1. 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4,-2)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4,-2)$에서의 접선의 방정식은

$4x-2y=20 \quad \therefore \ y=2x-10$

따라서, $a=2,\ b=-10 \quad \therefore \ a+b=2-10=-8$

2. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,2)$에서 그은 접선의 방정식은?

① $-2x+y+5=0$

② $-2x+y-3=0$

③ $x-y+5=0$

④ $x+2y+5=0$

⑤ $x+2y-5=0$

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식
$x_1x+y_1y=r^2$을 이용하면,
$1\cdot x+2\cdot y=5 \quad \therefore\ x+2y-5=0$

3. 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

> 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
> 접선의 방정식을 $y=mx+k$ 라 하자.
> 직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식
> $x^2+y^2=r^2$ 에 대입하여 정리하면,
> $(1+m^2)x^2+2mkx+\boxed{(가)}=0$
> 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
> $D=0$ 에서
> $k=\pm\boxed{(나)}$
> 따라서 구하는 접선의 방정식은
> $y=mx\pm\boxed{(나)}$

(가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
② $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2-1}$
③ $k^2-r^2,\ \sqrt{m^2+1}$
④ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
⑤ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2-1}$

해설

직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$ 에
대입하면, $x^2+(mx+k)^2=r^2$
$(1+m^2)x^2+2mkx+k^2-r^2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
$$\frac{D}{4}=m^2k^2-(1+m^2)(k^2-r^2)=m^2r^2+r^2-k^2$$
원과 직선이 접하므로 $D=0$,
즉$r^2(m^2+1)=k^2,\ k=\pm r\sqrt{m^2+1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
$\therefore$ (가) : k^2-r^2, (나) : $r\sqrt{m^2+1}$

4. $x^2 + y^2 = 5$에 접하고, 기울기가 -2이며, 제 $1, 2, 4$사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -2x - \sqrt{5}$

② $y = -2x + 5\sqrt{5}$

③ $y = -2x - 3\sqrt{5}$

④ $y = -2x + 3\sqrt{5}$

⑤ $y = -2x - 5\sqrt{5}$

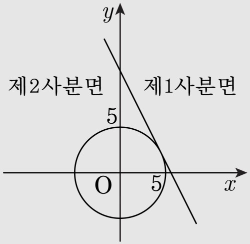
해설

기울기가 -2인 직선의 방정식을 $y = -2x + c$라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인 5와 같으므로 $\dfrac{|-c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 5$

$\therefore\ c = \pm 5\sqrt{5}$

다음 그림과 같이 제 $1, 2, 4$사분면을 지나야 하므로 $\therefore\ c = 5\sqrt{5}$

$\therefore y = -2x + 5\sqrt{5}$



5. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이2 와 같다.

따라서, $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

$|a-1|=10$

$a-1=\pm 10$

$a>0$ 이므로 $a=11$

6. 기울기가 $\sqrt{3}$ 이고 원 $x^2+y^2=16$ 에 접하는 직선으로 제 4 사분면을 지나는 것은?

① $y=\sqrt{3}x-9$　② $y=\sqrt{3}x-8$　③ $y=\sqrt{3}x-5$

④ $y=\sqrt{3}x+8$　⑤ $y=\sqrt{3}x+9$

해설

구하는 접선의 방정식은 $m=\sqrt{3}$, $r=4$ 이므로

$y=\sqrt{3}x\pm 4\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{3}x\pm 8$

두 직선 중 제4 사분면을 지나는 것은

② $y=\sqrt{3}x-8$

7. 점 (1, 3)에서 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 $ax+by+c=0$이라 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ④ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

점 (1, 3)을 지나는 직선의 방정식의 기울기를 m이라 하면
$y=m(x-1)+3$
직선이 원에 접하므로 이 직선과 원의 중심 사이의 거리는 반지름과 같다.

$$\frac{|m\times 0+(-1)\times 0-m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

$(-m+3)^2=5(m^2+1)$

방정식을 풀면, $m=-2,\ \frac{1}{2}$

$\therefore$ 직선의 방정식은 $2x+y-5=0,\ x-2y+5=0$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

8. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면

접선은 $y+1=m(x-3)\cdots$ ①

따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선

$mx-y-3m-1=0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.

$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2+6m+1=5m^2+5,\ 4m^2+6m-4=0$

따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2},-2$

여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면

$y=-2x+5$

따라서 y절편은 5이다.

9. 점 (0, 2)를 지나고, 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-\sqrt{3}x+2, y=\sqrt{3}x+2$

② $y=-\sqrt{3}x-2, y=\sqrt{3}x+2$

③ $y=-\sqrt{3}x+2, y=\sqrt{3}x+3$

④ $y=-\sqrt{3}x+2, y=\sqrt{3}x-2$

⑤ $y=-\sqrt{3}x+4, y=\sqrt{3}x+2$

해설

$x^2+y^2=1 \cdots$ ㉠
점 $(0,2)$를 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면
$y-2=m(x-0)$
$\therefore\ y=mx+2\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하고 정리하면
$(m^2+1)x^2+4mx+3=0\cdots$ ㉢
㉡이 ㉠에 접하려면 방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로
$D/4=(2m)^2-3(m^2+1)=0$
$\therefore\ m^2=3$
$\therefore\ m=\pm\sqrt{3}$
이것을 ㉡에 대입하면 $y=\pm\sqrt{3}x+2$

해설

(다른 풀이1) 접점을 $(x_1,\ y_1)$ 이라면
접선방정식은 $x_1x+y_1y=1\cdots$ ㉣
점 $(0,\ 2\ )$ 는 ㉣ 위의 점이므로
$2y_1=1\cdots$ ㉤
한편, $(x_1,\ y_1)$ 은 원 ㉠위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2=1\cdots$ ㉥
㉥, ㉤에서 $(x_1,\ y_1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$
㉣에 대입하여 정리하면
$y=-\sqrt{3}x+2,\ y=\sqrt{3}x+2$
(다른 풀이2) 점 $(0,2)$를 지나는 직선의
기울기를 m이라 하면 $y-2=m(x-0)$
$\therefore\ mx-y+2=0\cdots$ ㉦
원 ㉠의 중심에서 ㉦까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로 $\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}=1$
$\therefore\ \sqrt{m^2+1}=2$
$\therefore\ m=\pm\sqrt{3}$
이것을 ㉦에 대입하면 $y=\pm\sqrt{3}x+2$

10. 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$에서 원 $x^2 + (y-3)^2 = 8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은 ?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

점 $\mathrm{A}(0,\ a)$을 지나고 기울기가 m인 접선을

$y = mx + a$로 놓으면 원의 중심 $(0,\ 3)$에서

접선 $mx - y + a = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$(a-3)^2 = 8(m^2 + 1)$

$8m^2 - a^2 + 6a - 1 = 0$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2 + 6a - 1}{8} = -1$$

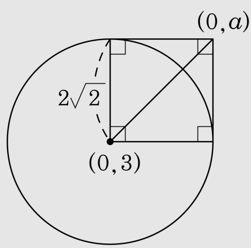
$a^2 - 6a - 7 = 0,\quad (a-7)(a+1) = 0$

$\therefore\ a = 7\ (\because a > 0)$

해설

원의 중심 $(0,\ 3)$에서 $\mathrm{A}(0,\ a)$까지의 거리는

반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0 + (a-3)^2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$



$a - 3 = \pm 4$

$\therefore\ a = 7$ 또는 $a = -1$

그런데 $a > 0$ 에서 $a = 7$

11. 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$ 에서 원 $x^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a 의 값들의 합을 구하면?

① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx+a$ 이다. 원의 중심 $(0,\ 2)$ 에서 직선 $mx-y+a=0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\dfrac{|m\times 0-2+a|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3$

$\therefore\ |a-2|=3\sqrt{m^2+1}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2-(a^2-4a-5)=0$ 이 방정식의 두 근을 $m_1,\ m_2$ 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$m_1m_2=-\dfrac{1}{9}(a^2-4a-5)=-1$, $a^2-4a-14=0$

$\therefore\ a=2\pm3\sqrt{2}$

따라서, 구하는 a 의 값들의 합은

$(2+3\sqrt{2})+(2-3\sqrt{2})=4$

12. 원 $x^2+y^2=5$ 와 점 $P(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x_1y_1>0$ 이고 넓이는 $\dfrac{25}{2x_1y_1}$ 이므로

x_1y_1 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.

그런데 $x_1^2+y_1^2=5$ 이고 $x_1>0, y_1>0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1,\ x_1y_1 \leq \frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1} \geq \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{25}{2x_1y_1} \geq \frac{25}{2}\cdot\frac{2}{5} = 5$$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

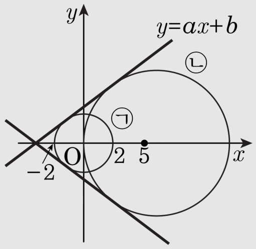
따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

13. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2+y^2=4$, $(x-5)^2+y^2=25$

① $y=\pm\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)
② $y=\pm\frac{4}{5}x\pm2$ (복부호 동순)
③ $y=\pm\frac{5}{6}x\pm\frac{7}{5}$ (복부호 동순)
④ $y=\pm\frac{9}{10}x\pm\frac{11}{8}$ (복부호 동순)
⑤ $y=\pm\frac{10}{11}x\pm\frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설



$x^2+y^2=4 \cdots\cdots$ ㉠
$(x-5)^2+y^2=25 \cdots\cdots$ ㉡
공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ $\cdots\cdots$㉢로 놓으면
원 ㉠과 직선㉢, 즉 $ax-y+b=0$ 이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=2$$

$\therefore |b|=2\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉣
또, 원 ㉡도 직선 ㉢, 즉 $ax-y+b=0$ 과 접하므로

$$\frac{|5a+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=5$$

$\therefore |5a+b|=5\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉤
그런데 $b\neq0$ 이므로 ㉤ ÷ ㉣을 하면

$$\frac{|5a+b|}{|b|}=\frac{5}{2}$$

$2|5a+b|=5|b|, 2(5a+b)=\pm5b$

$\therefore b=-\frac{10}{7}a$ 또는 $b=\frac{10}{3}a$

(i) $b=-\frac{10}{7}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{7}|a|=2\sqrt{a^2+1}, 5|a|=7\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면
$24a^2+49=0$
이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b=\frac{10}{3}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{3}|a|=2\sqrt{a^2+1}, 5|a|=3\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2=9, a^2=\frac{9}{16}$

$\therefore a=\pm\frac{3}{4}, b=\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

(i), (ii) 로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$y=\pm\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

14. 두 원 $x^2+y^2=16$, $x^2+(y-4)^2=1$ 의 공통접선의 y 절편은?

① $\frac{26}{5}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

해설

공통접선의 방정식을 $y=mx+n$ 이라 하면
원의 중심에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이와 같다.
중심 $(0,\ 0)$ 에서 접선까지의 거리가 4 ,
중심 $(0,\ 4)$ 에서 접선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=4$$

$$\frac{|-4+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

두 식을 연립하여 풀면

$4|-4+n|=|n|$

$4(-4+n)=\pm n$

$\therefore n=\frac{16}{5},\ \frac{16}{3}$ $n>5$ 이므로

구하는 공통접선의 y 절편은 $\frac{16}{3}$

15. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-3)^2=4$ 의 공통접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, m^2+n^2 의 값은?(단, $m \neq 0$)

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

원 $x^2+y^2=1$ 의 중심 $(0,\ 0)$ 에서
직선 $y=mx+n$,
즉 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 1이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$\therefore\ m^2=n^2-1 \ \cdots$ ㉠
원 $x^2+(y-3)^2=4$ 의 중심 $(0,\ 3)$ 에서
직선 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 2이므로

$$\frac{|-3+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$\therefore\ n^2-6n+9=4m^2+4 \ \cdots$ ㉡
㉠ 을 ㉡ 에 대입하면,
$n^2-6n+9=4(n^2-1)+4,\ 3n^2+6n-9=0$
$n^2+2n-3=0,\ (n+3)(n-1)=0$
$\therefore\ n=-3$ 또는 $n=1$
이 때, $n=1$ 이면 $m=0$ 이 되므로 $n=-3$
$n=-3$ 을 ㉠ 에 대입하면 $m^2=8$
$\therefore\ m^2+n^2=8+9=17$

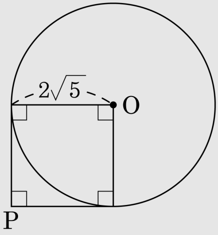
16. 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=20$ 밖의 한 점 P에서 그은 접선이 수직으로 만날 때, 다음 중 점 P가 될 수 없는 점을 고르면?

① $(-7,\ 8)$ ② $(-3,\ 12)$ ③ $(1,\ 0)$

④ $(3,\ 1)$ ⑤ $(5,\ 4)$

해설

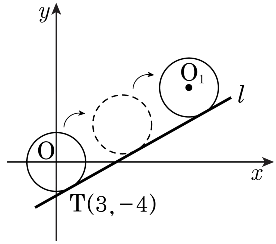
점 P에서 그은 접선이 수직으로 만나려면 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 정사각형이 되어야 한다.



이 때 점 P와 중심사이의 거리는 정사각형의 대각선 길이인 $2\sqrt{10}$ 이어야 한다. 원의 중심 $(-1,\ 6)$과 보기에 나와 있는 점들 사이의 거리를 구했을 때, 중심과 점 $(3,\ 1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3-(-1))^2+(1-6)^2}=\sqrt{41}$

17. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 T(3, −4) 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O_1 의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?

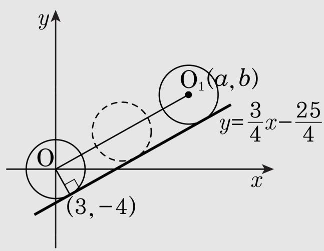


① $\frac{1}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{3}{4}$
④ 1　⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 T(3, −4) 에서 원 O 와 접하므로
직선 OT 와 직선 l 은 수직이다.
직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로
직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.
한편, 원 O_1 의 중심의 좌표는 (a, b) 이므로
$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO_1 의 기울기와 같고,
직선 OO_1 과 직선 l 은 서로 평행하다.

$\therefore \frac{b}{a}$ (직선 OO_1 의 기울기)
$=$ (직선 l 의 기울기)
$=\frac{3}{4}$



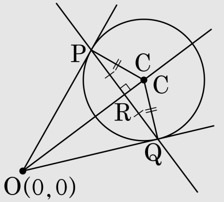
직선 l 의 방정식은 $y-(-4)=\frac{3}{4}(x-3)$
$\therefore\ y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$

18. 중심이 C(4, 3) 이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 원점에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q 라 할 때, 직선 PQ 의 방정식을 구하면?

① $4x+3y=25$ ② $4x+3y=21$ ③ $3x+4y=16$

④ $3x+4y=25$ ⑤ $3x+4y=21$

해설



구하고자 하는 직선

$y=ax+b$ 는 원점과

원의 중심인 (4, 3) 을 잇는 직선에 대해서

수직이므로,

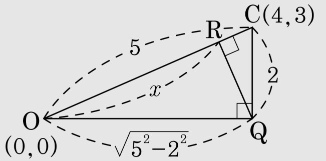
$a\times\frac{3}{4}=-1$

$\therefore a=-\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=-\frac{4}{3}x+b,\ 4x+3y-3b=0$

직선 OC와 직선 PQ의 교점을 R

이라 하면



$\triangle$OCQ 와 $\triangle$OQR 은 서로 닮음이

므로,

$5\ :\ \sqrt{21}=\sqrt{21}\ :\ x$

$\therefore\ x=\frac{21}{5}$

직선 PQ와 원점간의 거리가 $\frac{21}{5}$ 이므로

$\frac{|-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{21}{5}$

$|3b|=21,\ b>0$ 이므로 $3b=21$

$\therefore\ 4x+3y=21$

19. 2개의 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통접선의 기울기를 구하면 ?

① $\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$
② $\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$
③ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{4}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{8}$
④ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{5}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{10}$
⑤ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{12}$

해설

$x^2+y^2=1 \cdots\cdots$ ①
$(x-4)^2+y^2=4 \cdots\cdots$ ②
공통접선을 $y=mx+n \cdots\cdots$ ③이라 하면
①의 중심과 ③과의 거리는 1이고,
②의 중심과 ③과의 거리는 2이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \text{ 이고}$$

$$\frac{|4m+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

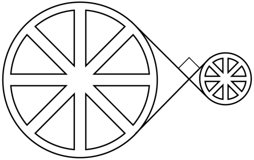
$\Rightarrow\ m^2+1=n^2 \cdots\cdots$ ④
$4(m^2+1)=(4m+n)^2 \cdots$ ⑤
④를 ⑤에 대입하여 인수분해하면
$(4m+3n)(4m-n)=0$

$n=-\frac{4}{3}m$ 에서 $m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$

$n=4m$ 에서 $m=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

$\therefore\ m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7},\ \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

20. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 2 인 두 원판을 ∞ 모양으로 벨트를 채웠는데 가운데 부분이 수직으로 만난다고 한다. 이 벨트의 길이를 $a+b\pi$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

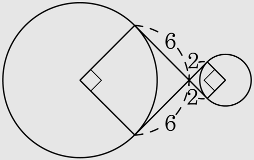


▶ **답 :**

▷ **정답 :** 28

해설

두 원의 내접선의 길이는 다음 그림에서 $6+2=8$ 이다.



$\therefore$ 벨트의 길이는

$2\times8+\pi\times2\times6\times\frac{270}{360}+\pi\times2\times2\times\frac{270}{360}$

$=16+12\pi$

$\therefore\ a+b=28$