = 8$

$8 - 7 = 1$

8. 다음 중 계산 결과가 다른 하나는?

① $(-100)^0$　　② $a^2 \times a \div a^3$

③ $\dfrac{3^3 \div 3^2}{3}$　　④ $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{a^{2\sqrt{3}}}$

⑤ $a^{\sqrt{2}} \times \dfrac{a^3}{a^{3\sqrt{2}}}$

해설

① $(-100)^0 = 1$

② $a^2 \times a \div a^3 = a^{2+1-3} = a^0 = 1$

③ $\dfrac{3^3 \div 3^2}{3} = \dfrac{3^{3-2}}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

④ $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{a^{2\sqrt{3}}}$
$= a^{-\sqrt{3}} \times a^{3\sqrt{3}} \times a^{-2\sqrt{3}}$
$= a^{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = a^0 = 1$

⑤ $a^{\sqrt{2}} \times \dfrac{a^3}{a^{3\sqrt{2}}} = a^{\sqrt{2}} \times a^3 \div a^{3\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}} = a^{3-2\sqrt{2}}$

9. $(3-\sqrt{2})^{-1}\times(11+6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}=a$일 때, $\dfrac{1}{a}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$a=\frac{1}{3-\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{18}}}$$
$$=\frac{1}{(3-\sqrt{2})\times(3+\sqrt{2})}=\frac{1}{7}$$
$$\therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{7}$$

10. $5^{\log_5 2+3\log_5 3-\log_5 6}$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$5^{\log_5 2+3\log_5 3-\log_5 6}$

$= 5^{\log_5 2+\log_5 3^3-\log_5 6}$

$= 5^{\log_5 \frac{2\times3^3}{6}} = 5^{\log_5 3^2} = 9$

11. 표의 빈칸에 6개의 자연수를 하나씩 써 넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈칸에 써 넣을 6개의 수의 합을 구하여라.

3		7
	11	

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

3	5	7
6	8	10
9	11	13

$\therefore 5+6+8+10+9+13=51$

12. -3과 11사이에 n개의 수를 나열한 수열 $-3,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,a_n,\ 11$이 등차수열을 이루고 그 합이 32일 때 공차 d와 항수 n을 구하면?

① $d=2,\ n=4$ ② $d=2,\ n=5$ ③ $d=2,\ n=6$

④ $d=3,\ n=4$ ⑤ $d=3,\ n=6$

해설

$b_1=-3,\ b_2=a_1,\ \cdots,b_{n+2}=11$
이라하면

$b_{n+2}=-3+(n+1)d=11$

$$S_{n+2}=\frac{(n+2)(-3+11)}{2}$$
$$=4(n+2)=32$$

$\therefore n=6$

$-3+(n+1)\cdot d=11$이므로

$d=2$

13. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 100$

$2a + 9d = 20$

$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a+19d)}{2} - 100 = 300$

$10(2a+19d) = 400$

$2a + 19d = 40$

$2a + 9d + 10d = 40$

$20 + 10d = 40$

$d = 2$

$\therefore 2a = 2,\ a = 1$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a+29d)}{2} - (100+300) \\ &= \frac{30(2+29\times 2)}{2} - 400 \\ &= 15\times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

14. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 11,\ a_{14} = -11$일 때, 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n의 최댓값은?

① 56　② 62　③ 64　④ 68　⑤ 70

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_3 = 11$에서
$a + 2d = 11 \cdots$ ㉠
$a_{14} = -11$에서 $a + 13d = -11 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d = -2,\ a = 15$
$\therefore\ a_n = 15 + (n-1)\cdot(-2) = -2n + 17$
이때 S_n이 최대가 되려면 양수인 항만 모두 더하면 되므로
$-2n + 17 > 0$에서
$2n < 17 \quad \therefore\ n < \frac{17}{2} = 8.5$
따라서 S_n의 최댓값은 S_8이므로
$S_8 = \frac{8\{2\cdot 15 + 7\cdot(-2)\}}{2} = 64$

15. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 각각 n^2+kn, $2n^2-2n+1$일 때, $a_{10}=b_{10}$을 만족하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

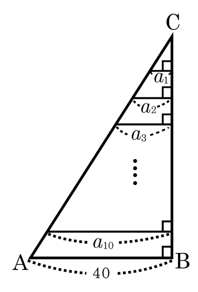
$a_{10}=(10^2+10k)-(9^2+9k)=19+k$

$$b_{10}=(2\cdot10^2-2\cdot10+1)-(2\cdot9^2-2\cdot9+1)$$
$$=181-145=36$$

$a_{10}=b_{10}$에서 $19+k=36$

$\therefore\ k=17$

16. 오른쪽 그림과 같이 밑변 AB의 길이가 40인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC를 11등분하여 변 AB와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_{10}$이라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$a_1+a_{10}=40,\ a_2+a_9=40, \cdots, a_5+a_6=40$이므로
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=40\times5=200$

17. 9와 144 사이에 세 자연수를 넣어서 이들 5개의 수가 등비수열을 이루도록 할 때, 사이에 들어갈 세 수 중 가장 큰 수는?

① 36　② 45　③ 54　④ 63　⑤ 72

해설

첫째항을 9, 공비를 r이라 하면 사이에 들어갈 세 자연수를 각각 $9r,\ 9r^2,\ 9r^3$으로 놓을 수 있다.
이때, $9r^4 = 144$이므로 $r^4 = 16$
$r^4 - 16 = 0,\ (r^2+4)(r^2+2)(r^2-2) = 0$
그런데 세 수는 자연수이므로 $r = 2$
따라서 세 수는 18, 36, 72이고, 이 중 가장 큰 수는 72이다.

18. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 b, $\frac{a}{2}$, 7이 이 순서대로 등차수열을 이루고, a, -3, b가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a^2+b^2의 값은?

① 9　② 33　③ 50　④ 67　⑤ 81

해설

$$\frac{a}{2}=\frac{b+7}{2} \Rightarrow a-b=7$$

$$(-3)^2=ab \Rightarrow ab=9$$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^2+b^2 &= (a-b)^2+2ab \\ &= 7^2+2\times 9=67\end{aligned}$$

19. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하면
$S_n = n^2 + kn$, $\log_3(T_n - 1) = n$이 성립한다. 두 수열의 제3항이 서로 같을 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$S_n = n^2 + kn$이므로
$a_3 = S_3 - S_2$
$(3^2 + 3k) - (2^2 + 2k) = k + 5$
$\log_3(T_n - 1) = n$에서 $T_n = 3^n + 1$이므로
$b_3 = T_3 - T_2 = 3^3 + 1 - (3^2 + 1)$
$= 28 - 10 = 18$
이때, $a_3 = b_3$이므로 $k + 5 = 18$ $\therefore$ $k = 13$

20. 수열 $1 \cdot 2 \cdot 4,\ 2 \cdot 4 \cdot 8,\ 3 \cdot 6 \cdot 12,\ 4 \cdot 8 \cdot 16, \cdots$ 의 제 10항까지의 합은?

① 400　　② 1100　　③ 12100

④ 24200　　⑤ 48400

해설

$a_k = k \cdot 2k \cdot 4k = 8k^3$ 이므로

$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} 8k^3 = 8 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 = 2 \cdot 10^2 \cdot 11^2 = 24200$

21. 수열 $1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26, \cdots$ 의 제 20항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 362

해설

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1, & & 2, & & 5, & & 10, & & 17, & & 26 \\ & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\ & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) \\ &= 1 + n^2 - n - n + 1 \end{aligned}$$

$a_n = n^2 - 2n + 2$

$\therefore a_{20} = 400 - 40 + 2 = 362$

22. $a_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$ 이라 할 때, 수열 $\frac{1}{1+a_1}$, $\frac{3}{3+a_2}$, $\frac{7}{1+a_3}$, $\frac{15}{1+a_4}$, $\cdots$ 의 첫째항부터 제20 항까지의 합은?

① $19-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$　② $20-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$　③ $19+\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$
④ $20+\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$　⑤ $21+\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

해설

$a_n = \frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1} = 2^n - 1$ 이고, 주어진 수열의 일반항은 $\frac{2^n-1}{1+a_k}$ 이다.

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k-1}{1+a_k}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k-1}{1+2^k-1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$

$= n - \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$= n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$

따라서 $S_n = 19 + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

23. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 일 때, 일반항 a_n 은?

① $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　③ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \frac{1}{2}$
④ 2^{n-1}　⑤ $2^n - 1$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ 을 $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$ 의 꼴로 변형하면

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\alpha}{2}$ 에서 $\frac{\alpha}{2} = 1 \quad \therefore \alpha = 2$

즉, $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

따라서 수열 $\{a_n - 2\}$ 는 첫째항이 $a_1 - 2 = -1$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

24. $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$a_3 = \dfrac{2+1}{3} = 1$

$a_4 = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$a_5 = \dfrac{1+1}{1} = 2$

$a_6 = \dfrac{2+1}{1} = 3$

$a_7 = \dfrac{3+1}{2} = 2$

$\vdots$

$\therefore\ a_1 = a_6 = a_{11} = \cdots = 3$

$a_2 = a_7 = a_{12} = \cdots = 2$

$a_3 = a_8 = a_{13} = \cdots = 1$

$a_4 = a_9 = a_{14} = \cdots = 1$

$a_5 = a_{10} = a_{15} = \cdots = 2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{66} a_n = 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_1$

$= 13 \times 9 + 3 = 120$

25. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^3 을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$

$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$

$= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4}$

$= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5)+g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^3 을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (m+1)^3$

$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$

$= \left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

즉, $f(m) = m+1,\ g(m) = m+2$

$\therefore f(5) = 5+1 = 6,\ g(6) = 6+2 = 8$

$\therefore f(5)+g(6) = 6+8 = 14$

26. $\sqrt[3]{a} = 81$, $\sqrt{\sqrt{b}} = 125$ 일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 225

해설

$\sqrt[3]{a} = 81 = 3^4$ 에서 $a = 3^{12}$

$\sqrt{\sqrt{b}} = 125$, $\sqrt[4]{b} = 5^3$ $\therefore b = 5^{12}$

이때, $ab = 3^{12} \cdot 5^{12} = 15^{12}$

$\therefore \sqrt[3]{\sqrt{ab}} = \sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{15^{12}}$

$= 15^{\frac{12}{6}} = 15^2 = 225$

27. $\log_{1-x}(-x^2-2x+15)$ 의 값이 정의되도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은?

① -15　② -10　③ -6　④ 2　⑤ 4

해설

밑의 조건에서
$1-x>0,\ 1-x\neq 1$
$\therefore x\neq 0, x<1 \cdots\cdots$ ㉠
진수의 조건에서
$-x^2-2x+15>0,\ (x-3)(x+5)<0$
$\therefore -5<x<3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 공통 범위를 구하면
$-5<x<0,\ 0<x<1$
따라서 구하는 정수 x는 $-4, -3, -2, -1$ 이고 그 합은 -10 이다.

28. $x=\sqrt{7+\sqrt{33}},\ y=\sqrt{7-\sqrt{33}}$일 때, $\log_2 x+\log_2 y$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\log_2 x+\log_2 y=\log_2 xy$
$=\log_2 \sqrt{7+\sqrt{33}}\sqrt{7-\sqrt{33}}$
$=\log_2 \sqrt{49-33}=\log_2 \sqrt{16}$
$=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

29. $m = \log_a \alpha,\ n = \log_a \beta$일 때, $a^{\frac{m-n}{2}}$ 을 $\alpha,\ \beta$에 관한 식으로 나타내면? (단, $a > 0,\ a \neq 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$)

① $\sqrt{\dfrac{\alpha - \beta}{2}}$　　② $\dfrac{\alpha - \beta}{2}$　　③ $\alpha^2 - \beta^2$

④ $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$　　⑤ $\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$

해설

$m = \log_a \alpha,\ n = \log_a \beta$에서 로그의 정의에 의하여

$a^m = \alpha,\ a^n = \beta$

$\therefore\ a^{\frac{m-n}{2}} = \sqrt{a^{m-n}} = \sqrt{\dfrac{a^m}{a^n}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

30. 실수 a, b가 $(201.4)^a = (0.02014)^b = 10000$을 만족할 때, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$\log_{201.4} 10^4 = a$

$4\log_{201.4} 10 = a$

$\log_{0.02014} 10000 = b$

$4\log_{0.02014} 10 = b$

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{4}\log_{10} 201.4 - \frac{1}{4}\log_{10} 0.02014$

$= \frac{1}{4}(\log 2.014 + 2 - \log 2.014 + 2)$

$= \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

31. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7133

해설

상용로그표에서 $\log 1.38 = 0.1399$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.138} = \frac{1}{3}\log 0.138 = \frac{1}{3}\log(1.38 \times 10^{-1})$$ 따 라 서

$$= \frac{1}{3}(\log 1.38 - 1) = \frac{1}{3}(0.1399 - 1)$$

$$= -0.2867 = -1 + 0.7133$$

$\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분은 0.7133 이다.

32. 다음 두 조건을 만족하는 양수 x의 값을 모두 곱하면 10^k이다. 이때, k의 값은?

· x는 세 자리 정수이다. · $\log x^2$와 $\log^{\frac{1}{x}}$ 의 소수부분은 같다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

x의 정수부분이 세 자리이므로 $\log x$의 정수부분은 2이다.

$2 \le \log x < 3 \cdots$ ㉠

$\log x^2$과 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수부분이 같으므로 $\log x^2 - \log \frac{1}{x}$ 의 값은 정수이어야 한다.

$\log x^2 - \log \frac{1}{x} = 2\log x + \log x = 3\log x$(정수)

㉠에 의하여 $6 \le 3\log x < 9$이므로

$3\log x = 6$ 또는 $3\log x = 7$ 또는 $3\log x = 8$

$\log x = 2$ 또는 $\log x = \frac{7}{3}$ 또는 $\log x = \frac{8}{3}$

따라서 $10^2 \cdot 10^{\frac{7}{3}} \cdot 10^{\frac{8}{3}} = 10^{2+\frac{7}{3}+\frac{8}{3}} = 10^7$

$\therefore\ k = 7$

33. $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ 일 때, 12^{30} 은 몇 자리 수인가?

① 31　　② 32　　③ 33　　④ 34　　⑤ 35

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 12^{30} &= 30\log(2^2 \times 3)\\ &= 30(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3)\\ &= 30(2 \times 0.3010 + 0.4771)\\ &= 32.3730 = 32 + 0.3730\end{aligned}$$

$\log_{10} 12^{30}$ 의 지표가 32 이므로
12^{30} 은 33 자리 정수이다.