

1. 원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식은
 $4x - 2y = 20 \quad \therefore y = 2x - 10$
따라서, $a = 2, b = -10 \quad \therefore a + b = 2 - 10 = -8$

2. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 A(1,2)에서 그은 접선의 방정식은?

① $-2x + y + 5 = 0$

② $-2x + y - 3 = 0$

③ $x - y + 5 = 0$

④ $x + 2y + 5 = 0$

⑤ $x + 2y - 5 = 0$

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식

$x_1x + y_1y = r^2$ 을 이용하면,

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \quad \therefore x + 2y - 5 = 0$$

3. 다음은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
접선의 방정식을 $y = mx + k$ 라 하자.
직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식
 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대입하여 정리하면,
 $(1 + m^2)x^2 + 2mkx + \boxed{(가)}$ $= 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
 $D = 0$ 에서
 $k = \pm \boxed{(나)}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y = mx \pm \boxed{(나)}$

(가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 + 1}$
- ② $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 - 1}$
- ③ $k^2 - r^2, \sqrt{m^2 + 1}$
- ④ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 + 1}$
- ⑤ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 - 1}$

해설

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ 에
대입하면, $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$
 $(1 + m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
 $\frac{D}{4} = m^2k^2 - (1 + m^2)(k^2 - r^2) = m^2r^2 + r^2 - k^2$
원과 직선이 접하므로 $D = 0$,
즉 $r^2(m^2 + 1) = k^2, k = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
 $\therefore (가) : k^2 - r^2, (나) : r\sqrt{m^2 + 1}$

4. $x^2 + y^2 = 5$ 에 접하고, 기울기가 -2 이며, 제 1, 2, 4사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -2x - \sqrt{5}$

② $y = -2x + 5\sqrt{5}$

③ $y = -2x - 3\sqrt{5}$

④ $y = -2x + 3\sqrt{5}$

⑤ $y = -2x - 5\sqrt{5}$

해설

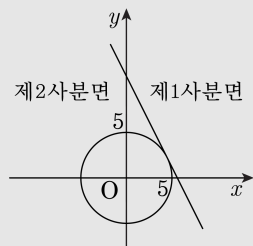
기울기가 -2 인 직선의 방정식을 $y = -2x + c$ 라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인

5와 같으므로 $\frac{|-c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 5$

$\therefore c = \pm 5\sqrt{5}$

다음 그림과 같이 제 1, 2, 4사분면을 지나야 하므로 $\therefore c = 5\sqrt{5}$

$\therefore y = -2x + 5\sqrt{5}$



5. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

6. 기울기가 $\sqrt{3}$ 이고 원 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하는 직선으로 제 4 사분면을 지나는 것은?

- ① $y = \sqrt{3}x - 9$ ② $y = \sqrt{3}x - 8$ ③ $y = \sqrt{3}x - 5$
④ $y = \sqrt{3}x + 8$ ⑤ $y = \sqrt{3}x + 9$

해설

구하는 접선의 방정식은 $m = \sqrt{3}$, $r = 4$ 이므로

$$y = \sqrt{3}x \pm 4\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{3}x \pm 8$$

두 직선 중 제4 사분면을 지나는 것은

$$\textcircled{2} \ y = \sqrt{3}x - 8$$

7. 점 $(1, 3)$ 에서 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식을 $ax + by + c = 0$ 이라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

점 $(1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식의 기울기를 m 이라 하면
 $y = m(x - 1) + 3$
직선이 원에 접하므로 이 직선과 원의 중심 사이의 거리는 반지름과 같다.

$$\frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 - m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$
$$(-m + 3)^2 = 5(m^2 + 1)$$

방정식을 풀면, $m = -2, \frac{1}{2}$
 $\therefore$ 직선의 방정식은 $2x + y - 5 = 0, x - 2y + 5 = 0$
 $\therefore a^2 + b^2 = 5$

8. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, | -3m - 1 | = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$

양변을 제곱하면

$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$

따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$y = -2x + 5$

따라서 y 절편은 5이다.

9. 점 $(0, 2)$ 를 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $y = -\sqrt{3}x + 2, y = \sqrt{3}x + 2$

② $y = -\sqrt{3}x - 2, y = \sqrt{3}x + 2$

③ $y = -\sqrt{3}x + 2, y = \sqrt{3}x + 3$

④ $y = -\sqrt{3}x + 2, y = \sqrt{3}x - 2$

⑤ $y = -\sqrt{3}x + 4, y = \sqrt{3}x + 2$

해설

$$x^2 + y^2 = 1 \cdots \textcircled{1}$$

점 $(0, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$y - 2 = m(x - 0)$$

$$\therefore y = mx + 2 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하고 정리하면

$$(m^2 + 1)x^2 + 4mx + 3 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 이 $\textcircled{1}$ 에 접하려면 방정식 $\textcircled{3}$ 이 중근을 가져야 하므로

$$D/4 = (2m)^2 - 3(m^2 + 1) = 0$$

$$\therefore m^2 = 3$$

$$\therefore m = \pm \sqrt{3}$$

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $y = \pm \sqrt{3}x + 2$

해설

(다른 풀이1) 접점을 (x_1, y_1) 이라면

$$\text{접선방정식은 } x_1x + y_1y = 1 \cdots \textcircled{1}$$

점 $(0, 2)$ 는 $\textcircled{1}$ 위의 점이므로

$$2y_1 = 1 \cdots \textcircled{2}$$

한편, (x_1, y_1) 은 원 $\textcircled{1}$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } (x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$y = -\sqrt{3}x + 2, y = \sqrt{3}x + 2$$

(다른 풀이2) 점 $(0, 2)$ 를 지나는 직선의

기울기를 m 이라 하면 $y - 2 = m(x - 0)$

$$\therefore mx - y + 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

원 $\textcircled{1}$ 의 중심에서 $\textcircled{1}$ 까지의 거리가

$$\text{원의 반지름과 같으므로 } \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$\therefore \sqrt{m^2 + 1} = 2$$

$$\therefore m = \pm \sqrt{3}$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $y = \pm \sqrt{3}x + 2$

10. 점 A(0, a)에서 원 $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ 에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은 ?
- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

점 A(0, a)을 지나고 기울기가 m인 접선을 $y = mx + a$ 로 놓으면 원의 중심 (0, 3)에서 접선 $mx - y + a = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$$(a - 3)^2 = 8(m^2 + 1)$$
$$8m^2 - a^2 + 6a - 1 = 0$$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2 + 6a - 1}{8} = -1$$
$$a^2 - 6a - 7 = 0, \quad (a - 7)(a + 1) = 0$$

∴ a = 7 (∵ a > 0)

해설

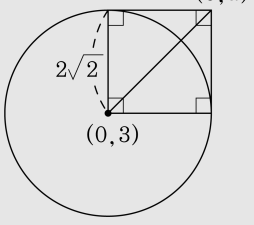
원의 중심 (0, 3)에서 A(0, a)까지의 거리는

반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0 + (a - 3)^2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$$a - 3 = \pm 4$$

∴ a = 7 또는 a = -1

그런데 a > 0 에서 a = 7



11. 점 A(0, a) 에서 원 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ 에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a 의 값들의 합을 구하면?

① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은 $y = mx + a$ 이다. 원의 중심 (0, 2) 에서 직선 $mx - y + a = 0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\frac{|m \times 0 - 2 + a|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 3$

$\therefore |a - 2| = 3\sqrt{m^2 + 1}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2 - (a^2 - 4a - 5) = 0$ 이 방정식의 두 근을 m_1, m_2 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$$m_1 m_2 = -\frac{1}{9}(a^2 - 4a - 5) = -1, a^2 - 4a - 14 = 0$$

$$\therefore a = 2 \pm 3\sqrt{2}$$

따라서, 구하는 a 의 값들의 합은

$$(2 + 3\sqrt{2}) + (2 - 3\sqrt{2}) = 4$$

12. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 점 $P(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x_1 y_1 > 0$ 이고 넓이는 $\frac{25}{2x_1 y_1}$ 이므로

$x_1 y_1$ 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.

그런데 $x_1^2 + y_1^2 = 5$ 이고 $x_1 > 0, y_1 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1 y_1, x_1 y_1 \leq \frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{25}{2x_1 y_1} \geq \frac{25}{2} \cdot \frac{2}{5} = 5 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

13. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2 + y^2 = 4 \text{ , } (x - 5)^2 + y^2 = 25$

- ① $y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)
- ② $y = \pm \frac{4}{5}x \pm 2$ (복부호 동순)
- ③ $y = \pm \frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$ (복부호 동순)
- ④ $y = \pm \frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$ (복부호 동순)
- ⑤ $y = \pm \frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설

$x^2 + y^2 = 4 \dots\dots\textcircled{\tiny{\Gamma}}$
 $(x - 5)^2 + y^2 = 25 \dots\dots\textcircled{\tiny{\Delta}}$
공통접선의 방정식을 $y = ax + b$
 $\dots\dots\textcircled{\tiny{\Theta}}$ 로 놓으면
원 $\textcircled{\tiny{\Gamma}}$ 과 직선 $\textcircled{\tiny{\Theta}}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 이
접하므로
$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

 $\therefore |b| = 2\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots\textcircled{\tiny{\textcircled{\tiny{\Theta}}}}$
또, 원 $\textcircled{\tiny{\Delta}}$ 도 직선 $\textcircled{\tiny{\Theta}}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 과 접하므로
$$\frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$$

 $\therefore |5a + b| = 5\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots\textcircled{\tiny{\textcircled{\tiny{\Theta}}}}$
그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{\tiny{\Theta}} \div \textcircled{\tiny{\textcircled{\tiny{\Theta}}}}$ 을 하면
$$\frac{|5a + b|}{|b|} = \frac{5}{2}$$

 $2|5a + b| = 5|b|, 2(5a + b) = \pm 5b$
 $\therefore b = -\frac{10}{7}a$ 또는 $b = \frac{10}{3}a$
(i) $b = -\frac{10}{7}a$ 일 때, $\textcircled{\tiny{\textcircled{\tiny{\Theta}}}}$ 에서
$$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면
 $24a^2 + 49 = 0$
이것을 만족하는 실수 a 는 없다.
(ii) $b = \frac{10}{3}a$ 일 때, $\textcircled{\tiny{\textcircled{\tiny{\Theta}}}}$ 에서
$$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$
 $\therefore a = \pm \frac{3}{4}, b = \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)
(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은
 $y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)

14. 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + (y - 4)^2 = 1$ 의 공통접선의 y 절편은?

- ① $\frac{26}{5}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

해설

공통접선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 하면
원의 중심에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이와 같다.
중심 (0, 0) 에서 접선까지의 거리가 4 ,
중심 (0, 4) 에서 접선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 4$$

$$\frac{|-4 + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$4|-4 + n| = |n|$$

$$4(-4 + n) = \pm n$$

$$\therefore n = \frac{16}{5}, \frac{16}{3} \quad n > 5 \text{ 이므로}$$

구하는 공통접선의 y 절편은 $\frac{16}{3}$

15. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $m^2 + n^2$ 의 값은? (단, $m \neq 0$)

- ① 15
- ② 16
- ③ 17
- ④ 18
- ⑤ 19

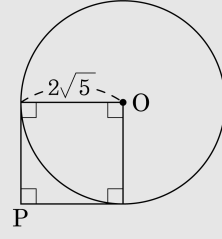
해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 (0, 0) 에서
직선 $y = mx + n$,
즉 $mx - y + n = 0$ 에 이르는 거리가 1 이므로
$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$
$$\therefore m^2 = n^2 - 1 \dots \textcircled{\tiny \text{㉠}}$$
원 $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ 의 중심 (0, 3) 에서
직선 $mx - y + n = 0$ 에 이르는 거리가 2 이므로
$$\frac{|-3 + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$$
$$\therefore n^2 - 6n + 9 = 4m^2 + 4 \dots \textcircled{\tiny \text{㉡}}$$
$$\textcircled{\tiny \text{㉠}} \text{ 을 } \textcircled{\tiny \text{㉡}} \text{ 에 대입하면,}$$
$$n^2 - 6n + 9 = 4(n^2 - 1) + 4, 3n^2 + 6n - 9 = 0$$
$$n^2 + 2n - 3 = 0, (n + 3)(n - 1) = 0$$
$$\therefore n = -3 \text{ 또는 } n = 1$$
이 때, $n = 1$ 이면 $m = 0$ 이 되므로 $n = -3$
 $n = -3$ 을 $\textcircled{\tiny \text{㉠}}$ 에 대입하면 $m^2 = 8$
$$\therefore m^2 + n^2 = 8 + 9 = 17$$

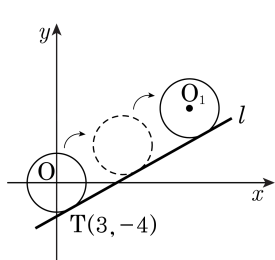
16. 원 $(x+1)^2 + (y-6)^2 = 20$ 밖의 한 점 P에서 그은 접선이 수직으로 만날 때, 다음 중 점 P가 될 수 없는 점을 고르면?
- ① $(-7, 8)$ ② $(-3, 12)$ ③ $(1, 0)$
④ $(3, 1)$ ⑤ $(5, 4)$

해설

점 P에서 그은 접선이 수직으로 만나려면
그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 정사각형이 되어야 한다.
이 때 점 P와 중심사이의 거리는
정사각형의 대각선 길이인 $2\sqrt{10}$ 이어야
한다. 원의 중심 $(-1, 6)$ 과 보기에 나와
있는 점들 사이의 거리를 구했을 때,
중심과 점 $(3, 1)$ 사이의 거리는
 $\sqrt{(3-(-1))^2 + (1-6)^2} = \sqrt{41}$



17. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 $T(3, -4)$ 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O_1 의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 $T(3, -4)$ 에서 원 O 와 접하므로 직선 OT 과 직선 l 은 수직이다.

직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한편, 원 O_1 의 중심의 좌표는 (a, b) 이므로

$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO_1 의 기울기와 같고,

직선 OO_1 과 직선 l 은 서로 평행하다.

$\therefore$ (직선 OO_1 의 기울기)

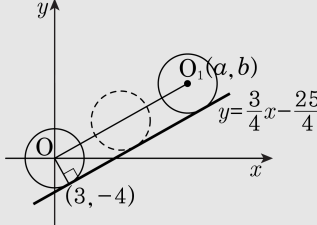
$=$ (직선 l 의 기울기)

$= \frac{3}{4}$

직선 l 의 방정식은 $y - (-4) =$

$\frac{3}{4}(x - 3)$

$\therefore y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$



18. 중심이 C(4, 3) 이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 원점에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q 라 할 때, 직선 PQ 의 방정식을 구하면?

- ① $4x + 3y = 25$

② $4x + 3y = 21$

③ $3x + 4y = 16$
- ④ $3x + 4y = 25$

⑤ $3x + 4y = 21$

해설

구하고자 하는 직선 $y = ax + b$ 는 원점과 원의 중심인 (4, 3) 을 잇는 직선에 대해서 수직이므로,

$$a \times \frac{3}{4} = -1$$

$$\therefore a = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore y = -\frac{4}{3}x + b, 4x + 3y - 3b = 0$$

직선 OC와 직선 PQ의 교점을 R이라 하면 $\triangle OCQ$ 와 $\triangle OQR$ 은 서로 닮음이므로,

$$5 : \sqrt{21} = \sqrt{21} : x$$

$$\therefore x = \frac{21}{5}$$

직선 PQ와 원점간의 거리가 $\frac{21}{5}$ 이므로

$$\frac{|-3b|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{21}{5}$$

$|3b| = 21, b > 0$ 이므로 $3b = 21$

$$\therefore 4x + 3y = 21$$

19. 2개의 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통접선의 기울기를 구하면 ?

① $\pm \frac{3\sqrt{7}}{7}, \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$
③ $\pm \frac{3\sqrt{7}}{4}, \pm \frac{\sqrt{15}}{8}$
⑤ $\pm \frac{3\sqrt{7}}{8}, \pm \frac{\sqrt{15}}{12}$

② $\pm \frac{3\sqrt{7}}{2}, \pm \frac{\sqrt{15}}{5}$
④ $\pm \frac{3\sqrt{7}}{5}, \pm \frac{\sqrt{15}}{10}$

해설

$x^2 + y^2 = 1 \dots\dots ①$

$(x - 4)^2 + y^2 = 4 \dots\dots ②$

공통접선을 $y = mx + n \dots\dots ③$ 이라 하면

①의 중심과 ③과의 거리는 1이고,

②의 중심과 ③과의 거리는 2이므로

$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$ 이고

$\frac{|4m + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$

$\Rightarrow m^2 + 1 = n^2 \dots\dots ④$

$4(m^2 + 1) = (4m + n)^2 \dots ⑤$

④를 ⑤에 대입하여 인수분해하면

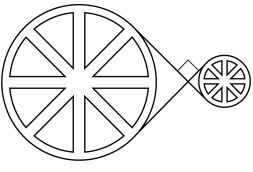
$(4m + 3n)(4m - n) = 0$

$n = -\frac{4}{3}m$ 에서 $m = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}$

$n = 4m$ 에서 $m = \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$

$\therefore m = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}, \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$

20. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 2 인 두 원판을 ∞ 모양으로 벨트를 채웠는데 가운데 부분이 수직으로 만난다고 한다. 이 벨트의 길이를 $a + b\pi$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구 하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

두 원의 내접선의 길이는 다음 그림에서

$6 + 2 = 8$ 이다.

$\therefore$ 벨트의 길이는

$$2 \times 8 + \pi \times 2 \times 6 \times \frac{270}{360} + \pi \times 2 \times 2 \times \frac{270}{360}$$

$$= 16 + 12\pi$$

$$\therefore a + b = 28$$

